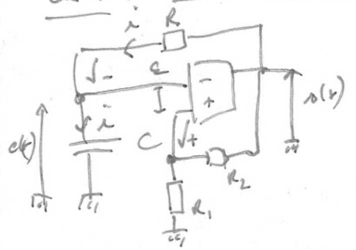
Ex 1 : Multivibrateur astable



$i_+ = i_- = 0$ et $V_- = e(t)$

$i = C \dfrac{de}{dt}$

$i = \dfrac{s - V_-}{R} = \dfrac{s - e}{R}$

Div. de tension (car $i_+ = 0$)

↳ $V_+ = \dfrac{R_1}{R_1+R_2} s$

1. En régime linéaire ⇒ $\varepsilon = 0$ ⇒ $V_+ = V_-$

$i = i$ ⇒ $C \dfrac{de}{dt} = \dfrac{s-e}{R}$ avec $V_+ = V_- = e = \dfrac{R_1}{R_1+R_2} s$

(car $i_- = 0$)

donc $RC \dfrac{de}{dt} = \left(\dfrac{R_1+R_2}{R_1}\right) e - e = \dfrac{R_2}{R_1} e$

$\boxed{\tau \dfrac{de}{dt} - \dfrac{R_2}{R_1} e = 0}$ ⇒ coef. de signe ≠ avec $e(t) = A e^{\frac{t}{\tau}\frac{R_2}{R_1}}$ qui ↗ qd t ↗

donc $s(t) = \dfrac{R_1+R_2}{R_1} e(t)$ ↗ qd t ↗ jusqu'à saturat°

Le syst. est instable !

2. • En saturat° haute ⇒ $s = +V_{SAT}$ et $\varepsilon > 0$

$\varepsilon = V_+ - V_- = \dfrac{R_1}{R_1+R_2} V_{SAT} - e(t) > 0$

donc $\boxed{e(t) < \dfrac{R_1}{R_1+R_2} V_{SAT}}$ condit° à respecter

Or $C \dfrac{de}{dt} = \dfrac{+V_{SAT} - e}{R}$ ⇒ $\tau \dfrac{de}{dt} + e = V_{SAT}$

$e(t)$ de la forme $e(t) = A e^{-t/\tau} + V_{SAT}$

Qd $t \to +\infty$ $\boxed{e(t) \to +V_{SAT} > \underbrace{\dfrac{R_1}{R_1+R_2}}_{k<1\,!} V_{SAT}}$

Donc la condit° ne peut être respectée ! état instable

il y aura basculement spontané !

• En saturat° basse ⇒ $s = -V_{SAT}$ et $\varepsilon < 0$

$\varepsilon = -\dfrac{R_1}{R_1+R_2} V_{SAT} - e(t) < 0$

donc $\boxed{e(t) > -\underbrace{\dfrac{R_1}{R_1+R_2}}_{k<1} V_{SAT}}$ à respecter

Or $C \dfrac{de}{dt} = \dfrac{-V_{SAT} - e}{R}$ → solut° en régime permanent $\left(\dfrac{de}{dt} = 0\right)$

$e(t \to +\infty) = -V_{SAT}$

donc la condit° $e(t) > -k V_{SAT}$ avec $k < 1$ $\left(k = \dfrac{R_1}{R_1+R_2} > 0\right)$

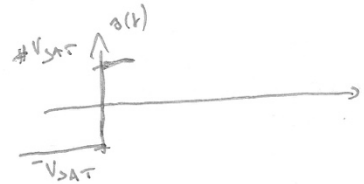
ne peut être respectée → instable

3 - Considérons donc un oscillateur de relaxation dont la sortie va basculer entre +/- V_{SAT} → signal carré en sortie.

On peut considérer 2 états initiaux :

- $e(t=0) = 0$ puis $e(t)$ ↗ comme $s(t)$ jusqu'à saturation et établissement des basculements avec $s = \pm V_{SAT}$
- on peut partir directement du régime "établi" où $s = \pm V_{SAT}$

On considéra ici le régime "établi" avec bascule entre $-V_{SAT}$ et $+V_{SAT}$ pour $s(t)$ en $t = 0^-$ et $t = 0^+$ respectivement.



