

Partie 1 – Modélisation fréquentielle d'un circuit à amplificateur opérationnel - Mines Ponts PSI 2009

1. L'AO est idéal ($i_+ = i_- = 0$) et en fonctionnement linéaire ($\varepsilon = v_+ - v_- = 0$).

Par un diviseur de tension, on obtient $v_+ = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \cdot v_s = v_- = v_e$, et aux bornes de R_1 :

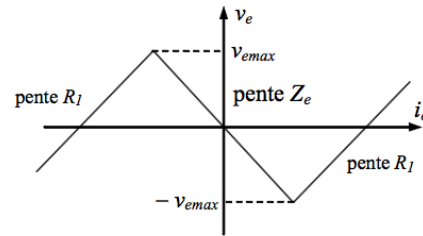
$v_e - v_s = R_1 \cdot i_e$. On élimine v_s entre les deux équations et $R_3 \cdot (v_e - R_1 \cdot i_e) = (R_2 + R_3) \cdot v_e$.

$$\text{D'où } \frac{v_e}{i_e} = Z_e = -\frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}$$

La limite de validité se trouve pour $v_s = \pm V_{sat}$, soit $v_e = \frac{\pm R_3}{R_2 + R_3} \cdot V_{sat} = \pm v_{e \max}$

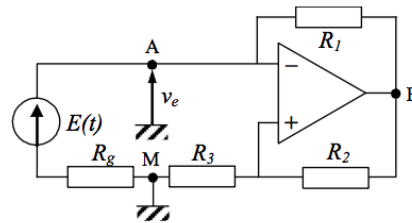
2. Pour $v_s = \pm V_{sat}$, on obtient $v_e = R_1 \cdot i_e \pm V_{sat}$. La limite étant obtenue pour $i_e = \mp \frac{R_2}{R_1 \cdot (R_2 + R_3)} V_{sat}$

On obtient donc la caractéristique suivante :

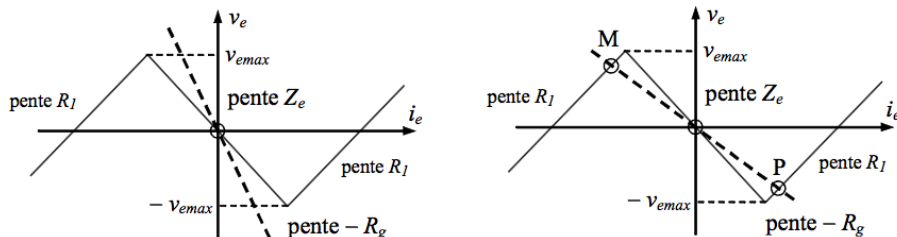


3. On veut visualiser à l'oscilloscope v_e et i_e :

On peut mesurer à l'oscilloscope v_e sans précaution particulière en branchant la voie 1 en A et la masse de l'oscilloscope en M. Par contre la mesure de i_e est plus délicate pour des problèmes de masses : on branche la voie 2 entre A et B en passant par une sonde différentielle.



4. Avec $E = 0$, on obtient un second lien entre v_e et i_e soit $v_e = -R_g \cdot i_e$. On trace cette droite sur le même diagramme que celui de la question 2 :



Si $R_g > \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}$, il n'y aura qu'un seul point de fonctionnement : $v_e = 0$ et $i_e = 0$

Si $R_g < \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}$, on aura alors trois points de fonctionnement : le précédent et deux points de

fonctionnement en régime saturé.

5. Le point M appartient à la droite $v_e = R_1 \cdot i_e + V_{sat}$, l'AO est donc en saturation haute.

Le point P appartient à la droite $v_e = R_1 \cdot i_e - V_{sat}$, l'AO est donc en saturation basse.

