

## TD Transport Bloc 1 – Conduction électrique

### Une approche complémentaire du modèle de Drüde

#### Exercice 1 – Probabilité de collisions, conductivité et effet Joule

Pour rendre compte du phénomène de conduction électrique, assurée par les électrons mobiles d'un conducteur ohmique, on adopte les hypothèses du **modèle de Drüde** :

- les électrons subissent des collisions qui interviennent de manière complètement aléatoire. Ainsi chaque électron possède une probabilité  $dt/\tau$  de subir un choc pendant une durée  $dt$ , probabilité proportionnelle à la durée écoulée  $dt$  (indépendamment des chocs ultérieurs). Ces collisions interviennent réellement avec les impuretés ou les imperfections du réseau cristallin, ou avec les phonons représentant les vibrations élastiques du réseau.
- entre deux chocs, le mouvement des électrons est celui d'une particule libre en interaction avec le seul champ électrique  $\vec{E}$ , supposé uniforme et constant

Le milieu étant **isotrope**, après chaque choc, les électrons subissent une redistribution aléatoire de leurs vitesses en orientation, comme en norme.

1. Quelle est la probabilité  $P'$  pour qu'un électron ne subisse pas de choc entre les instants  $t + dt$  et  $t$  ?

2. Soit  $P(t)$  la probabilité pour un électron de ne pas avoir subi de choc en  $t$  (donc entre l'instant origine  $t = 0$  du choc et l'instant  $t$ ).

Exploiter la relation entre  $P(t+dt)$  et  $P(t)$  pour montrer que  $P(t) = e^{-t/\tau}$ .

3. Montrer alors que la durée moyenne  $\langle t \rangle$  séparant deux chocs successifs est égale à  $\tau$ .

On rappelle ici que la valeur moyenne d'une grandeur  $x$ , distribuée selon une loi de probabilité  $P(x)$  est :  $\langle x \rangle = \frac{\int xP(x)}{\int P(x)}$  les bornes étant prises sur l'intervalle de valeurs possibles de  $x$

4. Déterminer la vitesse moyenne  $\langle \vec{v} \rangle$  des électrons entre deux collisions à un instant  $t$  quelconque. En déduire le vecteur densité de courant moyen qui apparaît. Il s'agit du vecteur densité de courant en régime permanent. Donner alors

l'expression de la conductivité du matériau  $\sigma$ . La densité électronique sera notée  $n$ , la charge d'un électron étant  $-e$ , sa masse  $m$ .

5. Entre deux chocs successifs, l'énergie cédée aux porteurs de charge, les électrons, par le champ électrique provoque un accroissement  $\Delta E_c$  de leur énergie cinétique, et modifie ainsi l'énergie interne du conducteur. Cette énergie sera

dissipée sous forme de transfert thermique, elle est à l'origine de l'effet Joule qui provoque l'échauffement du conducteur.

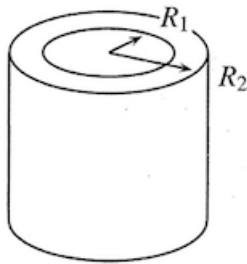
Exprimer la valeur moyenne  $\langle \Delta E_c \rangle$  en fonction de  $e$ ,  $m$ ,  $\tau$  et  $E$ . En déduire l'expression de la puissance volumique  $P_v$  dissipée en fonction de  $\sigma$  et  $E$ , puis de  $\vec{j}$  et  $\vec{E}$ . Commenter.

Réponses : 1.  $P' = 1 - dt/\tau$  ; 2.  $P(t=0) = 1$  ; 5.  $\langle \Delta E_c \rangle = e^2 \tau E^2/m$

#### Détermination de résistance ohmique en géométrie cylindrique

#### Exercice 2 – Résistance d'une couronne cylindrique

Une résistance électrique cylindrique est constituée d'un matériau ohmique de conductivité  $\sigma$ , qui occupe une couronne cylindrique entre les rayons  $R_1$  et  $R_2$ , sur une hauteur  $h$ . Le cylindre intérieur de rayon  $R_1$  est porté au potentiel  $V_1$ , Le cylindre extérieur de rayon  $R_2$  au potentiel  $V_2$ . On se place naturellement en régime stationnaire.



