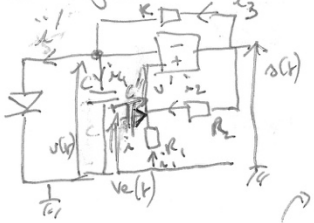
Sujet 1 : Montage monostable et convertisseur tension/fréq.

CCINP

1 - Montage monostable

a)



$\left| \begin{array}{l} i_+ = i_- = 0 \quad \text{(ALI idéal)} \\ \varepsilon = V_+ - V_- \end{array} \right.$

LDN en V_+ $\Rightarrow$ $i + i_3 + i_2 = 0$

$C' \dfrac{d(V_e - V_+)}{dt} - \dfrac{V_+}{R_1} + \dfrac{s - V_+}{R_2} = 0$

$\curvearrowright \dfrac{dV_e}{dt} = 0$

avec $V_e = 0$ depuis longtemps $\quad C' \dfrac{dV_+}{dt} + \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right) V_+ = \dfrac{s}{R_2}$

Si la diode est passante $\Rightarrow$ $V_- = 0$ et $i' > 0$

avec $s(t) = +V_{SAT}$ et $i' = \dfrac{s - V_-}{R} = \dfrac{V_{SAT}}{R} > 0$ est respectée

car (diode passante impose $i_4 = 0$ # le courant passe dans la diode (équivalente à un fil) $\hookrightarrow$ court-circuit)

donc $\varepsilon = V_+$

et $\boxed{\dfrac{d\varepsilon}{dt} + \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C'} \varepsilon = \dfrac{+V_{SAT}}{R_2 C}}$

$\varepsilon \downarrow$ et $\varepsilon(t \to +\infty) \to \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} V_{SAT}$ donc ε demeure > 0

$\Rightarrow$ l'état est stable

Donc si saturé haut $\Rightarrow$ $s = +V_{SAT}$ $\Rightarrow i' > 0$ $\Rightarrow$ diode passante et super-stable

Rep) Si la diode est bloquée

$V_- = v(t) < 0$ et avec $s = +V_{SAT}$ $\quad \left| \begin{array}{l} i_4 = i_3 \text{ car } i' = 0 \text{ (diode bloquée)} \\ C \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{s - v}{R} \end{array} \right.$

donc $\boxed{\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{v}{RC} = \dfrac{+V_{SAT}}{RC}}$

$v(t \to +\infty) = V_{SAT}$

La condition ne sera plus respectée (à cause de la charge de C)

et $\varepsilon = V_+ - V_- = V_+ - v$ $\Rightarrow V_+ = \varepsilon + v$

$\boxed{C' \dfrac{d(v+\varepsilon)}{dt} + \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} (v + \varepsilon) = \dfrac{+V_{SAT}}{R_2}}$

$\dfrac{d\varepsilon}{dt} + \dfrac{dv}{dt} + \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} (\varepsilon + v) = + \dfrac{V_{SAT}}{R_2 C'}$

$\varepsilon(t \to +\infty) + v(t \to +\infty) = + \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} V_{SAT}$

$\varepsilon(t \to +\infty) = + \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} V_{SAT} - V_{SAT}$

$\boxed{\varepsilon(t \to +\infty) = - \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} V_{SAT}}$ la condition $\varepsilon > 0$ ne sera + respectée $\Rightarrow$ état instable

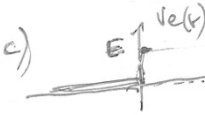
b) Diode passante $\Rightarrow$ $\boxed{v(t) = 0}$ $(\forall t)$ aux bornes de C

$\Rightarrow \varepsilon(t \to +\infty) = V_+ = v' - V_e(t \to +\infty)$ (= 0)

$= v'$

Donc $\boxed{v'(t \to +\infty) = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} V_{SAT}}$ $\Rightarrow$ aux bornes de C'

c)