6. A_0 est de l'ordre de 10^4 à 10^5 , f_0 de l'ordre de 1 à 10 Hz.

Pour établir l'équation différentielle, on passe en réels l'expression complexe du gain différentiel,

$$\text{soit } \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right) \underline{V_s} = A_0 \cdot \underline{\varepsilon} \text{ donne } v_s(t) + \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{dv_s}{dt}(t) = A_0 \cdot \varepsilon(t)$$

On obtient v_+ et v_- par deux diviseurs de tension et $\varepsilon = v_+ - v_- = \left(\frac{R_3}{R_2 + R_3} - \frac{R_g}{R_1 + R_g}\right) \cdot v_s$

$$\text{D'où : } v_s(t) + \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{dv_s}{dt}(t) = A_0 \cdot \left(\frac{R_3}{R_2 + R_3} - \frac{R_g}{R_1 + R_g}\right) \cdot v_s \quad \text{or } I_e = -\frac{v_s}{R_1 + R_g}$$

$$\text{Soit : } I_e(t) + \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{dI_e}{dt}(t) = A_0 \cdot \left(\frac{R_3}{R_2 + R_3} - \frac{R_g}{R_1 + R_g}\right) \cdot I_e$$

$$\text{Et } \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{dI_e}{dt}(t) + I_e(t) \cdot \left[-A_0 \cdot \left(A - \frac{R_g}{R_1 + R_g}\right) + 1\right] = 0 \quad \text{avec } A = \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

$$7. \text{ On néglige 1 devant } A \cdot A_0 \text{ et on obtient l'équation : } \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{dI_e}{dt}(t) - I_e(t) \cdot \left[A_0 \cdot \left(A - \frac{R_g}{R_1 + R_g}\right)\right] = 0$$

$$\text{Soit : } \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{dI_e}{dt}(t) - I_e(t) \cdot \left[A_0 \cdot \left(\frac{R_3}{R_2 + R_3} - \frac{R_g}{R_1 + R_g}\right)\right] = 0$$

$$\text{Soit : } \frac{dI_e}{dt}(t) - \omega_0 \cdot A_0 \cdot \left(\frac{R_1 \cdot R_3 - R_2 \cdot R_g}{(R_2 + R_3) \cdot (R_1 + R_g)}\right) \cdot I_e(t) = 0$$

On en tire donc les résultats de la question 4 : $R_g < \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}$ le système est instable, $R_g > \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}$ le système est stable.

Si $R_g < \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}$, pour la valeur initiale (M ou P), ce sont les perturbations qui vont décider du sens

de l'évolution. Une fois le système stabilisé en M ou en P, une perturbation peut le faire basculer sur l'autre point de fonctionnement saturé : si le système est en M, alors $I_e = -\frac{V_{sat}}{R_1 + R_g}$,

$I_{e \max} = -\frac{R_2}{R_1 \cdot (R_2 + R_3)} V_{sat}$, si une perturbation de valeur supérieure à $I_{e \max} - I_e$ est appliquée, alors le

système basculera sur P, car si $I_e \nearrow$, alors $\varepsilon \searrow$

8. On écrit une loi des mailles : $v_e = Z_e \cdot I_e = -L \cdot \frac{dI_e}{dt} - R \cdot I_e - \frac{q}{C}$.

On dérive par rapport au temps : $L \cdot \frac{d^2 I_e}{dt^2} + (R + Z_e) \cdot \frac{dI_e}{dt} + \frac{1}{C} \cdot I_e = 0$

9. Le système est le siège d'oscillations purement sinusoïdales si l'équation différentielle est celle d'un oscillateur harmonique : soit $R + Z_e = 0$.

L'équation devient donc : $\frac{d^2 I_e}{dt^2} + \frac{1}{LC} \cdot I_e = 0$ d'où $f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

Pour qu'effectivement l'oscillation démarre, il faut avoir une solution en exponentielle croissante soit : $R + Z_e < 0$ ce qui donne : $R < \frac{R_1 R_3}{R_2}$

10. La résistance r_b est la résistance du fil de cuivre constituant l'enroulement de la bobine.

11. On peut faire varier la fréquence d'oscillation du circuit en faisant varier la valeur de la capacité C. On cherche la limite de démarrage des oscillations pour chaque fréquence (c'est-à-dire chaque valeur de capacité) : celle-ci est obtenue pour $R + r_b = \frac{R_1 R_3}{R_2}$, ce qui permet d'avoir accès à la valeur de r_b pour chaque fréquence.

