

## DS de Physique 9 octobre 2024

PSI - Lycée du Parc des Loges

Difficulté supérieure

Durée 4H

Calculatrices autorisées

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il aura été amené à prendre.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

### Partie 1 – Modélisation fréquentielle d'un circuit à amplificateur opérationnel (durée conseillée 2H)

Dans tout ce problème, les vecteurs sont surmontés d'un chapeau  $\hat{a}$  s'ils sont unitaires ou d'une flèche  $\vec{a}$  sinon. Les nombres complexes sont soulignés :  $z \in \mathbb{C}$ . On notera  $j^2 = -1$ .

Ce problème se propose tout d'abord d'étudier un circuit à amplificateur opérationnel et son application à l'étude d'une bobine à air, puis de fournir une interprétation du comportement fréquentiel de cette bobine. Plus précisément, il se compose deux parties très largement indépendantes : la première concerne l'existence et la stabilité des points de fonctionnement du circuit à amplificateur opérationnel, l'oscillation auto-entretenue du circuit, la modélisation électrocinétique de la bobine ;

Dans tout le problème, on suppose que la seule cause de fonctionnement en régime non-linéaire d'un amplificateur opérationnel est la saturation de sa tension de sortie : les tensions de saturation sont supposées opposées et notées  $V_{sat}$  et  $-V_{sat}$ .

On rappelle qu'un amplificateur opérationnel idéal est tel que les courants d'entrée  $i_+$  et  $i_-$  sont toujours nuls et que dans la zone de linéarité  $V_+ - V_- = 0$ .

### I.A. — Étude d'un dipôle

On considère le circuit de la figure 1 dans lequel l'amplificateur opérationnel est supposé idéal.

❑ 1 — Dans l'hypothèse d'un fonctionnement idéal de l'amplificateur opérationnel en régime linéaire, déterminer l'impédance d'entrée  $Z_e = V_e/I_e$  du circuit de la figure 1. Tracer la partie de la caractéristique  $V_e = f(I_e)$  en régime linéaire : on exprimera les limites du domaine de validité de  $V_e$  en fonction de  $V_{sat}$ ,  $R_2$  et  $R_3$

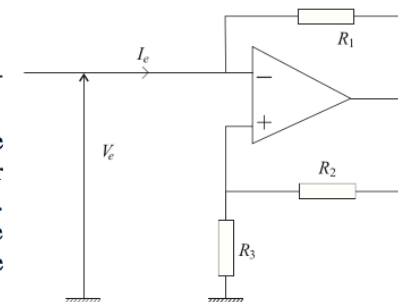


FIG. 1 – Montage à amplificateur

❑ 2 — Compléter la caractéristique  $V_e = f(I_e)$  du circuit de la figure 1 dans les régions qui correspondent à un fonctionnement non-linéaire de l'amplificateur opérationnel : on donnera les expressions  $V_e = f(I_e)$  correspondantes en justifiant précisément les domaines de  $V_e$  sur lesquels elles sont valides. On précisera les points remarquables.

### I.B. — Visualisation expérimentale de la caractéristique du dipôle

On considère à présent le montage de la figure 2. Ce dernier est celui de la figure 1 auquel on a rajouté une résistance  $R_g$  et un générateur de fonction idéal qui délivre une tension  $E(t)$ .

Lorsque la tension du générateur est continue  $E(t) = E_0 = \text{cste}$ , le couple  $(V_e, I_e)$  prend la valeur  $(V_{e0}, I_{e0})$ . Ce point de la caractéristique  $V_e = f(I_e)$  est appelé *point de fonctionnement* du circuit.

L'amplificateur opérationnel est encore supposé idéal.

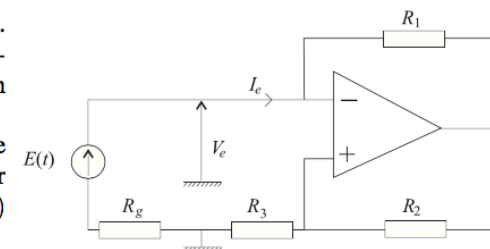


FIG. 2 – Montage avec entrée

❑ 3 — Indiquer comment le montage de la figure 2 permet une visualisation à l'oscilloscope de la caractéristique  $V_e = f(I_e)$  : on précisera les branchements à effectuer et les éventuelles précautions matérielles à prendre.