1. Analyser les symétries pour en déduire les dépendances spatiales du potentiel électrique  $V(r, \theta, z)$ . En exploitant la relation  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$  qui lie potentiel et champ électriques en régime permanent, déterminer la forme générale du vecteur densité de courant  $\vec{j}$ .

On rappelle en coordonnées cylindriques l'expression du gradient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z$$

2. Pourquoi le vecteur densité de courant est-il à flux conservatif ? Quelle grandeur demeure constante ?

3. Etablir l'expression de la résistance électrique de la couronne cylindrique.

Réponses : 1.  $V(r)$  par invariances  $\rightarrow \vec{j} = j(r, t) \vec{u}_r$  ; 3.  $R = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi\sigma h}$

## Conservation de la charge en géométrie sphérique

### Exercice 3 – Application à la protection contre la foudre Adapté de CCINP PSI 2015

Un rappel sur le **volume élémentaire en géométrie sphérique** sera réalisé par l'enseignant, en introduction, pour obtenir l'expression du **volume élémentaire dV** d'une **calotte sphérique comprise entre r et r + dr**, de surface moyenne  $S = 4\pi r^2$  et d'épaisseur dr est :  $dV = S dr = 4\pi r^2 dr$

#### I. Bilan local avec symétrie sphérique

On examine un problème invariant par symétrie sphérique, dans lequel les grandeurs ne dépendent que de la distance r à un point O, choisi comme origine du repère. Le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  est par exemple de la forme générale :  $\vec{j} = j(r, t) \vec{u}_r$ . La densité de charges du milieu conducteur à l'étude sera notée  $\rho(r, t)$ .

1. Réaliser un schéma de la situation et exprimer l'intensité du courant électrique sortant d'une sphère de centre O et de rayon r.
2. On considère le volume élémentaire dV compris entre les rayons r et r + dr, réaliser un schéma où apparaissent clairement les vecteurs densité de courant  $\vec{j}$ , et exprimer la quantité de charges dq(r,t) présente à l'instant t dans ce volume.
3. Réaliser un bilan local de charges entre t et t + dt sur cet élément de volume, pour déterminer l'équation locale de conservation liant  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  et  $\frac{\partial(jr^2)}{\partial r}$

#### Opérateur divergence en coordonnées sphériques

Pour un vecteur  $\vec{A} = A_r \vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta + A_\varphi \vec{u}_\varphi$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\varphi)}{\partial \varphi}$$

4. Retrouver la relation précédente en exploitant directement l'équation locale de conservation de la charge.  
On se place maintenant en **régime stationnaire**.
5. Exprimer la dépendance de j(r) en fonction de r.
6. Déterminer l'expression de j(r) en fonction de I et r.

#### II. Application à la protection contre la foudre : prise de terre adapté de CCP PSI 2015

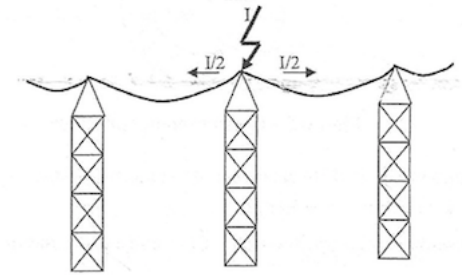
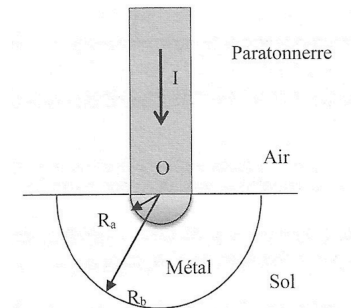


Figure 6 - Impact direct sur une ligne électrique

L'impact direct de la foudre (fig 6) sur une ligne électrique ou une ligne téléphonique génère une onde qui se propage dans les deux sens. Le courant de foudre peut atteindre 50 000 A et générer une onde de tension supérieure à  $10^6$  V. Il convient de dévier le courant de foudre vers la Terre de façon à ne pas laisser se propager des ondes de tension qui pourraient endommager les appareils électriques des usagers.