Avec les données du texte : $\frac{\Delta r_b}{r_0} = \alpha \omega^2 = 20 \cdot 10^{-2} = 20\%$ (pour $\omega = 2,00 \cdot 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$)

12. L'association est en parallèle : $\underline{Z} = \frac{R_p \cdot (jL\omega + r_0)}{R_p + r_0 + jL\omega}$. On multiplie haut et bas par le complexe conjugué : $\underline{Z} = \frac{r_0 \cdot R_p \cdot (r_0 + R_p) + L^2 \cdot \omega^2 \cdot R_p + jL\omega R_p^2}{(R_p + r_0)^2 + L^2 \cdot \omega^2} \approx r_0 + \frac{L^2}{R_p} \cdot \omega^2 + jL\omega$ avec les hypothèses données par l'énoncé.

On en tire $\alpha \cdot r_0 = \frac{L^2}{R_p}$ d'où $R_p = \frac{L^2}{\alpha \cdot r_0} = 2,17 \cdot 10^5 \Omega$

Et $\omega \ll \frac{R_p}{L} = 2,17 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$, on peut donc choisir avec un rapport 100, $\omega < 2,10^4 \text{ rad.s}^{-1}$.

13. On travaille en complexes, on passera en réels à la fin du calcul avec la correspondance $j\omega \longleftrightarrow \frac{d}{dt}$

On reprend la loi des mailles précédente : en notant Z l'impédance de la "bobine" :

$$\underline{Z} \cdot \underline{I}_e + R \cdot \underline{I}_e + \frac{\underline{I}_e}{jC\omega} + Z_e \cdot \underline{I}_e = 0$$

On remplace Z par sa valeur : $\frac{R_p \cdot (jL\omega + r_0)}{R_p + r_0 + jL\omega} \cdot \underline{I}_e + R \cdot \underline{I}_e + \frac{\underline{I}_e}{jC\omega} + Z_e \cdot \underline{I}_e = 0$

D'où $jC\omega R_p \cdot (jL\omega + r_0) \cdot \underline{I}_e + jC\omega \cdot (R_p + r_0 + jL\omega) \cdot R \cdot \underline{I}_e + (R_p + r_0 + jL\omega) \cdot \underline{I}_e + jC\omega \cdot (R_p + r_0 + jL\omega) \cdot Z_e \cdot \underline{I}_e = 0$

En développant et en ordonnant :

$$(j\omega)^2 \underline{I}_e \cdot [LCR_p + LC(R + Z_e)] + (j\omega) \underline{I}_e \cdot [L + CR_p r_0 + C \cdot (R_p + r_0) \cdot (R + Z_e)] + (R_p + r_0) \cdot \underline{I}_e = 0$$

Soit l'équation différentielle finale :

$$\left[LCR_p + LC \left(R - \frac{R_1 R_3}{R_2} \right) \right] \frac{d^2 I_e}{dt^2} + \left[L + CR_p r_0 + C \cdot (R_p + r_0) \cdot \left(R - \frac{R_1 R_3}{R_2} \right) \right] \frac{dI_e}{dt} + (R_p + r_0) \cdot I_e = 0$$

14. Avec les hypothèses du texte : $r_0 \ll R_p$ et $(R + Z_e) \ll R_p$, et avec la forme souhaitée :

$$L \cdot \frac{d^2 I_e}{dt^2} + \left[\frac{L}{CR_p} + r_0 + R - \frac{R_1 R_3}{R_2} \right] \cdot \frac{dI_e}{dt} + \frac{1}{C} \cdot I_e = 0$$