$\Rightarrow$ blocage diode

$\Rightarrow$ basculement à $-V_{SAT}$

i) Etat de saturé haut initial $\Rightarrow$ $V_+(0^-) = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} V_{SAT}$

avec diode passante en $t = 0^-$

- $V_-(0^-) = 0 = V_-(0^+)$ car continuité en C

- Continuité en C' $\quad v_C'(0^+) = v_C'(0^-)$

donc $V_+(0^+) - V_e(0^+) = V_+(0^-) - V_e(0^-)$

$V_+(0^+) - E = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} V_{SAT} - 0$

Condition $\Rightarrow \varepsilon(0^+) < 0 \Rightarrow V_+(0^+) - V_-(0^+) < 0$

donc $V_+(0^+) < 0$

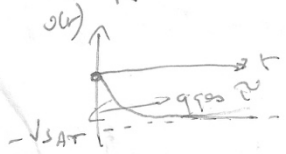
$V^+(0^+) = \frac{R_1}{R_1+R_2} V_{SAT} + E < 0$

donc $\boxed{E < -\frac{R_1}{R_1+R_2} V_{SAT}}$

ii) Diode bloquée $i' = 0$ et la saturation est basse $s = -V_{SAT}$

donc $i_4 = i_3 \Rightarrow C \frac{dv}{dt} = \frac{s - v}{R} = -\frac{V_{SAT} - v}{R}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = -\frac{V_{SAT}}{RC}}$



Pour $\tau = RC$

$v(t) = Ae^{-t/\tau} - V_{SAT}$

CI : $v(t=0^+) = 0$ par continuité

$0 = A - V_{SAT}$

$\hookrightarrow A = V_{SAT}$

$\boxed{v(t) = V_{SAT}\left(e^{-t/\tau} - 1\right)}$

Effectivement $(\forall t)\ v(t) < 0 \rightarrow$ la diode est bloquée

iii) Pour $t > 0 \Rightarrow \frac{dV_e}{dt} = 0 \quad (V_e = E)$

et $C' \frac{dV_+}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) V_+ = -\frac{V_{SAT}}{R_2}$

avec $v' = V_+ - V_e = V_+ - E \quad \Rightarrow V_+ = v' + E$

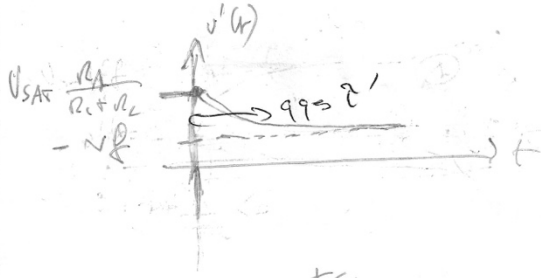
$\hookrightarrow C' \frac{dv'}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)(v' + E) = -\frac{V_{SAT}}{R_2}$

$\frac{dv'}{dt} + \frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 C'} v' = -\left(\frac{V_{SAT}}{R_2 C'} + \frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 C'} E\right)$

$\frac{dv'}{dt} + \frac{v'}{\tau'} = -\left(\frac{V_{SAT}}{R_2 C'} + \frac{E}{\tau'}\right)$

$\frac{dv'}{dt} + \frac{v'}{\tau'} = -\frac{1}{\tau'}\left(E + V_{SAT}\frac{R_2}{R_1+R_2}\right) = -\frac{1}{\tau'} V_f$

avec $v'(t=0^+) = \frac{R_1}{R_1+R_2} V_{SAT} \quad \left(= v'(t=0^-)\right)$



avec $\boxed{V_f = E + V_{SAT}\frac{R_1}{R_1+R_2}}$

et $V_f < 0$!