❑ 4 — Étudier en fonction de la valeur de  $R_g$ , les différentes possibilités pour le point de fonctionnement du circuit dans le cas  $E_0 = 0V$ .

### I.C. — Stabilité du point de fonctionnement

Lorsque l'on réalise expérimentalement le montage de la figure 2 avec  $E = 0V$  et  $R_g < R_1 R_3 / R_2$ , on constate que le point de fonctionnement du montage se trouve arbitrairement soit en un point  $M(I_{e01}, V_{e01})$  associé à un courant  $I_{e01}$  négatif, soit en un point  $P(I_{e02}, V_{e02})$  associé à un courant  $I_{e02}$  positif. Ces deux points sont distincts et présentent la propriété d'être symétriques l'un de l'autre par rapport à l'origine  $O$  du plan  $(I_e, V_e)$ .

❑ 5 — Dans quel régime se trouve l'amplificateur opérationnel si le point de fonctionnement du montage est situé en  $M$  ou en  $P$  ? On justifiera la réponse en précisant les coordonnées de ces points.

Pour expliquer que les seuls points de fonctionnement accessibles soient les points  $M$  ou  $P$  lorsque  $R_g < R_1 R_3 / R_2$  et  $E = 0V$ , on ne peut plus supposer que l'amplificateur opérationnel soit de gain infini. Dans le régime linéaire, on peut le modéliser comme indiqué sur la figure 3 : les courants d'entrée  $i_+$  et  $i_-$  sont toujours nuls, mais  $\varepsilon(t) = V_+ - V_- \neq 0$ . Dans ce régime et pour des signaux sinusoïdaux, on peut modéliser l'amplificateur opérationnel par une relation entre les représentations complexes de  $\varepsilon(t)$  et  $V_S(t)$  :

$$\underline{V_S}(j\omega) = \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \underline{\varepsilon}(j\omega)$$

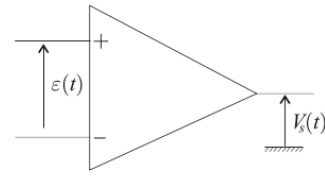


FIG. 3 – Amplificateur opérationnel réel

❑ 6 — Rappeler les ordres de grandeurs des constantes  $A_0$  et  $f_0 = \omega_0/2\pi$  pour un amplificateur opérationnel usuel. En utilisant la modélisation de l'amplificateur opérationnel définie par la figure 3, établir l'équation différentielle vérifiée en régime linéaire par le courant  $I_e(t)$  du montage de la figure 2 dans le cas où  $E(t) = 0V$ . On utilisera les paramètres  $A_0$ ,  $\omega_0$ ,  $R_g$ ,  $R_1$  et  $A = R_3/(R_2 + R_3)$ .

❑ 7 — En prenant en compte le fait que  $AA_0 \gg 1$ , montrer que, l'équation différentielle de la question 6 permet de justifier l'observation expérimentale relative aux points de fonctionnement. Expliquer qualitativement, comment s'établit le basculement vers  $M$  ou  $P$ .

#### I.D. — Réalisation d'un oscillateur

L'amplificateur opérationnel est à nouveau supposé idéal. On adjoint maintenant au circuit de la figure 1 une résistance  $R$ , un condensateur  $C$  et une bobine idéale d'inductance  $L$  pour obtenir le montage de la figure 4.

❑ 8 — Écrire l'équation différentielle régissant le courant  $I_e$  traversant la résistance  $R$  en supposant que le circuit de la figure 1 soit modélisable en première approximation par un dipôle d'impédance  $Z_e$  calculée à la question 1.

❑ 9 — À quelle condition le montage de la figure 4 est-il le siège d'une oscillation purement sinusoïdale ? Que vaut alors la fréquence  $f_c$  d'oscillation ? La condition précédente n'étant jamais rigoureusement réalisable expérimentalement, indiquer à quelle condition on constate effectivement le démarrage d'une oscillation.

❑ 10 — En fait, la bobine présente dans le montage de la figure 4 est une bobine à air de résistance  $r_b$  et d'inductance  $L$ . Quelle est l'origine physique du terme de résistance  $r_b$  ?