On a bien la forme voulue en posant $R_T = \left[\frac{L}{CR_p} + r_0 + R - \frac{R_1 R_3}{R_2} \right]$

On a la forme habituelle de l'équation de relaxation d'un RLC série, soit

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{L \cdot \omega_0}{R_T} = \frac{1}{R_T} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

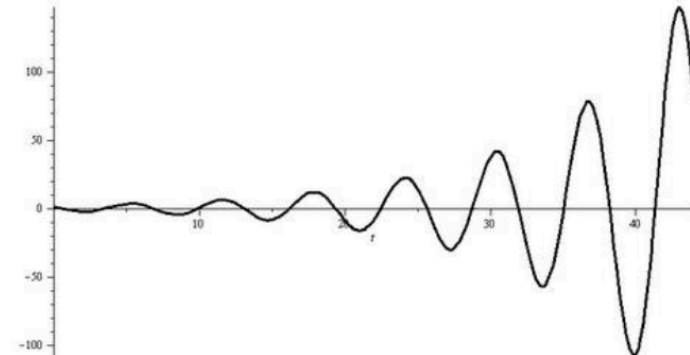
15. On écrit le discriminant de l'équation caractéristique : $\Delta = R_T^2 - 4 \frac{L}{C}$, le texte demande de travailler dans le cas où $\Delta < 0$, on aura donc le cas oscillant.

Avec les paramètres ω_0 et Q, l'équation différentielle s'écrit : $\frac{d^2 I_e}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dI_e}{dt} + \omega_0^2 I_e = 0$

Les solutions de l'équation caractéristique sont : $r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \cdot \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

Les solutions réelles s'écrivent : $I_e(t) = \frac{I_{e0}}{\cos \varphi} \cdot \exp\left[-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right] \cdot \cos\left(\omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \cdot t + \varphi\right)$ où I_{e0} et φ sont des constantes dépendant des conditions initiales.

Ce qui donne ce type d'allure, avec $R_T < 0$, ($Q < 0$)



Si $R_T \rightarrow 0^-$, alors le coefficient dans l'exponentielle tend vers 0, les oscillations se stabilisent à une certaine amplitude.

On a alors : $R_T = \left[\frac{L}{CR_p} + r_0 + R - \frac{R_1 R_3}{R_2} \right] = 0$ avec $\omega^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

On remplace dans l'expression $\frac{1}{C}$ par $L \cdot \omega_0^2$ et avec (12) : $\frac{L}{CR_p} = \frac{L^2}{R_p} \cdot \omega^2 = \alpha \cdot r_0 \cdot \omega^2$

Soit $r_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \omega^2) + R = r_b + R = \frac{R_1 R_3}{R_2} = -Z_e$ la "résistance négative" doit bien compenser les autres résistances du circuit.

16. On revient à la figure 4, l'équation différentielle est : $L \cdot \frac{d^2 I_e}{dt^2} + \left[R - \frac{R_1 R_3}{R_2} \right] \cdot \frac{dI_e}{dt} + \frac{1}{C} \cdot I_e = 0$

La valeur constante U_{\min} qui permet d'obtenir une émission lumineuse est :

$$U_{\min} = V_{sb}$$

Q33. Si $i_1 = i_0 = 0,73$ A, alors $u_1 = V_{sb}$ d'où :

$$U_0 = V_{sb} + r_e i_0 = 10,2 \text{ V}$$

$$\Phi_{e0} = \eta_{\text{led}} V_{sb} i_0 = 0,70 \text{ W}$$

Q34. De $p(t) = p_m \cos(\omega_p t + \alpha_p)$ et $a(t) = a_m \cos(\omega_a t)$ (phase à l'origine choisie nulle comme dans la suite de l'énoncé), on en déduit :