Une prise de Terre (ci-contre) est constituée d'une coque hémisphérique métallique de centre O, de rayon intérieur  $R_a$  et de rayon extérieur  $R_b$ . On note  $\gamma_{\text{mét}}$  la conductivité du métal. Cette prise est enfoncée dans le sol, assimilé à un  $\frac{1}{2}$  espace  $z < 0$ , de conductivité électrique  $\gamma_{\text{sol}}$ .

La prise de Terre se décompose ainsi en deux résistances hémisphériques  $R_{\text{mét}}$  et  $R_{\text{sol}}$ , l'une en métal de rayon intérieur  $R_a$  et de rayon extérieur  $R_b$ , l'autre associée au sol de rayon intérieur  $R_b$  et de rayon extérieur infini.



3 - Modèle simplifié d'une prise de terre

Elle est destinée à recevoir un courant I provenant d'un paratonnerre. Il sera supposé indépendant du temps et descendant. On suppose que le courant qui traverse la prise de terre est radial, de densité  $\vec{j} = j(r) \vec{u}_r$  en coordonnées sphériques et régime stationnaire. Même si la durée de la foudre est brève, elle est suffisamment longue pour valider l'hypothèse de l'ARQS, et on se place dans le cadre de courants stationnaires.

1. Pour la conduction électrique dans le sol dans un premier temps, montrer que :

$$j(r) = \frac{I}{2\pi r^2}$$

2. En exploitant la relation entre champ et potentiel électrostatique V(r) qui respecte la symétrie sphérique de la distribution de charges :

$$\vec{E} = -\text{grad } V(r) = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r, \text{ montrer que le potentiel s'exprime par } V(r) = \frac{I}{2\pi\gamma_{\text{sol}} r}$$

#### Electrocution à distance

Cette répartition non uniforme du potentiel à la surface de la Terre explique le foudroiement indirect des hommes ou des animaux.

On rappelle  $R_H = 2,5 \text{ k}\Omega$  la résistance du corps humain mesurée entre ses deux pieds supposés distants de  $a = 1 \text{ m}$ . Pour ne pas être électrocuté, le corps d'un

homme ne doit pas être traversé par un courant supérieur à  $I_{\max} = 25 \text{ mA}$ , il doit donc rester éloigné d'une distance  $D$  de la prise de terre.

3. Réaliser un schéma paramétré de la situation puis un schéma électrique équivalent. On considèrera que la résistance du sol sur une distance  $a$  est largement supérieure à la résistance du corps humain.

4. Trouver une première relation entre  $V(D+a)$ ,  $V(D)$ ,  $R_H$  et  $I_{\max}$ .

5. En supposant  $D \gg a$ , montrer que  $D = \sqrt{\frac{aI}{2\pi\gamma_{\text{sol}}R_H I_{\max}}}$

Réaliser l'application numérique avec  $\gamma_{\text{sol}} = 10^{-2} \text{ S.m}^{-1}$  et  $I = 5,0 \cdot 10^4 \text{ A}$ .

Ce phénomène d'électrocution à distance touche-t-il plutôt les grands animaux (vaches, chevaux...) ou les petits animaux (lapins, renards...)?

### Expression de la résistance d'une coque hémisphérique

Pour évaluer la résistance de la prise de terre, on considère une coque hémisphérique homogène de conductivité électrique  $\gamma$ , comprise entre les rayons  $R_{\text{int}}$  et  $R_{\text{ext}}$ , parcourue par un courant radial.

On la décompose en une infinité de coques hémisphériques élémentaires comprises entre les rayons  $r$  et  $r + dr$ .