Zoom sur les CI

Continuité en $t = 0$ de la tension aux bornes du condensateur

$e(t=0^-) = e(t=0^+) = V_-$!

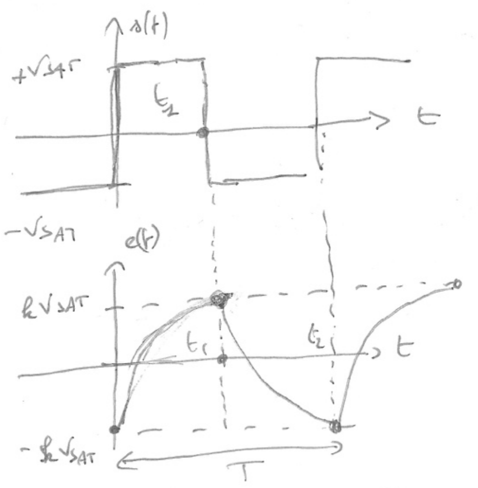
et $\begin{cases} V_+(0^-) = -k V_{SAT} \\ V_-(0^+) = k V_{SAT} \end{cases}$

Juste avant le basculement $\varepsilon = 0$ est vérifiée en $t = 0^-$

soit $\varepsilon(0^-) = 0$ ⇒ $V_+(0^-) = V_-(0^-) = V_-(0^+)$

donc $\boxed{e(0^+) = -k V_{SAT}}$

4 –
5 –



$\Rightarrow$ construire les évolut au fur et à ~~mesure~~ mesure de la résolut !

En $t = 0^+$ → <u>saturat° hte</u> avec <u>CI</u> → $e(0^+) = -k V_{SAT}$

$\tau \frac{de}{dt} + e = V_{SAT} \Rightarrow e(t) = A e^{-t/\tau} + V_{SAT}$

<u>CI</u> pour déterminer $A \Rightarrow -k V_{SAT} = A + V_{SAT}$

$A = -V_{SAT}(1+k)$

$$e(t) = V_{SAT}\left(1 - (1+k)e^{-t/\tau}\right) \rightarrow \text{évolut° expo}$$

La sortie bascule en t_1 qd $\varepsilon = 0 \Rightarrow e(t_1) = k V_{SAT}$

soit $\cancel{V_{SAT}}\left(1 - (1+k)e^{-t_1/\tau}\right) = k \cancel{V_{SAT}}$

$e^{-t_1/\tau} = \frac{1-k}{1+k}$

$$\boxed{t_1 = \tau \ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right)}$$

Ensuite en saturat° basse → il y a ↓ de $e(t)$ et basculent pour t_2 de manière "symétrique" (on peut conduire les calculs à nouveau etc...)

$$\boxed{T = 2t_1 = 2\tau \ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right)}$$

6 – Dans le cas $k \ll 1$ → $\frac{1+k}{1-k} \underset{\substack{DL\\1^{er}\text{ ordre}}}{\simeq} 1 + 2k$

$T \simeq 2\tau \ln(1+2k) \underset{DL}{\simeq} 4k\tau$

On ~~retouve~~ retrouve la période de l'oscillateur de relaxat° avec intégrateur pur du cours !

En effet pour T/τ = 4k << 1 (soit ωτ >> 1), les signaux exponentiels sont assimilables à leurs dérivées à l'origine soit des droites -> le signal e(t) devient triangulaire selon cette approximation, le pseudo-intégrateur est assimilable à l'intégrateur pur. Pour saturation haute, par exemple :

$\tau\frac{de}{dt} + e \approx \tau\frac{de}{dt} = V_{SAT}$ car en ODG -> $\tau\frac{de}{dt} = \tau\frac{e}{T} \gg e$ car τ/T << 1

On retrouve bien l'intégrateur pur !