$$m_1(t) = k p_m a_m \cos(\omega_p t + \alpha_p) \cos(\omega_a t)$$

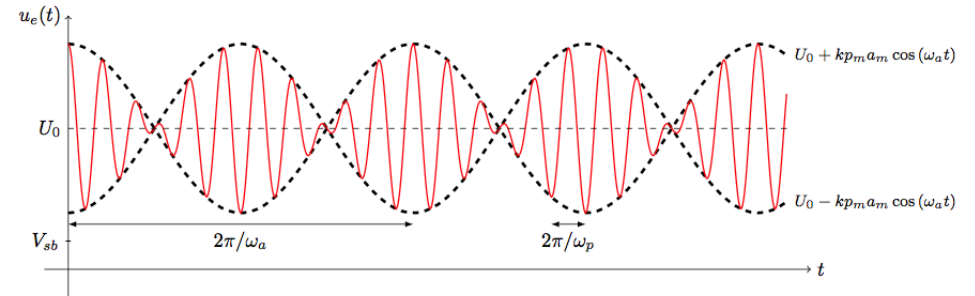
D'où :

$$u_e(t) = U_0 + k p_m a_m \cos(\omega_p t + \alpha_p) \cos(\omega_a t)$$

La valeur minimale du produit de cosinus est -1 , donc la valeur minimale de $u_e(t)$ est $U_0 - k p_m a_m$. Cette valeur doit être supérieure à V_{sb} d'où la condition sur $k p_m a_m$:

$$k p_m a_m < U_0 - V_{sb} = r_e i_0 = 7,3 \text{ V}$$

Q35. u_e est un signal de moyenne U_0 . La partie variable est une oscillation à $f_p = 10 f_a$, modulée par f_a :



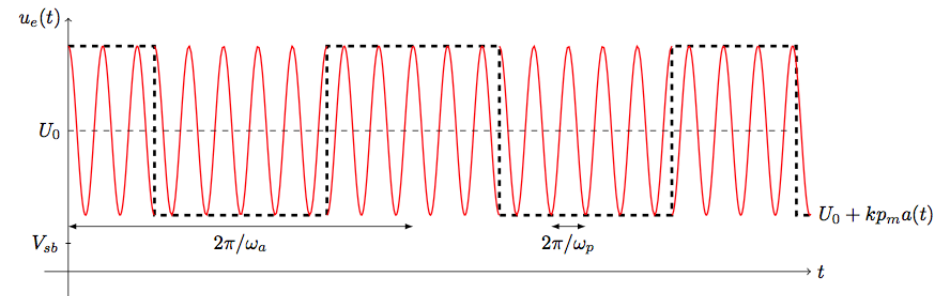
Pour obtenir le spectre, on linéarise l'expression en utilisant $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$:

$$u_e(t) = U_0 + \frac{k p_m a_m}{2} \cos((\omega_p + \omega_a)t + \alpha_p) + \frac{k p_m a_m}{2} \cos((\omega_p - \omega_a)t + \alpha_p)$$

Il y a trois fréquences : nulle, $f_p + f_a$ et $f_p - f_a$:



Q36. Graphique, le signal modulant est un carré au lieu d'une sinusoïde :



On a alors $R_T = R - \frac{R_1 R_3}{R_2}$, si $R_T < 0$, alors l'intensité du courant est croissante, et pas forcément oscillante, la condition d'oscillation dépendant du signe du discriminant de l'équation caractéristique.

17. La limite est la saturation de l'amplificateur opérationnel : soit une limitation de puissance, ou de tension de sortie, ou encore de courant de sortie, suivant la première limitation atteinte. Cette limitation n'apparaît pas dans l'équation différentielle car celle-ci a été écrite avec un comportement linéaire de l'AO.