6. La loi d'Ohm permet de définir la résistance élémentaire  $dR$  :

$$dR = \frac{U}{I} = \frac{|dV|}{I} \text{ avec } dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \text{ (équivalent de } \vec{E} = -\text{grad } V \text{)}$$

Montrer que  $dR = \frac{dr}{2\pi\gamma r^2}$

7. En déduire la résistance totale de la coque hémisphérique  $R$  en fonction de  $\gamma$ ,  $R_b$  et  $R_a$ .

8. Établir l'expression de la résistance globale de la prise de terre  $R_{\text{tot}}$  en fonction de  $\gamma_{\text{mét}}$ ,  $\gamma_{\text{sol}}$ ,  $R_a$  et  $R_b$  avec  $\gamma_{\text{mét}}$  la conductivité de la partie métallique de la prise, et  $\gamma_{\text{sol}}$  la conductivité du sol.

Application numérique : évaluer  $R_{\text{tot}}$  pour  $R_a = 1,0 \text{ cm}$ ,  $R_b = 35 \text{ cm}$ ,  $\gamma_{\text{mét}} = 6,0 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$  (cuivre).

9. La législation en termes de sécurité électrique impose que  $R_{\text{tot}} < 25 \Omega$ , est-ce respecté dans le cas de cette prise ? Sinon, que préconisez-vous pour remédier à ce problème ?

**Réponses :** I. 1.  $i(r,t) = 4\pi r^2 j(r,t)$ ; 3.  $\frac{1}{r^2} \frac{\partial(jr^2)}{\partial r} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ; 6.  $\vec{j}(r) = \frac{I}{4\pi r^2} \vec{u}_r$ ; II. 4.  $V(D) - V(D+a) = R_H I_{\max}$ ; 5.  $D = 110 \text{ m}$ , attention pour les animaux de grande taille; 7.

$R = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right)$ ; 8.  $R_{\text{tot}} = R_{\text{mét}} + R_{\text{sol}} = \frac{1}{2\pi\gamma_{\text{mét}}} \left( \frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right) + \frac{1}{2\pi\gamma_{\text{sol}}} \frac{1}{R_b} \approx R_{\text{sol}} = 45 \Omega$ ; 9.

enfoncez le pic pour augmenter  $R_b$ , ou augmenter  $R_a$  mais encombrement

## Régime variable

### Exercice 4 - Limite de validité de la loi d'Ohm et de l'effet Joule en régime variable

On s'intéresse aux mouvements des électrons de conduction d'un métal, et on se place en **régime variable avec excitation harmonique** de la forme :

$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$  avec  $\vec{E}_0$  l'amplitude indépendante du point M d'observation (on choisit arbitrairement une phase nulle pour le champ d'excitation). Ainsi le **champ électrique** appliqué demeure **uniforme à l'échelle des déplacements des électrons**. On prend en compte la **force de frottements du modèle de Drude** :

$\vec{F} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$  avec  $m$  la masse de l'électron et  $\tau$  le temps caractéristique.

En notation complexe  $\vec{E} = \mathcal{R}_e(\underline{\vec{E}})$  avec  $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{j\omega t}$

6.1 En appliquant la PFD à un électron mobile, exprimer sa vitesse complexe en fonction de l'amplitude du champ électrique appliqué (en l'absence de champ magnétique).

6.2 Exprimer le vecteur densité de courant complexe, et la loi d'Ohm locale en régime variable. En déduire que la conductivité se met sous la forme :  $\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1+j\omega\tau}$

Expliciter  $\gamma_0$ . A quelle grandeur typique l'identifier ?

6.3 Pour  $\omega\tau \gg 1$ , soit  $f \gg \frac{2\pi}{\tau} \approx 10^{14} \text{ Hz}$ , limite des infra-rouges, donner

l'expression de la conductivité sous la forme  $\underline{\gamma} = -\gamma_{HF}(\omega) j$ .