$v'(t) = Ae^{-t/\tau'} - V_f$

CI : $v'(t=0) = \frac{R_1}{R_1+R_2} V_{SAT} = A - V_f$

$\Rightarrow A = \frac{R_1}{R_1+R_2} V_{SAT} + V_f$

$= \frac{2R_1}{R_1+R_2} V_{SAT} + E$

$\boxed{v'(t) = V_f\left(e^{-t/\tau'} - 1\right) + \frac{R_1}{R_1+R_2} V_{SAT} e^{-t/\tau'}}$

ou $\boxed{v'(t) = e^{-t/\tau'}\left(\frac{R_1}{R_1+R_2} V_{SAT} + V_f\right) - V_f}$

iv) $\tau' \ll \tau$ $\Rightarrow$ $v'(t)$ atteint très vite sa valeur finale

$v' = v_f = E + V_{SAT} \frac{R_1}{R_1+R_2}$ $\qquad v' = V_+ - E$

$V_+ = v' + E$

donc très vite $\Rightarrow$ $V_+ \to V_{SAT} \frac{R_1}{R_1+R_2} + 2E = cte$

$\varepsilon = V_+ - V_- = V_+ - v(t_{basc})$

V_+ cste $\hookrightarrow$ $\varepsilon \nearrow$ au cours du temps car $v(t) \downarrow$

$\varepsilon = 0 \Rightarrow V_{SAT}\left(e^{-\frac{t_{basc}}{\tau}} - 1\right) = V_{SAT} \frac{R_1}{R_1+R_2} + 2E$

$e^{-\frac{t_{basc}}{\tau}} - 1 = \left(\frac{R_1}{R_1+R_2} + 2\frac{E}{V_{SAT}}\right)$

$$t_{basc} = -\tau \ln\left[\left(\frac{R_1}{R_1+R_2} + \frac{2E}{V_{SAT}}\right) - 1\right]$$

$\swarrow$ l'état de saturat basse n'est pas stable.

Rq) Il faut $V_{SAT} \frac{R_1}{R_1+R_2} + 2E < 0$!

ce qui fonctionne avec $E < -\frac{R_1 V_{SAT}}{R_1+R_2}$

2. Circuit de mise en forme

4.4 Circuit d'alimentation d'un télémètre

1. $E = V_{sat} \approx 15$ V.

2. La loi des nœuds implique, avec $i^+ = 0$:

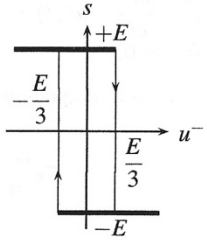
$$\frac{-E-u^+}{R}+\frac{e-u^+}{R}=\frac{u^+-s}{R}+i^+ \quad \Rightarrow \quad u^+=\frac{e+s-E}{3}.$$

3. La loi des nœuds implique, avec $i^- = 0$:

$$\frac{0-U^-}{2R}+Cp\left(0-U^-\right)=I^-+\frac{U^--S}{R} \quad \Rightarrow \quad U^-=\frac{2S}{3+2RCp}.$$

En notation temporelle, $2RC\dfrac{\mathrm{d}u^-}{\mathrm{d}t}+3u^-=2s$, qui devient en régime établi indépendant du temps, où $\dfrac{\mathrm{d}u^-}{\mathrm{d}t}=0$: $u^-=\dfrac{2}{3}s$. Ainsi $\varepsilon = u^+-u^-=-\dfrac{s+2E}{3}$. Attendu que $s=\pm E$, $\varepsilon<0$ quelque soit la valeur de s donc : $s=-E$.

4. **a.** En régime établi indépendant du temps où $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=0$, $u^+=\dfrac{s}{3}$ et $u^-=\dfrac{2}{3}s$. Ainsi $\varepsilon = -\dfrac{s}{3}$. Si $s=+E$ alors $\varepsilon<0$ et la sortie bascule à $s=-E$. Mais alors $\varepsilon>0$ et on rebascule. s n'a pas de valeur fixe, on a un oscillateur astable.



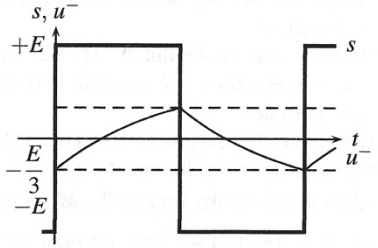
b. Déjà vu : $\tau_a\dfrac{\mathrm{d}u^-}{\mathrm{d}t}+u^-=\dfrac{2}{3}s$.

c. $\varepsilon = u^+-u^-=\dfrac{s}{3}-u^-$ avec $s=\pm E$. Le montage commute quand $\varepsilon=0$, soit $u^-=\pm\dfrac{E}{3}$:

d. Les valeurs de $s(t)$ et de $u^-(t)$ montrent que $t=0$ correspond à une commutaion de $-E$ à $+E$.