On constate expérimentalement que la valeur de la résistance  $r_b$  de la bobine à air dépend de la pulsation  $\omega$  du courant sinusoïdal qui la parcourt. Dans un domaine de basse et moyenne pulsation, la dépendance fréquentielle de  $r_b$  s'écrit :

$$r_b(\omega) = r_0 (1 + \alpha \omega^2) \quad (1)$$

Typiquement, pour une bobine à air d'inductance égale à 100 mH comprenant 1000 spires réparties sur plusieurs couches, la loi précédente est très bien vérifiée pour  $\omega < 2,00 \times 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$  ; on trouve expérimentalement  $r_0 = 92,0 \Omega$  et  $\alpha = 5,00 \times 10^{-10} \text{ s}^2$ .

❑ 11 — Comment pourrait-on, à l'aide du montage de la figure 4, valider la dépendance quadratique en la pulsation de  $r_b(\omega)$  ? On décrira avec soin le protocole expérimental proposé. Estimer la variation relative de la résistance  $r_b$  de la bobine à air précédente composée de 1000 spires pour des pulsations variant de 0 à  $2,00 \times 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$ .

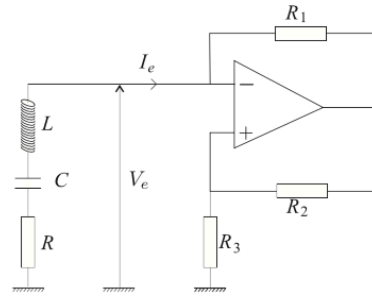


FIG. 4 – Oscillateur à amplificateur opérationnel

#### I.E. — Modélisation électrocinétique de la bobine

On souhaite traduire le comportement fréquentiel de la bobine de la figure 4 par la modélisation électrocinétique de la figure 5. On fixe  $r_0 = 92,0 \Omega$ ,  $L = 100 \text{ mH}$ , le paramètre de cette modélisation étant l'expression et la valeur de la résistance  $R_p$ .

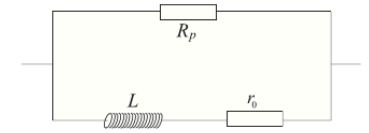


FIG. 5 – Bobine réelle

❑ 12 — Montrer que, sous les hypothèses  $r_0 \ll R_p$  et  $L^2 \omega^2 \ll R_p^2$ , la loi expérimentale de l'équation (1) est compatible avec l'impédance complexe  $\underline{Z}(\omega)$  du dipôle de la figure 5. On exprimera  $R_p$  en fonction de  $\alpha$ ,  $r_0$  et  $L$  et on calculera sa valeur numérique. Vérifier a posteriori les hypothèses de calcul pour des pulsations variant de 0 à  $2,00 \times 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$ .

❑ 13 — On considère le montage de la figure 4. Écrire l'équation différentielle régissant le courant  $I_e$  en supposant toujours que le circuit de la figure 1 soit modélisable en première approximation par un dipôle d'impédance  $Z_e$  calculée à la question 1 mais en remplaçant la bobine idéale par sa modélisation électrocinétique définie à la figure 5. Cette équation différentielle sera établie sans faire les hypothèses de la question 12.

❑ 14 — Simplifier l'équation différentielle de la question 13 en considérant que simultanément  $r_0 \ll R_p$  et  $(R + Z_e) \ll R_p$ . On présentera l'équation simplifiée sous la forme

$$L \frac{d^2 I_e}{dt^2} + R_T \frac{dI_e}{dt} + \frac{1}{C} I_e = 0 \quad (2)$$

dans laquelle on exprimera  $R_T$  en fonction de  $R$ ,  $Z_e$ ,  $r_0$ ,  $R_p$ ,  $L$  et  $C$ . Donner l'expression du coefficient de qualité  $Q$  et de la pulsation propre  $\omega_0$  du circuit  $R_T L C$  série équivalent à celui de la figure 4.

❑ 15 — Dans le cas  $R_T < 0$  et  $R_T^2 < 4L/C$ , exprimer la solution générale de l'équation différentielle (2) en fonction de  $Q$  et  $\omega_0$ . Tracer l'allure de  $I_e(t)$  correspondante. Que se passe-t-il lorsque  $R_T \rightarrow 0^-$  ? Interpréter alors l'expression de  $R_T$  à l'aide de l'équation (1).