6.4 Exprimer la puissance volumique dissipée par effet Joule.

6.5 En régime variable, on s'intéresse à la puissance moyenne (sur une période  $T$ ). Donner les expressions réelles du vecteur courant et du champ électrique pour  $f \gg \frac{2\pi}{\tau} \approx 10^{14} \text{ Hz}$ . Quelle particularité présentent-ils ?

En déduire la valeur de la puissance moyenne.

Le milieu n'est alors plus dissipatif : la puissance moyenne cédée par le champ à la matière est nulle. A cette fréquence élevée, le déplacement maximum des électrons de conduction n'est plus suffisant pour que les interactions avec le réseau aient lieu. Les électrons suivent le champ avec retard, et d'autant plus mal que la fréquence est élevée dans ce régime :  $|\underline{\gamma}| \downarrow$  si  $\omega \uparrow$

En terme de collisions, si la variation du champ électrique est bien plus rapide que le temps moyen entre deux collisions, il y a changement de sens du champ entre deux collisions successives : le mouvement d'ensemble dirigé, imposé par le champ, n'est plus possible.

6.6 Pour les fréquences industrielles, et les ondes hertziennes, quelle est la conductivité, le caractère dissipatif de la loi d'Ohm est-il valide ?

## TD Transport Bloc 1 – Conduction électrique

### Pour aller plus loin

#### Effet de la température sur la conductivité

#### Exercice 5 – Influence de la température sur la résistivité d'un conducteur ohmique

Aux températures proches de la température ambiante, la résistance électrique  $R$  d'un barreau métallique cylindrique dépend de la température  $T$ , exprimée en degrés Celsius selon une loi du premier ordre en température :

$$R = R_0(1 + aT) \text{ avec } a = 4 \cdot 10^{-3} \text{ USI}$$

1. Tracer l'évolution de  $R$  en fonction de  $T$ . Que représente  $R_0$  et  $a$  ? Quelle est la dimension de  $a$  ?
2. Donner l'expression de la résistance  $R$  du barreau en fonction de sa longueur  $L$ , sa section  $S$ . En déduire l'expression de la résistivité  $\rho = 1/\gamma$ .
3. On néglige la dilatation du barreau (dépendance de  $L$  et  $S$  avec  $T$ ), comment évolue alors la résistivité en fonction de la température ?

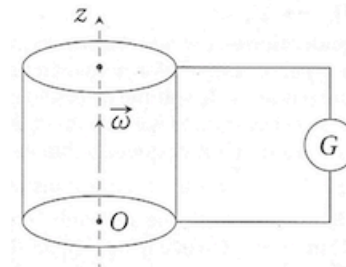
On admet que chaque atome du métal cède un porteur de charge mobile (électron ici) et que la densité d'électrons participant à la conduction dépend très peu de la température.

4. On définit la mobilité comme le coefficient de proportionnalité entre la vitesse de migration des électrons et le champ électrique à l'origine de ce déplacement. Comment varie la mobilité en fonction de la température ?
5. On prend maintenant en compte le coefficient de dilatation  $\alpha$  du métal, défini par  $\alpha = \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial T} = 10^{-5} \text{ USI}$  où  $l$  est une dimension quelconque du matériau (rayon, longueur).
  - a) Donner la dimension de ce coefficient. Quel est l'ordre de grandeur de la dilatation d'un barreau de 1 m soumis à une différence de température de 1 K ?
  - b) En exploitant la dérivée logarithmique de la résistance  $R$ , évaluer la variation relative de résistance  $dR/R$  en fonction des variations relatives de longueur  $dL/L$ , de rayon  $dr/r$  et de résistivité  $\frac{d\rho}{\rho}$ . Comparer les ordres de grandeurs de ces variations relatives pour valider l'hypothèse d'une dilatation négligeable dans la variation de résistance en fonction de  $T$ .