Avec $s=+E$, $u^-(t)=\mu\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)+\dfrac{2}{3}E$. Attendu que $u^-(0)=-\dfrac{E}{3}$, on obtient $u^-(t)=E\left(\dfrac{2}{3}-\exp\left(-\dfrac{t}{\tau_a}\right)\right)$. Cette solution reste valable tant que s reste à $+E$, c'est-à-dire tant qu'on ne commute pas en passant par $u^-=\dfrac{E}{3}$. u^- augmente donc jusqu'à $E/3$, moment où le montage commute : s passe à $-E$ et u^- décroît jusqu'à $-E/3$ où l'on commute et ainsi de suite.

e. Formes d'onde classiques d'un oscillateur à relaxation : s en gras, u^- en trait plus fin.



f. La demi-période est telle que :

$$u^-\left(\frac{T}{2}\right)=\frac{E}{3}=E\left(\frac{2}{3}-\exp\left(-\frac{T_1}{2\tau_a}\right)\right),$$

donc $T_1=2\tau_a\ln 3$.

5. Attendu que $I^+=0$, on reconnaît un diviseur de tension.

$$U^+=\frac{R}{3R+\frac{1}{C'p}}E=\frac{RC'p}{1+3RC'p}E \quad \Rightarrow \quad 3RC'\frac{\mathrm{d}u^+}{\mathrm{d}t}+u^+(t)=RC'\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}.$$

En régime établi indépendant du temps $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=0$, donc $u^+=0$. Alors $\varepsilon=u^+-u^-=-\dfrac{E}{3}<0$ et finalement $s=-E$.

6. Déjà vu : $\tau_m\dfrac{\mathrm{d}u^+}{\mathrm{d}t}+u^+(t)=\dfrac{\tau_m}{3}\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$.

7. La tension aux bornes de C' est continue. Donc si $e(t)$ varie de $+2E$ en $t=0$, alors le potentiel v_M entre C' et $2R$ augmente lui aussi de $+2E$. Avec un diviseur de tension :

$$u^+(t)=\frac{R}{R+2R}v_M(t) \quad \Rightarrow \quad \Delta u^+=\frac{2}{3}E.$$

Autre méthode : on considère que c'est un essai indiciel. On pose $e'=e+E$, alors e' passe de 0 à $2E$. Puis, avec le théorème de la valeur initiale, pour un échelon de hauteur $2E$:

$$u^+\left(0^+\right)=\lim_{p\to\infty}pS(p)=\lim_{p\to\infty}pH(p)\frac{2E}{p}=\lim_{p\to\infty}p\frac{RC'p}{1+3RC'p}(p)\frac{2E}{p}=\frac{2}{3}E.$$

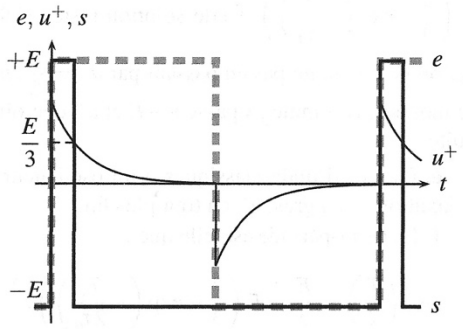
8. On précise dans la question précédente que le régime établi est atteint en $t=0$. $u^+\left(0^-\right)$ vaut donc la solution particulière (solution en régime permanent) de l'équation différentielle $\tau_m\dfrac{\mathrm{d}u^+}{\mathrm{d}t}+u^+(t)=\dfrac{\tau_m}{3}\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$ avec $e(t<0)=-E$. Cette solution est $u^+(t<0)=0$, donc $u^+\left(0^-\right)=0$.