#### I.F. — Stabilisation de l'amplitude des oscillations

❑ 16 — On considère encore le montage de la figure 4. Dans le cas où la bobine à air est une inductance idéale  $L$ , comment se réécrit l'équation différentielle (2) ? Que vaut alors  $R_T$  ? Dans quel type d'oscillations se trouve l'amplitude du courant  $I_e$  si  $R_T < 0$  ?

❑ 17 — On constate expérimentalement que sous la condition  $R_T < 0$ , une oscillation d'amplitude constante apparaît après un régime transitoire. Quelle est l'origine physique de la limitation de l'amplitude des oscillations ? Cette limitation apparaît-elle dans l'équation différentielle de la question 16 ?

❑ 18 — Afin de mieux comprendre le mécanisme de stabilisation de l'amplitude des oscillations, on se propose de tenir compte du caractère non-linéaire de la caractéristique  $V_e = f(I_e)$  établie dans la question 2. Pour ce faire, on modélise cette caractéristique par un polynôme du troisième degré passant par les zéros de la caractéristique et ayant même pente à l'origine : déterminer dans ces conditions l'expression de  $V_e$  en fonction de  $I_e$ .

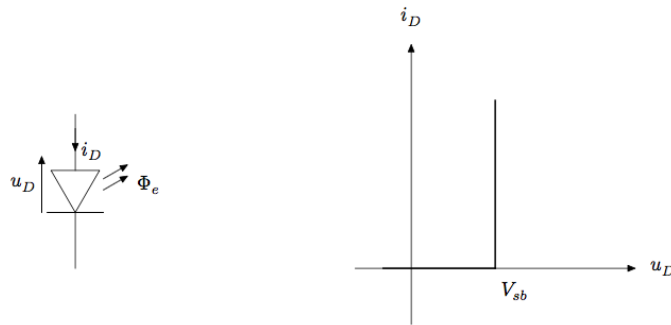
❑ 19 — Réécrire l'équation différentielle régissant le courant  $I_e(t)$  en incorporant l'expression de la caractéristique déterminée dans la question précédente. Interpréter qualitativement la stabilisation de l'amplitude de  $I_e(t)$ .

## Partie 2 – Connexion internet par LiFi (durée conseillée 1H)

Parmi les nombreux avantages du transport ferroviaire, on peut citer la possibilité d'utiliser le temps du transport comme un temps de travail ou de loisir grâce, notamment, à une connexion Internet individualisée. Dans cette partie est étudiée la technologie LiFi (Light Fidelity), ainsi nommée par analogie avec le WiFi (Wireless Fidelity), une solution innovante pour les connexions Internet individualisées dans des espaces restreints tels que la cabine d'un avion ou un wagon de train. Le LiFi exploite la lumière visible pour transmettre l'information. Son apparition coïncide avec le développement de l'éclairage par les diodes électroluminescentes.

### Document

Comme pour les diodes « simples », les diodes électroluminescentes mettent en jeu une jonction entre deux matériaux semi-conducteurs (jonction PN). Les photons sont émis lorsque le courant direct qui traverse la jonction provoque la recombinaison d'une paire électron-trou. La caractéristique d'une diode électroluminescente varie selon la couleur émise. Dans le cas d'une diode émettrice de lumière bleue, la caractéristique courant-tension a l'allure suivante :



Pour  $i_D > 0$ , la diode considérée émet une lumière bleue de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_b = 470 \text{ nm}$  ; la tension à ses bornes est alors égale à  $V_{sb} = 2,90 \text{ V}$ . Le rendement en puissance de la diode électroluminescente, défini comme le rapport de la puissance lumineuse  $\Phi_e$  émise sur la puissance électrique reçue, est égal à  $\eta_{led} = 33 \%$ . En première approximation, on peut considérer que la puissance lumineuse  $\Phi_e$  est rayonnée de façon isotrope dans le demi-espace qui se situe au-dessus du composant.