#### Bilan d'énergie cinétique et effet Joule pour des porteurs de charge mis en mouvement d'ensemble

#### Exercice 6 – Le galvanomètre de Tolman et Stewart : mesure de $q/m$

Pour déterminer la nature des porteurs de charge dans un métal, Tolman et Stewart ont réalisé une expérience originale, parue dans Physical Review - Tolman and Stewart, Phys. Rev. 8,97 (1916) et Phys. Rev. 9,164 (1917). Ils exploitent le principe qu'un **courant dans un conducteur peut être généré par la mise en mouvement globale du solide conducteur** (sans alimentation par un quelconque générateur).



Un fil métallique de longueur  $L$  est bobiné avec  $n$  tours sur un mandrin cylindrique de rayon  $r$  et d'axe  $Oz$ , et connecté à un galvanomètre balistique qui mesure la charge électrique  $Q$ . Dans le référentiel du laboratoire, le mandrin entraîné par un moteur est en rotation autour de l'axe  $Oz$  à vitesse constante  $\omega_0$ .

Un dispositif global permet de compenser le champ magnétique terrestre. Lorsque l'on freine brutalement la bobine, un courant est induit par le mouvement inertiel des porteurs de charge et le galvanomètre mesure alors la charge totale  $Q$  qui a transité dans la bobine. Tolman et Stewart en déduisent le rapport  $q/m$  des porteurs de charge.

1. En considérant que les porteurs de charge de masse  $m$  sont au nombre de  $N$  par tour de bobine, déterminer l'énergie cinétique initiale  $E_c(t=0)$  des porteurs dans le référentiel du laboratoire.
2. Exprimer l'énergie cinétique  $E_c(t)$  à un instant  $t$  de la phase de freinage. En déduire sa variation élémentaire  $dE_c$  résultant de la variation de vitesse angulaire  $d\omega$  lors du freinage.
3. Pour un observateur extérieur (lié au laboratoire), quel courant  $i(t)$  correspond au mouvement de rotation des porteurs de charge à la vitesse angulaire  $\omega$  ?
4. On suppose raisonnablement que les variations d'énergie cinétique des porteurs sont converties en énergie dissipée par effet Joule, la bobine possédant une

résistance  $R$ . Montrer que : 
$$\frac{q}{m} = \frac{2\pi r^2 n \omega_0}{RQ}$$

Dans les conditions de l'expérience, on a  $R = 40 \Omega$ ,  $r = 12,3 \text{ cm}$ ,  $L = 2\pi nr = 466,5 \text{ m}$ . Le mandrin tourne à 5000 tours par minute et on mesure une charge  $Q = 4,22 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ . Calculer  $q/m$ . On donne pour l'électron :  $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  et  $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ . Conclure.

## Effet d'un champ magnétique sur la conduction électrique : effet Hall et magnétorésistance

### Sujet 1 : Transfert de charges dans un conducteur par effet Hall Centrale TSI 2019

**III.A** – Soit une particule ponctuelle de charge  $q$  en mouvement à la vitesse  $\vec{v}$  soumise à l'action d'un champ magnétique  $\vec{B}(M)$ . On rappelle que l'expression de la force à laquelle cette particule est soumise s'écrit  $q\vec{v} \wedge \vec{B}(M)$ .

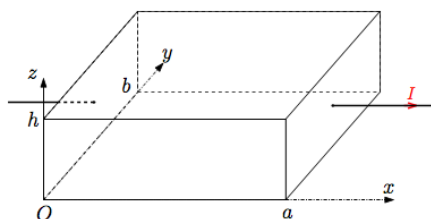


Figure 13

Soit une portion de conducteur de dimensions  $a$ ,  $b$ ,  $h$  (figure 13). Ce conducteur est inséré dans un circuit parcouru par un courant d'intensité  $I > 0$  (comme indiqué sur la figure 13).

On notera  $n$  la densité volumique de porteurs de charge et  $\vec{v}$  la vitesse d'un porteur de charge dans le volume. Les particules portent la charge  $q$  dont on ne connaît a priori pas le signe. On suppose dans un premier temps qu'il n'y a qu'un seul type de porteurs.

**Q 53.** Rappelez l'expression de  $\vec{j}$ , vecteur densité volumique de courant, en fonction de  $n$ ,  $q$  et du vecteur vitesse d'un porteur de charge.