9. Pour $t>0$, l'équation différentielle devient, avec $e(t>0)=+E$, c'est-à-dire $\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=0$:

$$\tau_m\frac{\mathrm{d}u^+}{\mathrm{d}t}+u^+(t)=0 \quad \Rightarrow \quad u^+(t)=\frac{2}{3}E\exp\left(-\frac{t}{\tau_m}\right).$$

10. $\varepsilon(t)=u^+(t)-u^-(t)=\dfrac{E}{3}\left(2\exp\left(-\dfrac{t}{\tau_m}\right)-1\right)$ donc, sur $t\in[0,\tau_m\ln 2]$, $\varepsilon>0$ et $s(t)=+E$; pour $t>\tau_m\ln 2$, $\varepsilon<0$ et $s(t)=-E$.

11. s est en trait gras noir, u^+ en traits noirs plus fin et e en tirets gris.



12. T_2 correspond à la durée pendant laquelle $\varepsilon>0$: $T_2=\tau_m\ln 2$.

13. Le premier M_1 délivre une tension $a(t)$ créneau.
Pendant une faible durée, M_2 délivre $b(t)=E$ et $b(t)=-E$ pendant le reste de la période.
Lorsque $b(t)=E$, alors le second M_1 oscille. $c(t)=-E$ lorsque $b(t)=-E$.
Ainsi le second M_1 impose T_3, M_2 impose T_2 et le premier M_1 impose T_1.

14. $T_1=2\tau_{a1}\ln 3=\dfrac{4}{3}RC_1\ln 3$ donc $C_1=41$ µF, $T_2=\tau_m\ln 2=3RC'\ln 2$ donc $C'=0,19$ µF et $T_3=2\tau_{a2}\ln 3=\dfrac{4}{3}RC_2\ln 3$ donc $C_2=17$ nF.

Enoncé équivalent avec autre correction

L'amplificateur utilisé est idéal et fonctionne en régime de saturation. Les tensions de saturation en sortie sont notées $+E$ et $-E$ $(E>0)$. On considère le montage de la figure 54.

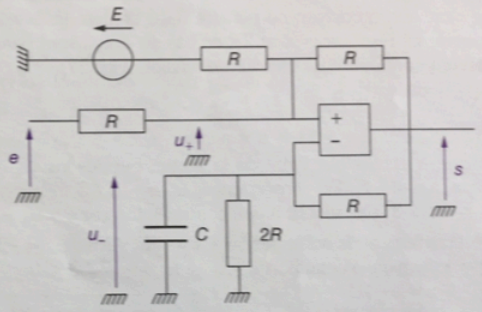


Figure 54

a) Déterminer la tension $u_+(t)$ en fonction de $e(t)$, $s(t)$ et E.

b) On suppose $e(t)=-E$. Montrer qu'en régime indépendant du temps, la tension de sortie $s(t)$ conserve toujours la même valeur qu'on déterminera.

c) On suppose désormais pour toute la suite $e(t)=+E$. Montrer que la tension de sortie $s(t)$ ne peut garder une valeur constante $(\pm E)$ en régime établi.

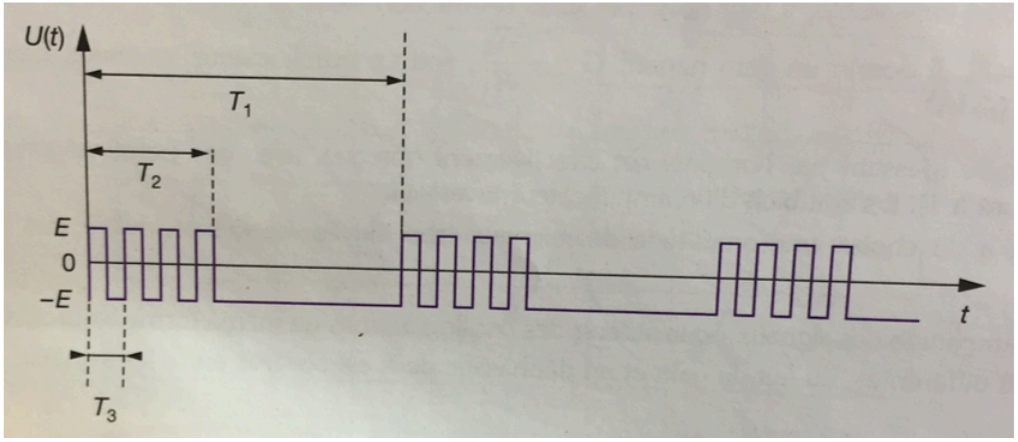
d) Déterminer l'équation différentielle liant $u(t)$ à $s(t)$. On posera $\tau_a = 2RC/3$.