18. Les 3 zéros sont $I_e = 0$, $I_e = \pm \frac{V_{sat}}{R_1}$. On obtient alors un polynôme d'ordre 3 qui s'écrit sous la

$$\text{forme } v_e = K I_e \left(I_e - \frac{V_{sat}}{R_1} \right) \left(I_e + \frac{V_{sat}}{R_1} \right) = K I_e \left(I_e^2 - \left(\frac{V_{sat}}{R_1} \right)^2 \right)$$

La dérivée en $I_e = 0$ vaut $\frac{dv_e}{dI_e}(0) = -\frac{R_1 R_3}{R_2} = -K \frac{V_{sat}^2}{R_1^2}$ d'où $K = \frac{R_1^3 R_3}{R_2 V_{sat}^2}$

19. On reprend la loi des mailles de la question 8 dérivée par rapport au temps :

$$\frac{dv_e}{dt} + L \frac{d^2 I_e}{dt^2} + R \frac{dI_e}{dt} + \frac{1}{C} I_e = 0, \text{ avec } \frac{dv_e}{dt} = \frac{R_1^3 R_3}{R_2 V_{sat}^2} \left(3 I_e^2 \frac{dI_e}{dt} - \frac{V_{sat}^2}{R_1^2} \frac{dI_e}{dt} \right)$$

$$\text{Soit : } L \frac{d^2 I_e}{dt^2} + \left[R + \frac{R_1^3 R_3}{R_2 V_{sat}^2} \left(3 I_e^2 - \frac{V_{sat}^2}{R_1^2} \right) \right] \frac{dI_e}{dt} + \frac{1}{C} I_e = 0$$

$$\text{On pose } R'_T = \left[R + \frac{R_1^3 R_3}{R_2 V_{sat}^2} \left(3 I_e^2 - \frac{V_{sat}^2}{R_1^2} \right) \right]$$

Si I_e est croissant, alors $R'_T \rightarrow 0^-$ (R'_T est croissant) : l'exponentielle devient moins rapide et devient nulle pour une valeur de I_e telle que $R'_T = 0$.

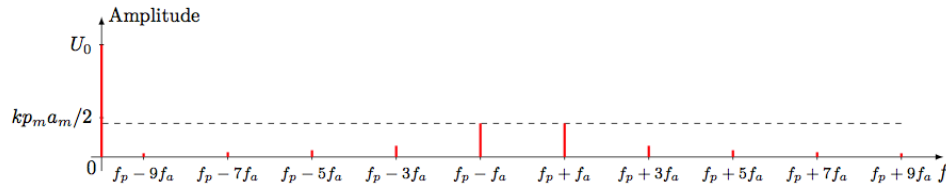
Partie 2 – Connexion LiFi – Centrale MP 2024

III.1 Émission du signal lumineux

Q32. La condition d'émission est $i_1 > 0$. Or $u_1 + r_e i_1 = u_e$ et $u_1 = V_{sb}$ si et seulement si $i_1 \geq 0$. Ainsi, la condition d'émission devient :

$$u_e > V_{sb}$$

Spectre : le spectre est déplié autour de f_p :



III.2 Réception du signal lumineux et extraction de l'information

Q37. L'émission se fait de façon homogène sur une semi-sphère. À distance d de la diode émettrice, le flux lumineux par unité de surface est :

$$\frac{\Phi_e}{2\pi d^2} = \frac{K_e (u_e(t) - V_{sb})}{2\pi r_e d^2}$$

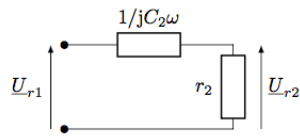
Ainsi, le flux reçu est :

$$\Phi_r = s_r K_e \frac{u_e(t) - V_{sb}}{2\pi r_e d^2}$$

Enfin, $u_r = r_i i_2 = r K_r \Phi_r$ d'où :

$$u_r(t) = r s_r K_e K_r \frac{u_e(t) - V_{sb}}{2\pi r_e d^2}$$

Q38. Le filtre F est un filtre passe-haut d'ordre 1. Il permet d'éliminer la composante continue. On étudie le circuit en régime sinusoïdal forcé : les tensions sont remplacées par leurs amplitudes complexes et les composants par leurs impédances :