Dans ce problème, nous ne considérerons que le flux de données descendant vers l'utilisateur. Le schéma de la figure 8 représente le principe de la transmission d'une information par la lumière. La tension  $u_e$  contient le signal informatif. Elle alimente la diode électroluminescente  $D_1$  émettrice de lumière bleue, de sorte que l'amplitude de l'onde lumineuse émise soit modulée par le signal  $u_e$ . La diode  $D_2$ , polarisée en sens indirect grâce au potentiel  $V_0$  qui est positif, est photoréceptrice. L'intensité  $i_2$  du courant qui parcourt  $D_2$  est proportionnelle au flux lumineux qu'elle reçoit, de sorte que la tension  $u_r$  contient l'information utile.

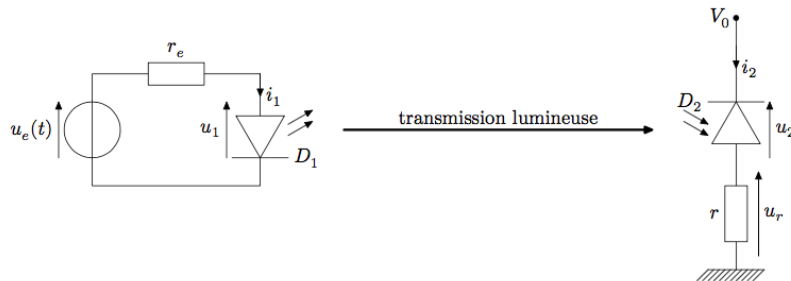


Figure 8 Principe de la transmission d'information par la lumière.

### III.A – Émission du signal lumineux

Dans le circuit émetteur, la résistance  $r_e = 10 \Omega$  a pour fonction de commander le passage du courant dans la diode par la tension  $u_e$ , en même temps qu'elle la protège. La diode émet de la lumière lorsque l'intensité du courant  $i_1$  qui la traverse en sens direct est positif ; on notera la puissance lumineuse moyenne émise  $\Phi_e$ . Dans le modèle adopté, la puissance moyenne émise est proportionnelle au courant  $i_1$  avec un coefficient de proportionnalité  $K_e$ , soit  $\Phi_e = K_e i_1$ .

Q 32. Déterminer la valeur constante minimale  $U_{\min}$  de  $u_e$  qui permet d'obtenir une émission lumineuse par la diode.

Q 33. Calculer la valeur constante  $U_0$  de  $u_e$  qui permet d'obtenir un courant  $i_1$  constant égal à  $i_0 = 0,73 \text{ A}$  à travers la diode. Calculer la puissance lumineuse moyenne correspondante, notée  $\Phi_{e0}$ , émise par la diode.

Pour transmettre une information par la lumière, la technologie LiFi utilise le principe de la modulation d'amplitude. Le signal porteur correspond au signal lumineux de longueur d'onde  $\lambda_b$  émis par la diode, dont on module l'amplitude à l'aide d'un signal sous-porteur  $p(t)$ . Par la suite, on considère que le signal sous-porteur est sinusoïdal, d'amplitude  $p_m$ , de fréquence  $f_p = \omega_p/2\pi$  et de phase à l'origine  $\alpha_p$  :  $p(t) = p_m \cos(\omega_p t + \alpha_p)$ . On note  $a(t)$  la tension correspondant au signal contenant l'information ; les fréquences contenues dans le spectre de  $a(t)$ , notées  $f_a$  sont très inférieures à la fréquence  $f_p$ . On génère la tension  $u_e(t)$  du circuit émetteur grâce au circuit de la figure 9, qui contient un bloc multiplieur  $M_1$  et un bloc additionneur  $A_1$ . Le bloc multiplieur  $M_1$  réalise le produit des deux tensions d'entrée, soit dans le cas du circuit considéré  $m_1(t) = k_m \times p(t) \times a(t)$ , avec  $k > 0$ . Les impédances d'entrée des blocs  $A_1$  et  $M_1$  sont infinies.

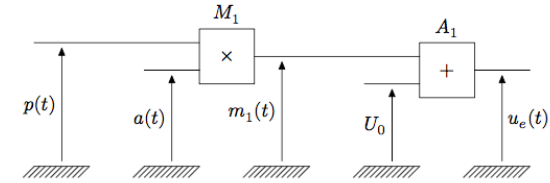


Figure 9 Schéma du circuit de réalisation de  $u_e(t)$

Q 34. Exprimer la tension  $u_e(t)$  dans le cas où  $a(t)$  est un signal sinusoïdal d'amplitude  $a_m$ , de fréquence  $f_a = \omega_a/2\pi$  telle que  $f_a \ll f_p$ . Quelle est la valeur maximale du produit  $k \times p_m \times a_m$  qui permet de s'assurer que la diode électroluminescente émet toujours de la lumière ?