e) On choisit l'origine des temps telle que $u_-(0)=-E/3$ et $s(0)=+E$. Résoudre l'équation différentielle et donner l'expression de $u_-(t)$ pour $u_-(t)<E/3$. Que se passe-t-il à l'instant où $u(t_0)=E/3$. Que se passe-t-il après ?

f) Tracer soigneusement pour une période du signal de sortie les graphes de $u_-(t)$ et $s(t)$.

g) En déduire la période T de $s(t)$ en fonction de τ_a.

h) Comment engendrer un signal tel que celui de la figure 55 ?



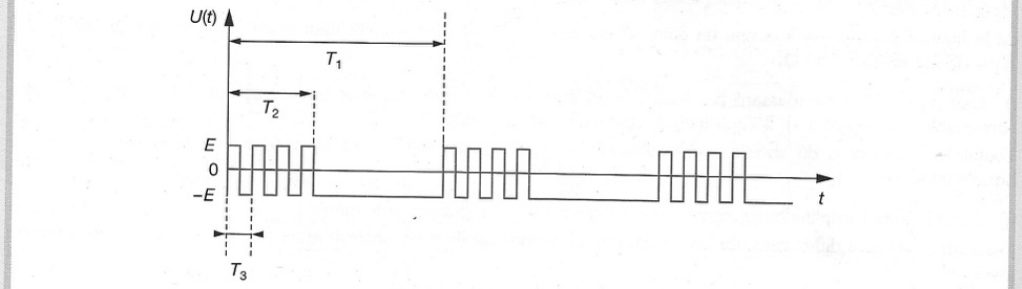


Figure 55

Conseils méthodologiques. L'étude de cet oscillateur fait appel au savoir-faire 5 (générateurs de signaux rectangulaires).

a) Appliquons le théorème de Millman à l'entrée non inverseuse (Fig. 56) :

$$u_+ = \frac{\dfrac{e}{R}+\dfrac{-E}{R}+\dfrac{s}{R}}{\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{R}} = \boxed{\frac{e-E+s}{3}}.$$

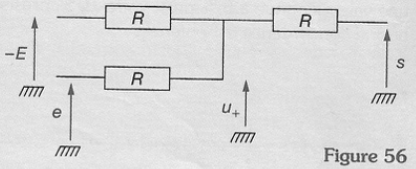


Figure 56

b) En régime établi, un condensateur est équivalent à un circuit ouvert. Comme de plus, aucun courant ne pénètre dans l'entrée inverseuse de l'amplificateur intégré, les résistances R et $2R$ du bas du circuit sont parcourues par le même courant et réalisent un diviseur de tension (Fig. 57) :

$$\frac{u_-}{s} = \frac{2R}{2R+R} = \frac{2}{3}.$$

Il reste à déterminer l'état de la sortie. Supposons $u_+ > u_-$. Alors la sortie sature à $s=+E$. En conséquence, $u_+ = -E/3$ (relation de la question **a)** et $u_- = 2E/3$. On aboutit à une contradiction car $\varepsilon = u_+ - u_- = -E < 0$.

Nécessairement, la sortie sature à $s=-E$. Ainsi, $u_+ = -E$ et $u_- = -2E/3$. On vérifie bien la condition $\varepsilon = u_+ - u_- = -E/3 < 0$.

En régime établi, s reste constamment égale à $-E$.

c) Le condensateur est toujours assimilable à un circuit ouvert en régime établi.

Supposons que s garde la valeur $+E$. Alors, $u_+ = E/3$ et $u_- = 2E/3$.