#### III.B – Approche qualitative de l'effet Hall

**Q 54.** Si les porteurs de charges sont des électrons de charge  $q = -e$ , quel est le sens de  $\vec{j}$ ? Quel est le sens de  $\vec{v}$ ?

**Q 55.** Mêmes questions si les charges des porteurs sont positives  $q = +e$ .

On place le volume dans un champ magnétique  $\vec{B} = B_0 \vec{u}_y$  (où  $B_0 > 0$ ) supposé uniforme à l'échelle de l'échantillon.

**Q 56.** En considérant la direction et le sens de la force exercée par le champ magnétique sur un porteur de charge, expliquer en quelques mots pourquoi on voit apparaître une tension entre les faces d'équations  $z = 0$  et  $z = h$  du parallélépipède.

**Q 57.** Faire deux schémas indiquant le signe des charges apparaissant sur chaque face : dans le cas où  $q = -e$  et dans le cas où  $q = +e$ .

**Q 58.** Expliquer en pratique comment on peut simplement vérifier le signe des porteurs de charges avec un voltmètre.

#### III.C – Approche quantitative de l'effet Hall (cas des électrons porteurs)

On se place dans le cas où les charges mobiles sont des électrons, donc  $q = -e$ . On notera  $n_e$  leur densité volumique et  $\vec{v}_e$  leur vitesse.

On suppose qu'après un régime transitoire au cours duquel des charges ont commencé à s'accumuler sur l'une des faces, on atteint un régime permanent où la quantité de charges accumulées sur les faces ne varie plus, donnant lieu à la création d'un champ électrique de Hall uniforme entre les faces noté  $\vec{E}_H$ .

Par ailleurs les porteurs de charges mobiles ont repris leur mouvement d'ensemble à la vitesse  $\vec{v}_e$  uniforme et constante suivant  $(Ox)$  l'intensité du courant électrique est toujours  $I$ .

**Q 59.** En utilisant la sous-partie III.B, expliquer quel est le sens de  $\vec{E}_H$ .

**Q 60.** Établir, en s'intéressant au mouvement d'un porteur de charge, la relation  $\vec{E}_H = -\vec{v}_e \wedge \vec{B}$ .

**Q 61.** En projetant suivant  $(Oz)$  la relation précédente, donner l'expression de  $E_H$  en fonction de  $B_0$  et  $v_e$ ; puis en fonction de  $B_0$ ,  $e$ ,  $n_e$ ,  $I$  et des dimensions du conducteur.

**Q 62.** Exprimer  $U_H = V(z = h) - V(z = 0)$ , la tension de Hall.

#### III.D – Cas de porteurs positifs

Dans le cas de semi-conducteurs *dopés N*, les porteurs majoritaires sont des *électrons* de charge  $-e$ . Mais dans le cas de semi-conducteurs *dopés P*, les porteurs majoritaires sont des *trous* de charge  $+e$  et de densité volumique notée  $n_p$ . On notera leur vitesse  $\vec{v}_p$ .

**Q 63.** Reprendre les calculs précédents pour établir la nouvelle expression de  $U_H$  dans le cas d'un semi-conducteur dopé P en justifiant *soigneusement* (à l'aide d'un schéma notamment) les calculs.

#### III.E – Applications numériques

**Q 64.** Dans le cas d'un conducteur comme le cuivre, les seuls porteurs sont des électrons. On suppose que dans le cristal chaque atome de cuivre libère un électron de conduction. En utilisant les données du tableau 2, calculer la tension de Hall  $U_H$ .

|                                  |  |
|----------------------------------|--|
| Masse molaire atomique du cuivre | $M_{\text{Cu}} = 63,5 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$             |
| Masse volumique du cuivre        | $\mu_{\text{Cu}} = 8,9 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ |
| Constante d'Avogadro             | $N_a = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$                     |
| Charge élémentaire               | $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$                              |
| Champ magnétique                 | $B_0 = 0,1 \text{ T}$  |
| Dimensions du conducteur         | $h = 5,5 \text{ mm}$ , $a = b = 0,2 \text{ mm}$                  |
| Intensité du courant             | $I = 0,1 \text{ A}$  |

Tableau 2 Données numériques

**Q 65.** Commenter la valeur obtenue.

**Q 66.** Reprendre le calcul pour un semi-conducteur, comme le germanium, dopé N de sorte que  $n_e = 7 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$ . Conclure.