<u>Ex 2</u> : <u>Générateur de signaux commandés en tension</u>

1 – . <u>Div. de tension</u> $(i^+ = 0) \Rightarrow \boxed{V_+ = \frac{R_2}{R_1+R_2} v_s}$ et $\boxed{v_s - v_e = R i}$

avec $v_e = V_- = V_+$ en régime linéaire

Donc pour <u>le montage à ALI de droite</u> (en régime linéaire) : $\boxed{v_e = \frac{R_2}{R_1+R_2} v_s}$

. <u>Pour le montage</u> ⊗ $\Rightarrow s = k x y = k e y = k e v_e$

avec courant d'entrée nul dans ⊗ $\Rightarrow i = C_0 \frac{d(v_e - s)}{dt}$

donc $\boxed{i = C_0 \frac{d(v_e - k e v_e)}{dt}}$

D'où $\frac{(v_s - v_e)}{R} = C_0 \frac{d(v_e - k e v_e)}{dt} = C_0 (1 - k e) \frac{dv_e}{dt}$

$R C_0 (1 - k e) \frac{dv_e}{dt} + \left(\cancel{1} - \left(\cancel{1} + \frac{R_1}{R_2}\right)\right) v_e = 0$

$$\boxed{\frac{R R_2}{R_1} C_0 (k e - 1) \frac{dv_e}{dt} + v_e = 0}$$

Pour $k_e < 1$ ⇒ les coef. et de signes ≠ → syst. instable

2 – Le régime est donc un régime de saturat° → comparateur à hystérésis !

• en saturat° hte ⇒ $v_s = +V_{SAT}$ et $\varepsilon > 0$

– montage ⊗ → $i = C_0 \dfrac{dv_e}{dt}$

– ALI → $v_s - v_e = Ri = RC_0 \dfrac{dv_e}{dt}$ ($v_s = V_{SAT}$)

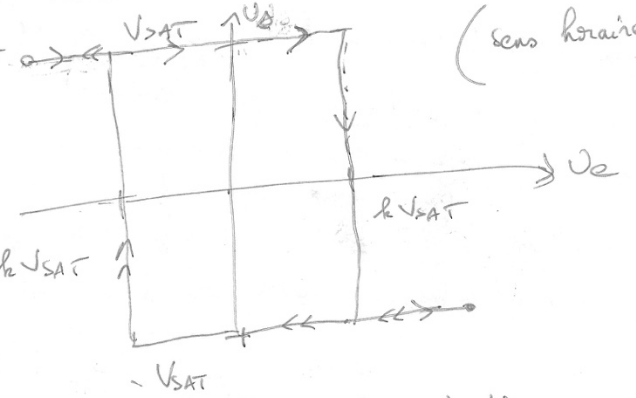
$\varepsilon = V_+ - V_- = \dfrac{R_2}{R_1+R_2} V_{SAT} - v_e > 0$

$\boxed{v_e < +kV_{SAT}}$ avec $k = \dfrac{R_2}{R_1+R_2}$

• en saturat° basse ⇒ $v_s = -V_{SAT}$ et $\varepsilon < 0$

$\boxed{v_e > -kV_{SAT}}$

Caractéristique →



(sens horaire)

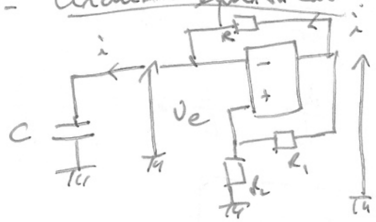
3 – En régime linéaire, $i = C_0(1-k_e)\dfrac{dv_e}{dt}$

équivalent à un condensateur de capacité $\boxed{C_0(1-k_e)} = C$

avec $C_0(1-k_e) > 0$ ⇒ $\boxed{e < e_{max} = 1/k}$

(capacité positive)

4 – Circuit équivalent :



→ on retrouve le fonnem^t de l'ex 1) du multivibrateur astable

avec $T = 2RC\ln\left(\dfrac{1+k}{1-k}\right)$

$$\boxed{T = 2RC\ln\left(1+\frac{2R_2}{R_1}\right)}$$

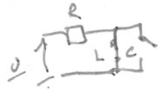
AN :

e (V)	0	5	−5
T (ms)	1,1	0,11	2,1

→ oscillateur de période commandée en tension

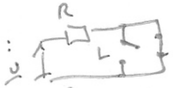
Ex 3 : Oscillateur à cellule LC

1. BF



Filtre passe-bande avec $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$

HF :



(en effet $\underline{Y}_{eq} = jC\omega_0 + \dfrac{1}{jL\omega_0} = 0 \to \underline{Z}_{eq} \to \infty$ donc $\underline{u} = \underline{s}$!)