Q 35. Représenter l'allure du signal  $u_e(t)$ , ainsi que l'allure de son spectre, dans le cas où le signal  $a(t)$  est sinusoïdal de fréquence  $f_a = f_p/10$ .

Q 36. Représenter l'allure du signal  $u_e(t)$ , ainsi que l'allure de son spectre, dans le cas où le signal  $a(t)$  est un signal créneau variant entre 0 et  $a_m$ , de fréquence  $f_a = f_p/10$ . L'allure d'un spectre d'un tel signal créneau est donné en annexe.

### III.B – Réception du signal lumineux et extraction de l'information

La photodiode réceptrice est située à la distance  $d$  de la diode émettrice et capte le flux lumineux  $\Phi_r$  qui arrive sur sa surface, d'aire  $s_r$ . Lorsqu'elle est polarisée en inverse comme sur le schéma de la figure 8, le courant  $i_2$  qui la traverse en sens indirect est proportionnel au flux  $\Phi_r$  et on note  $i_2 = K_r \Phi_r$ , où  $K_r$  est une constante positive.

Q 37. Exprimer la tension  $u_r(t)$  en fonction de  $u_e(t)$ ,  $V_{sb}$ ,  $d$ ,  $r$ ,  $r_e$ ,  $s_r$ ,  $K_e$  et  $K_r$ .

Pour extraire le signal informatif du signal  $u_r$ , on réalise le montage de la figure 10 dans lequel  $A_2$  est un amplificateur de tension, tel que  $u_{r1} = K u_r$ , et  $M_2$  est un multiplieur identique à  $M_1$ . Dans le montage figure également le bloc  $F$  constitué d'une résistance  $r_2$  et d'un condensateur de capacité  $C_2$ .

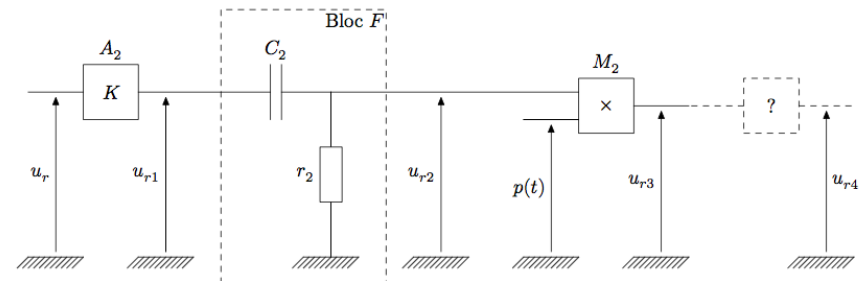


Figure 10 Schéma du circuit d'extraction de l'information à partir de la tension  $u_r(t)$ .

Q 38. Quelle est la fonction du bloc  $F$  ? Exprimer sa fonction de transfert et préciser sa pulsation de coupure  $\omega_c$  en fonction de  $r_2$  et  $C_2$ .

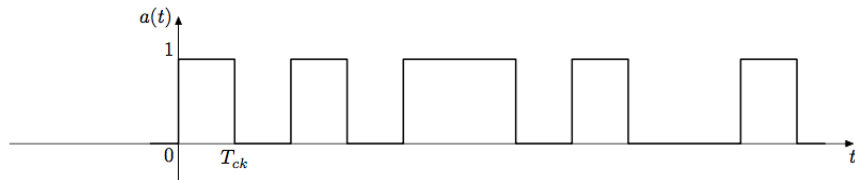
On considère un signal informatif de la forme  $a(t) = a_m \cos(\omega_a t)$ , tel que  $\omega_c \ll \omega_a \ll \omega_p$ .

Q 39. Montrer que la tension  $u_{r3}$  peut s'écrire sous la forme  $u_{r3} = U_{3m} \cos^2(\omega_p t + \alpha_p) \cos(\omega_a t)$  ; exprimer l'amplitude  $U_{3m}$  en fonction des données du problème, puis représenter le spectre du signal  $u_3$ .