## Sujet 2 : Magnétorésistance Mines Ponts PSI 2016

A ce stade de la progression du cours, on donne l'équation de Maxwell  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$   
et  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} A(M)) = \Delta A(M)$  avec  $A(M)$  grandeur scalaire dépendant de la position  
et  $\vec{E} = -\operatorname{grad}(V)$  en régime stationnaire

On considère un conducteur électrique se présentant sous la forme d'une couronne cylindrique d'axe  $Oz$ , de hauteur  $h$ , délimitée par un cylindre intérieur de rayon  $r_1$  et par un cylindre extérieur de rayon  $r_2$ . À l'aide d'une source de tension on impose les potentiels  $V(r_1) = V_1$  et  $V(r_2) = V_2$ . On se place en régime permanent et on néglige les effets de bord, ce qui revient à supposer que le comportement de cette couronne est le même que si elle était infiniment haute. L'existence de deux équipotentielle cylindriques permet d'émettre l'hypothèse que le potentiel ne dépend que de  $r$ , ainsi

$$V = V(r), \quad \Delta V(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV}{dr} \right) \quad \text{et} \quad \operatorname{grad} V(r) = \frac{dV}{dr} \hat{u}_r.$$

□ 23 — Le conducteur est globalement non chargé, vérifier que l'hypothèse  $V = V(r)$  est la seule possible. Déterminer le potentiel électrique en un point  $M$  de ce conducteur. En déduire l'intensité  $E$  du champ électrique  $\vec{E}$  en ce même point en fonction de  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r$ .

La couronne cylindrique est placée dans un champ magnétique  $\vec{B} = B \hat{u}_z$  avec  $B > 0$ . Le conducteur contient  $n$  électrons libres par  $\text{m}^3$ . On considère de plus le modèle de Drude dans lequel chaque électron de vitesse  $\vec{v}$  est soumis, en plus des forces électromagnétiques, à une force de frottement s'exprimant sous la forme  $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$  avec  $\lambda > 0$ .

□ 24 — Pour chaque électron, établir, en régime permanent, la relation entre  $\vec{v}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{E}$  paramétrée par  $\lambda$  et la charge élémentaire  $e$ . En déduire l'expression, dans la base cylindrique  $(\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_z)$ , des coordonnées de  $\vec{v}$  en fonction de  $e$ ,  $\lambda$ ,  $E$  et  $B$  puis celles du vecteur densité volumique de courant  $\vec{j}$ .

□ 25 — Exprimer l'intensité du courant électrique traversant une surface équipotentielle de rayon  $r$ . En déduire la résistance électrique  $R$  de la couronne, en fonction de  $e$ ,  $n$ ,  $\lambda$ ,  $B$ ,  $h$ ,  $r_1$  et  $r_2$ . On note  $R_0$  la résistance en l'absence de champ magnétique. Exprimer l'écart relatif  $\varepsilon = \frac{R - R_0}{R_0}$  en fonction de  $e$ ,  $B$  et  $\lambda$ . Calculer la valeur numérique de  $R_0$  ainsi que celle de  $\varepsilon$  pour  $B = 1,0 \text{ mT}$ ,  $r_1 = 1,0 \text{ mm}$ ,  $r_2 = 3,0 \text{ mm}$ ,  $h = 1,0 \text{ mm}$ ,  $n = 1,1 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$  et  $\lambda = 1,8 \times 10^{-17} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ . Commenter l'utilisation du phénomène pour la mesure de champs magnétiques.