On applique la formule du pont diviseur de tension :

$$U_{r2} = \frac{r_2}{r_2 + \frac{1}{jC_2\omega}} U_{r1} = \frac{j r_2 C_2 \omega}{1 + j r_2 C_2 \omega} U_{r1}$$

On identifie $\omega_c = 1/r_2 C_2$:

$$H = \frac{j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

Q39. On a :

$$u_r(t) = \frac{r s_r K_e K_r}{2\pi r_e d^2} (U_0 - V_{sb} + k p_m a_m \cos(\omega_p t + \alpha_p) \cos(\omega_a t))$$

Ainsi, comme $u_{r1} = K u_r$ et u_{r2} représente u_{r1} débarrassé de sa composante continue (puisque $\omega_c \ll \omega_a, \omega_p$) :

$$u_{r2}(t) = \frac{r s_r K_e K_r K}{2\pi r_e d^2} k p_m a_m \cos(\omega_p t + \alpha_p) \cos(\omega_a t)$$

D'où :

$$u_{r3}(t) = \frac{r s_r K_e K_r K}{2\pi r_e d^2} k^2 p_m^2 a_m \cos^2(\omega_p t + \alpha_p) \cos(\omega_a t)$$

On identifie :

$$U_{3m} = \frac{r s_r K_e K_r K}{2\pi r_e d^2} k^2 p_m^2 a_m$$

Q40. On a :

$$\cos^2(\omega_p t + \alpha_p) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega_p t + 2\alpha_p)$$

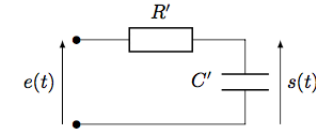
Ainsi :

$$\cos^2(\omega_p t + \alpha_p) \cos(\omega_a t) = \frac{1}{2} \cos(\omega_a t) + \frac{1}{4} \cos((2\omega_p + \omega_a)t + 2\alpha_p) + \frac{1}{4} \cos((2\omega_p - \omega_a)t + 2\alpha_p)$$

En choisissant un filtre passe-bas de coupure $\omega'_c \ll \omega_p$ et $\omega'_c \gg \omega_a$, on élimine les deux derniers termes, il reste :

$$u_{r4} = \frac{U_{3m}}{2} \cos(\omega_a t)$$

On peut proposer un filtre passe-bas RC du premier ordre :



La pulsation de coupure est $\omega'_c = 1/(R'C')$.

III.3 Débit binaire du LiFi

Q41. On a :

$$f_{ck} = 10 \times 10^6 \text{ Hz} = 10^7 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad f_p = \text{qq} \cdot 10^9 \text{ Hz} > 100 \times 10^7 \text{ Hz}$$

La condition est vérifiée.

Q42. La fréquence de la porteuse est :

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3,00 \times 10^8}{4,70 \times 10^{-7}} = 6,4 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

La fréquence de la sous-porteuse est $f_{ck} < 6 \times 10^{12} \text{ Hz}$: soit un débit descendant pouvant aller jusqu'à $5 \times 10^{12} \text{ bit} \cdot \text{s}^{-1}$. Néanmoins, des éléments autres dans le circuit (comme la photodiode et son temps de réponse) jouent sans doute fortement sur le débit possible.

Partie 3 – Conditionnement du signal : mesure de déplacement d'un accéléromètre Mines Ponts MP 2013