Opérateur linéaire car 1er étage linéaire et filtre linéaire ensuite !

2 – En notat° complexe → pont div. de tension

$\dfrac{\underline{s}}{\underline{u}} = \dfrac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq}+R} = \dfrac{1}{1+R\underline{Y}_{eq}}$ avec $\underline{Y}_{eq} = jC\omega + \dfrac{1}{jL\omega} = \dfrac{1-LC\omega^2}{jL\omega}$

$\dfrac{\underline{s}}{\underline{u}} = \dfrac{1}{1+R\dfrac{(1-LC\omega^2)}{jL\omega}} = \dfrac{jL\omega}{R+jL\omega-RLC\omega^2}$

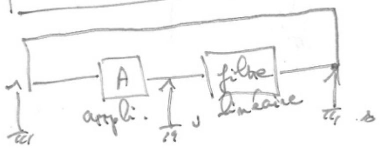
$\underline{s}\left(R + jL\omega + R(j\omega)^2 LC\right) = jL\omega\,\underline{u}$ ↓ ÷ L

$\underline{s}\left(\dfrac{R}{L} + j\omega + (j\omega)^2 RC\right) = j\omega\,\underline{u}$

$$RC \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} + \frac{R}{L} s = \frac{dv}{dt}$$

avec $v = K e$ ⇒ $$\boxed{RC \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} + \frac{R}{L} s = K \frac{de}{dt}}$$

3 – Syst. bouclé



avec $s = e$

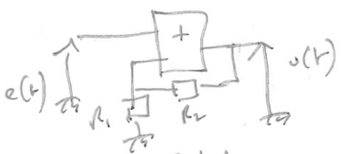
↳ $$\boxed{RC \frac{d^2s}{dt^2} + (1-K) \frac{ds}{dt} + \frac{R}{L} s = 0}$$

stabilité dépend de K ! liée à l'amortissement du système

- $K < 1$ syst. stable (amorti)
- $K = 1$ limite de stabilité ⇒ amortissement disparait soit oscillateur harmonique
- $K > 1$ → démarrage des oscillat° avec amplificat° jusqu'à apparit° de non-linéarités ↳ oscillateur souhaité

4 – $K > 1$ voulu ⇒ amplificateur non-inverseur

ex :

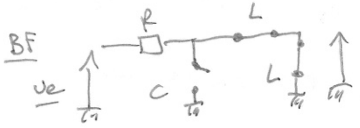


5 – Limitat° par saturat° de l'ALI.

Ex 4 : Oscillateur de Hartley

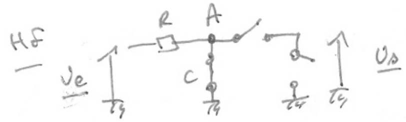
Étude du filtre

1 – BF



$v_s = 0$

HF



$V_A = 0$ comme $i_+ = 0$

div. de tension $v_s = \frac{Z_L}{Z_L + Z_L} V_A$

$v_s = \frac{V_A}{2} = 0$!

Filtre passe-bande

2 – $\underline{H}_{BF} \simeq \frac{1}{2Q} j\frac{\omega}{\omega_0}$ → $|\underline{H}_{BF}| = \frac{1}{2Q} \frac{\omega}{\omega_0}$

$G_{BF} = 20 \lg \frac{1}{2Q} + 20 \lg \frac{\omega}{\omega_0}$ → pente + 20 dB/déc

→ asymptote en ω/ω_0 ⇒ $G_{BF}(\omega_0) = 20 \lg \frac{1}{2Q}$ −20 dB/déc

$\underline{H}_{HF} \simeq \frac{1}{2} \frac{1}{jQ\,\omega/\omega_0}$ → $G_{HF} = 20 \log \frac{1}{2Q} - 20 \lg \frac{\omega}{\omega_0}$

$G_{HF}(\omega_0) = 20 \lg \frac{1}{2Q}$

donc pentes compatibles ± 20 dB/déc par lecture graphique

et $G(\omega_0) = 20 \log \frac{1}{2} = -6{,}02$ dB ! accord !