On évalue $\varepsilon = u_+ - u_- = -E/3 < 0$. Cela n'est pas cohérent.

Supposons que s garde la valeur $-E$. Alors, $u_+ = -E/3$ et $u_- = -2E/3$.

On évalue $\varepsilon = u_+ - u_- = E/3 > 0$. Cela n'est pas cohérent.

Le système ne peut pas garder une valeur constante en régime établi.

d) En régime temporel quelconque, on s'intéresse à la branche contenant le condensateur (Fig. 58).

Remarque

$\underline{Z}_C = 1/(jC\omega) \to \infty$ pour $\omega = 0$ (Fig. 56).

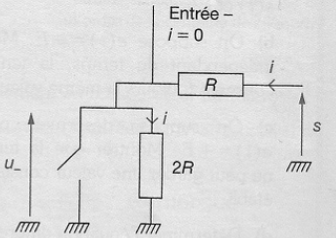


Figure 57

Remarque

On rappelle qu'aucune intensité ne rentre dans l'amplificateur intégré par l'entrée non inverseuse.

Alors, $i_1 = \dot{q}$ et :

$$u_- = \frac{q}{C} = 2R(i - i_1) \quad \text{et} \quad s = Ri + u_-.$$

On élimine i de la deuxième relation à l'aide de la première qui fournit :

$$i = i_1 + \frac{q}{2RC} = \dot{q} + \frac{q}{2RC} = C\dot{u}_- + \frac{u_-}{2R}.$$

On déduit alors :

$$s = RC\dot{u}_- + \frac{u_-}{2} + u_-.$$

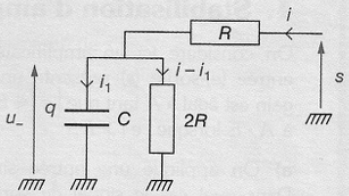


Figure 58

L'équation différentielle demandée est :

$$\boxed{\tau_a \dot{u}_- + u_- = \frac{2}{3}s}.$$

e) Tant que la sortie ne bascule pas, $s(t) = +E$. L'équation différentielle est alors :

$$\tau_1 \dot{u}_- + u_- = \frac{2}{3}E.$$

La solution est somme d'une solution particulière choisie constante $2E/3$ et de la solution générale $A\exp\left(-\frac{t}{\tau_a}\right)$.
La constante A est déterminée grâce à la condition initiale :

$$u_-(0) = -\frac{E}{3} = \frac{2}{3}E + A.$$

Au final :

$$\boxed{u_-(t) = \frac{E}{3}\left(2 - 3\exp\left(-\frac{t}{\tau_a}\right)\right)}.$$

Cette solution n'est valable que si $s = +E$, c'est-à-dire si :

$$\varepsilon = u_+ - u_- = \frac{E}{3} - u_-(t) \geqslant 0.$$

À l'instant t_0, ε s'annule et devient négative immédiatement après : la sortie s bascule de $+E$ à $-E$.
Après t_0, le fonctionnement est identique, à un changement de signe près.
La sortie est bloquée à $s = -E$ jusqu'à $2t_0$... En effet, à t_0, $u_-(t_0) = E/3$ (à comparer à $u(0) = -E/3$) pour une charge sous $s = -E$ (à comparer à $s = +E$).

f) Les évolutions des signaux sont tracées en figure 59.

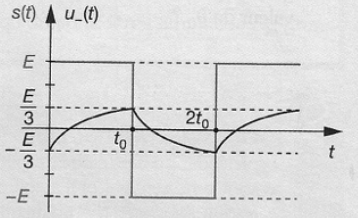


Figure 59

g) La période vaut $T = 2t_0$. Comme :

$$\frac{E}{3}\left(2 - 3\exp\left(-\frac{t_0}{\tau_a}\right)\right) = \frac{E}{3},$$

on obtient finalement :

$$\boxed{T = 2\tau_a \ln 3}.$$

h) Il suffit d'agir sur la tension de commande e. On impose $e = +E$ pendant T_2, puis $e = -E$ pendant $T_1 - T_2$ et on choisit $T_3 = 2\tau_a \ln 3$.