**Q 40.** On souhaite que la tension  $u_{r4}$  soit proportionnelle au signal informatif. Proposer un montage pour le bloc inconnu, noté « ? » sur la figure 10.

### III.C – Débit binaire du LiFi

En pratique, le signal informatif est un signal binaire, dont l'allure qualitative est présentée figure 11 où  $T_{ck}$  est la période d'horloge. Pour que la modulation décrite dans la sous-partie III.A soit correcte, il faut s'assurer que la fréquence d'horloge  $f_{ck}$  vérifie la condition  $f_{ck} < f_p/100$ .



**Figure 11** Allure d'un signal informatif pour une transmission binaire

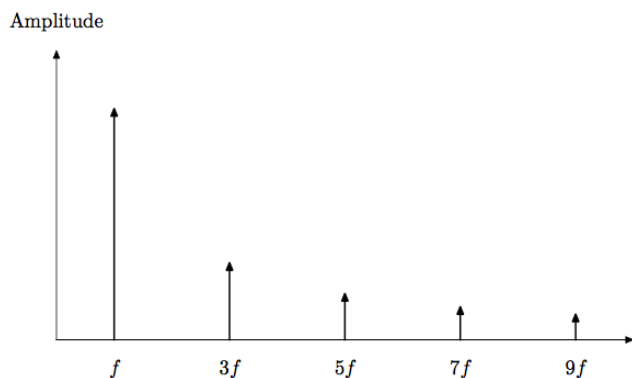
**Q 41.** Les liaisons WiFi actuelles procurent un débit descendant de l'ordre de  $10 \text{ Mbit} \cdot \text{s}^{-1}$ , obtenu avec des porteuses dont la fréquence est de l'ordre de quelques GHz. Vérifier que la condition d'une bonne modulation est satisfaite.

On considère désormais le cas d'une installation LiFi utilisant des diodes électroluminescentes émettant une lumière bleue de longueur d'onde  $\lambda_b = 470 \text{ nm}$  dans le vide.

**Q 42.** Calculer la fréquence de la porteuse lumineuse. En déduire l'ordre de grandeur de la fréquence de la sous-porteuse qui peut être utilisée pour la technologie LiFi, puis estimer l'ordre de grandeur du débit binaire maximal que l'on peut obtenir avec le LiFi. Commenter.

Vitesse de propagation de la lumière dans le vide  $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

### Spectre en amplitude d'un signal créneau de fréquence $f$ (premières harmoniques)



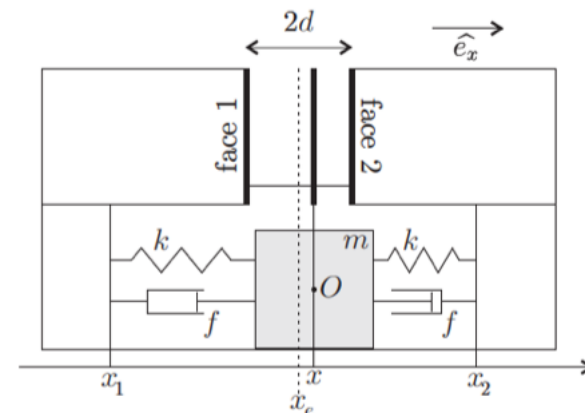
## Partie 3 – Conditionnement du signal : mesure de déplacement d'un accéléromètre (durée conseillée 1H)

Pour mesurer des accélérations dans les systèmes embarqués, on utilise aujourd'hui des MEMS (Micro-Electro-Mechanical-System) dont la taille est inférieure à celle d'une pièce de monnaie : téléphone portable, manettes de consoles de jeu, airbag dans l'automobile...

Le fonctionnement du MEMS est modélisé ci-contre. L'étude mécanique du système montre que la mesure de la longueur  $L = x - x_e$  permet d'accéder à l'accélération subie par le système :

$$L(t) = \frac{-a(t)}{\omega_0^2} \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

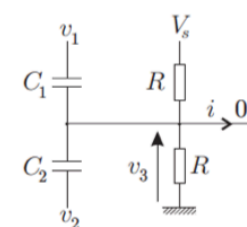
On s'intéresse ici plus particulièrement au conditionnement du capteur : une mesure capacitive permet alors d'en déduire le déplacement  $L(t)$ .