Compare $20 \lg \frac{1}{2Q} = -12{,}04$ ⇒ $\boxed{Q = 2}$
⇒ des asympt.

Étude de l'oscillateur

3 – Pour la chaîne retour ⇒ ampli non-inverseur

$V_+ = v_s = V_- = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right) v_s'$ ⇒ $v_s' = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_s$

$v_s' = v_e$ ⇒ $$\boxed{v_e = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_s}$$

et $\underline{v_s} = \underline{H}\,\underline{v_e}$

$\Rightarrow \underline{v_e} = \left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\underline{H}\,\underline{v_e} \Rightarrow \underline{v_e}\left(\underbrace{1-\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\underline{H}}_{0}\right)=0$

$\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\underline{H} = 1$ → condit° de Barkhausen

- accord de phase $\Rightarrow \arg(\underline{H}) = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0$
- accord de gain $\Rightarrow |\underline{H}(\omega_0)| = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{1}{2} = 1$

$1 + \frac{R_2}{R_1} = 2 \Rightarrow \boxed{R_2 = R_1}$ (en pratique $R_2 \gtrsim R_1$ pour assurer l'installat° des oscillat°)

4- $2\underline{v_s}\left[1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] = \underline{v_e} = \underline{v_s}' = \left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\underline{v_s}$

↳ $\times j\omega\omega_0$

$2\underline{v_s}\left[\omega_0^2 + j\omega\omega_0 + Q(j\omega)^2\right] = j\omega\omega_0\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\underline{v_s}$

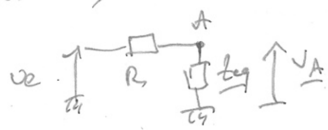
$$\boxed{2Q\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0\left(2-\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\right)\frac{ds}{dt} + 2\omega_0^2 s = 0}$$

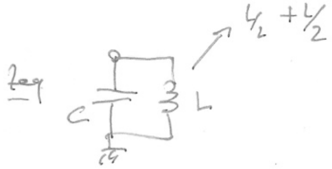
Oscillat° harmonique pour $R_2 = R_1$ m^ condit°

il faut $R_2 > R_1$ pour avoir croissance des oscillat° (syst. instable avec coef ⊖)

Fonction de transfert du filtre :

Pt diviseur $\Rightarrow \underline{v_s} = \frac{\underline{V_A}}{2}$

Puis 



$\underline{Z_{eq}} = \frac{\underline{Z_C}\,\underline{Z_L}}{\underline{Z_C}+\underline{Z_L}} = \frac{\cancel{j}L\omega/\cancel{j}C\omega}{\frac{1}{jC\omega}+jL\omega} = \frac{L}{\cancel{C}} \times \frac{j\cancel{C}\omega}{1-LC\omega^2}$

$= \frac{jL\omega}{1-LC\omega^2}$

$2\underline{v_s}$
↓
$\underline{V_A} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{\underline{Z_{eq}}+R}\,\underline{v_e} = \frac{1}{1+R\underline{Y_{eq}}}\,\underline{v_e}$

$2\underline{v_s} = \frac{1}{1+\frac{R(1-LC\omega^2)}{jL\omega}}\,\underline{v_e} = \frac{\underline{v_e}}{1+j\left(RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right)}$

$\underline{H} = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$

Par identificat° $\frac{Q}{\omega_0} = RC$ et $Q\omega_0 = \frac{R}{L}$

donc $\boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \text{ et } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}}$