- Écrivons la loi des nœuds au point de potentiel v_3 , sous la forme $0 = \frac{V_s - v_3}{R} + \frac{0 - v_3}{R} + C_1 \frac{d}{dt} (v_1 - v_3) + C_2 \frac{d}{dt} (v_2 - v_3)$, donc aussi $\frac{V_s}{R} + (C_1 - C_2) V_1 \omega \cos(\omega t) = \frac{2}{R} v_3 + (C_1 + C_2) \frac{dv_3}{dt}$ qu'on écrit encore (après multiplication par $R/2$) $\tau \frac{dv_3}{dt} + v_3(t) = \frac{V_s}{2} + V_2 \omega \tau \cos(\omega t)$
- La solution générale de l'équation homogène (régime libre) est $V_0 e^{-t/\tau}$; une solution particulière de l'équation complète (régime forcé) sera cherchée sous la forme $\alpha + \beta \cos(\omega t + \varphi)$; la substitution dans l'équation différentielle impose $\alpha = \frac{V_s}{2}$ et, en notations complexe, $V_2 \omega \tau = \beta e^{j\varphi} [1 + j\omega\tau] = V_2 \omega \tau$. Finalement, on

peut écrire la solution demandée $v_3(t) = V_0 e^{-t/\tau} + \frac{V_s}{2} + V_2 \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \cos(\omega t - \varphi)$ avec pour retard de phase $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ et $\tan \varphi = -\omega\tau$

6. Si $t \gg \tau$, $e^{-t/\tau} \rightarrow 0$ (le régime forcé est atteint) et $\omega\tau = 5 \cdot 10^2 \gg 1$ donc $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\omega\tau}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \rightarrow 1$ donc

$$v_3(t) \simeq \frac{V_s}{2} + V_2 \sin(\omega t)$$

7. En négligeant les effets de bord (figure 1), le potentiel électrostatique ne dépend que de x donc $\vec{E} = -\frac{dV}{dx} \hat{e}_x$ avec, au voisinage de chacune des surfaces métalliques, $\vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \hat{e}_x$, par application du théorème de Coulomb. Entre les armatures, l'équation de Maxwell-Gauss $\text{div } \vec{E} = 0$ (dans le vide) s'écrit $\frac{dE}{dx} = 0$ donc finalement $\frac{dV}{dx} = -\frac{Q}{\epsilon_0 S}$, $\forall x$ permet d'écrire la tension $U = V(0) - V(e) = -\int_0^e \frac{dV}{dx} dx$ soit $Q = CU$ avec l'expression (classique) $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$

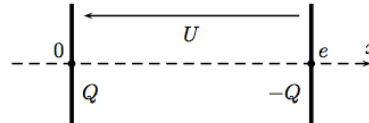


FIGURE 1 – Capacité d'un condensateur plan

8. Pour le condensateur de droite, d'épaisseur $d - L$, $C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{d - L}$; de même, $C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{d + L}$

9. On en déduit immédiatement $\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} = -\frac{L}{d}$ donc $v_3(t) = \frac{V_s}{2} - \frac{L}{d} V_1 \sin(\omega t)$

10. $s_1 = h v_1 v_3$ donc, après développements et en remarquant que $\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega t))$, il vient

$$s_1(t) = h \left[\frac{V_s^2}{4} - \frac{L}{2d} V_1^2 \right] + h \frac{V_1 V_s}{2} \left[1 - \frac{L}{d} \right] \sin(\omega t) + h \frac{L}{2d} V_1^2 \cos(2\omega t)$$

Le filtre utilisé a pour fonction de

transfert $\frac{s}{s_1} = \frac{1}{1 + jR_f C_f \omega}$; c'est donc un filtre passe-bas du premier ordre avec ici $R_f C_f \omega = 10^2 \gg 1$: les termes de pulsation ω et 2ω donc complètement coupés par le filtre tandis que la composante continue est conservée,

$s(t) \simeq h \left[\frac{V_s^2}{4} - \frac{L(t)}{2d} V_1^2 \right]$ Comme enfin $L(t) = -\frac{a(t)}{\omega_0^2}$ et $\omega_0^2 = \frac{2k}{m}$, il vient donc

aussi $s(t) \simeq h \left[\frac{V_s^2}{4} + \frac{m}{4dk} V_1^2 a(t) \right]$ et les mesures des variations de $s(t)$ permettent une mesure de $a(t)$.