**FIGURE 1 – Modélisation mécanique 1D du MEMS**

Comme le montre la figure 1, le mobile est solidaire d'une lame pouvant se déplacer devant les faces 1 et 2. La face 1 et la lame forment un condensateur  $C_1$ . La face 2 et la lame forment un condensateur  $C_2$ . Ces capacités dépendent de  $L$ .

Dans un MEMS une série de de micro-lamelles sont imbriquées comme si deux peignes à cheveux étaient en regard l'un de l'autre. Les condensateurs sont alors simplement plus nombreux que dans le modèle que nous utilisons. Le dispositif formé par les condensateurs est alimenté par les tensions  $v_1(t) = \frac{1}{2}V_s + V_1 \sin(\omega t)$  et  $v_2(t) = \frac{1}{2}V_s - V_1 \sin(\omega t)$ . Le modèle électrique du MEMS est celui de la figure 2. On introduit la constante de temps  $\tau = \frac{1}{2}R(C_1 + C_2)$ .



**FIGURE 2 – Modélisation électrique**

**Q 4** — Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $v_3(t)$  en fonction de  $V_s$ ,  $\tau$ ,  $\omega$ ,  $\cos(\omega t)$  et de la tension  $V_2 = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} V_1$

**Q 5** — Résoudre cette équation en trouvant l'expression de  $v_3(t)$  en fonction de  $V_s$ ,  $V_2$ ,  $\omega$ ,  $\tau$ ,  $\cos(\omega t + \varphi)$  et d'une constante  $V_0$  associée au régime libre, fixée par les conditions initiales et que l'on ne cherchera pas à déterminer. En particulier, on exprimera d'une part la phase à l'origine  $\varphi$  en fonction de  $\omega$  et  $\tau$  et d'autre part l'amplitude des oscillations en régime permanent en fonction de  $\omega$ ,  $V_2$  et  $\tau$ .

❑ 6 — On fixe  $\tau = 5 \text{ ms}$  et  $\omega = 10^5 \text{ rad.s}^{-1}$ , la mesure de  $v_3(t)$  est faite pour  $t \gg \tau$ . En déduire, dans ces conditions, une expression approchée de  $v_3(t)$  ne dépendant plus que de  $V_s$ ,  $V_2$  et  $\sin(\omega t)$ .

On admettra que l'expression de la capacité  $C$  d'un condensateur plan de surfaces  $S$  en regard (vide) s'exprime par :  $C = \epsilon_0 \frac{S}{e}$  avec  $e$  l'épaisseur du condensateur (sa distance entre armatures)

❑ 8 — Exprimer  $C_1$  et  $C_2$  et montrer que  $(C_1 - C_2)/(C_1 + C_2) = -L/d$ .

❑ 9 — Sous les hypothèses de la question 6, exprimer  $v_3(t)$  en fonction de  $V_1$ ,  $L$ ,  $d$ ,  $V_s$  et  $\sin(\omega t)$ . On conservera cette expression pour la suite de l'étude.

Pour extraire l'information, le principe utilisé est celui de la démodulation synchrone : le signal  $v_3(t)$  est multiplié par  $v_1(t)$  pour obtenir un signal  $s_1(t) = h \times v_1(t) \times v_3(t)$  où  $h$  est un gain positif, puis le résultat est filtré pour obtenir le signal  $s(t)$ . L'ensemble de ce dispositif d'acquisition est représenté sur la figure 3.

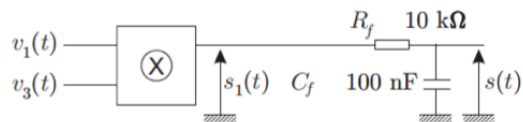


FIGURE 3 – Module d'acquisition de l'accélération

❑ 10 — Après avoir écrit l'expression de  $s_1(t)$ , déterminer le signal  $s(t)$  qu'il est possible d'observer en mode DC sur un oscilloscope. On détaillera le raisonnement permettant d'obtenir cette expression, on exprimera tout d'abord  $s(t)$  en fonction de  $h$ ,  $V_1$ ,  $L$ ,  $d$  et  $V_s$  puis, en supposant que  $L$  et  $a$  ne dépendent pas du temps, en fonction de  $h$ ,  $V_1$ ,  $a$ ,  $m$ ,  $k$ ,  $d$  et  $V_s$ .