Ex 5 : Oscillateur à résistance négative

4. Condensateurs en parallèles : $C_{eq} = C_b + C_s$.

5. D'après la loi des nœuds, la somme des courants « descendants », qui traversent les dipôles LR, C_b, C_s et $-R_n$, est nulle :

$$\frac{U}{R+Lp} + C_b p U + C_s p U + \frac{U}{-R_n} = 0 \quad \Rightarrow \quad (R_n + R_n C_{eq} p (Lp + R_b) - (Lp + R_b))U = 0.$$

Puis on ordonne et on divise par R_n :

$$\left(LC_{eq}p^2 + \left(R_b C_{eq} - \frac{L}{R_n}\right)p + \left(1 - \frac{R_b}{R_n}\right)\right)U = 0,$$

d'où :

$$LC_{eq}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}t^2} + \left(R_b C_{eq} - \frac{L}{R_n}\right)\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \left(1 - \frac{R_b}{R_n}\right)U = 0.$$

On identifie : $a = LC_{eq}$, $b = R_b C_{eq} - \dfrac{L}{R_n}$ et $c = \dfrac{R_b}{R_n}$.

6. Solutions harmoniques si $b = 0$ c'est-à-dire : $R_b C_{eq} = \dfrac{L}{R_n}$, soit $R_n = R_b Q^2$.

7. La condition précédente est nécessaire mais pas suffisante. Il faut aussi $1 - c > 0$ pour obtenir l'équation d'un oscillateur : $c < 1$, donc $R_b < R_n$, soit $Q^2 > 1$; ou $Q > 1 = Q_{lim}$.

8. Avec $b = 0$, $LC_{eq}\dfrac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}t^2} + \left(1 - \dfrac{1}{Q^2}\right)U = 0$, ou $\dfrac{LC_{eq}}{1 - \frac{1}{Q^2}}\dfrac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}t^2} + U = 0$. On a donc immédiatement l'équation d'un oscillateur de fréquence $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{1 - \frac{1}{Q^2}}{LC_{eq}}}$.

9. L'erreur relative sur f est, avec $Q = 8$:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC_{eq}}} - \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{Q^2}}{LC_{eq}}}}{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{Q^2}}{LC_{eq}}}} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}} = 7{,}9.10^{-3} = 0{,}79\,\% < 1\,\%$$

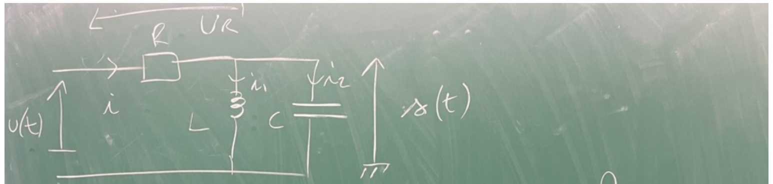
10. $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{1}{L(C_b + C_s)}} \quad \Rightarrow \quad C_s = 57\ \mathrm{nF}$ et $Q = \dfrac{1}{R_b}\sqrt{\dfrac{L}{C_b + C_s}} = 67 > Q_{lim}$.

11. Le montage doit être légèrement instable : $b < 0$, soit $R_b < R_n Q^2$.

12. L'amplitude des oscillations sur V est limitée par la tension V_0. En effet, la modélisation n'est valable que dans la zone de résistance négative. Celle sur V_S est limitée par V_{sat}.

Complément de correction ex 3 :

2. Obtention de l'équation différentielle dans le domaine temporel



2- Résolut° ds le domaine temporel

LDM ⇒ $u(t) = U_R + s(t)$

$u(t) = Ri + s(t)$

LDN

LDF ⇒ $i_2 = C\dfrac{ds}{dt}$ et $i = i_1 + i_2$

$u_L = s = L\dfrac{di_1}{dt}$

$u = Ri_1 + Ri_2 + s$

Rqe) On peut identifier Q et ω_0 du filtre

$$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Et $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$

$u = Ri_1 + RC\dfrac{ds}{dt} + s$

dérive

$$\frac{du}{dt} = \frac{R}{L}s + RC\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt}$$

$$\boxed{RC\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} + \frac{R}{L}s = \frac{du}{dt}}$$