

## TD Transport bloc 2 – Conduction thermique

### Bilan d'énergie en géométrie sphérique sans terme source - Régime stationnaire

**Compétence** : réaliser des bilans sous forme globale et locale

#### Exercice 1. Equilibre thermique d'un mammifère

Un mammifère peut être très sommairement schématisé par une sphère de muscles de centre O, de rayon R, dont le métabolisme dégage la **puissance thermique  $P_V$  par unité de volume**, uniformément dans tout son volume. La **puissance totale** produite sera notée **P**.

L'animal est plongé dans l'air ou dans l'eau, c'est à dire dans un milieu de conductivité thermique  $\lambda$  ; la **température du milieu ambiant** loin de l'animal est notée  **$T_\infty = 20^\circ\text{C}$** .

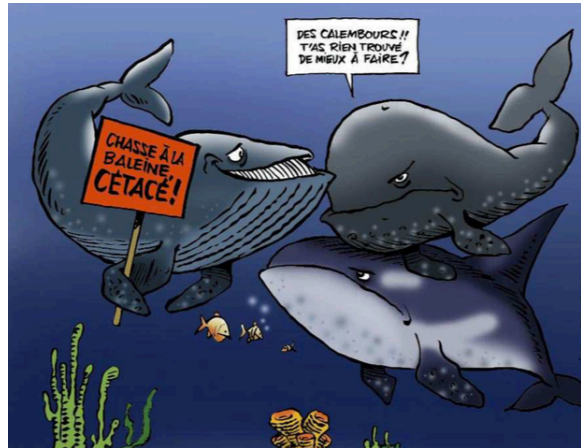
On s'intéresse à la **température du milieu ambiant au voisinage du mammifère**, pour  $r \geq R$ .

1. Quelle sont les lois d'échelle (fonctions de R), de la puissance dégagée et de la puissance échangée avec l'environnement, pour un animal à sang chaud ? Expliquer alors qu'il existe des tailles maximales et minimales pour ces animaux. Le métabolisme des grands mammifères est assez lent alors que celui des petits beaucoup plus rapide. Cette information est-elle cohérente avec votre réponse précédente ?

En coordonnées sphériques, l'expression du gradient est la suivante :

$$\vec{\text{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

2. D'après la symétrie sphérique du problème, les grandeurs physiques ne dépendent que de r. Rappeler la loi de Fourier, et donner l'expression du vecteur densité de courant.
3. Etablir la condition aux limites à la surface du mammifère en  $r = R$ .



4. En régime stationnaire, quelle propriété présente le vecteur densité de courant ? Le flux thermique dépend-il de r ? Exploiter cette propriété pour établir l'équation différentielle vérifiée par T(r) pour  $r \geq R$ .

5. En déduire l'expression de T(r) :  $T(r) = \frac{P}{4\pi\lambda r} + T_\infty$  et représenter T(r).

6. Exprimer la **température cutanée de l'animal  $T_C$**  en  $r = R$  en fonction de  $P_V$  la puissance volumique. Comment varie  $T_C$  en fonction de  $\lambda$  (à R fixé), et en fonction de R (à  $\lambda$  fixée) ? Commenter.

7. Evaluer  $P_V$  pour avoir  $T_C = 30^\circ\text{C}$  dans l'eau et dans l'air et commenter.

**Données** :  $\lambda(\text{eau}) = 500 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  et  $\lambda(\text{air}) = 10 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  R = 10 cm

Ces valeurs de conductivité élevées tiennent compte de la convection.

Evaluer le rayon minimum permettant de maintenir la température corporelle dans un milieu (à  $\lambda$  fixée).

8. Pour un petit mammifère marin de rayon  $R = 10 \text{ cm}$ , de masse volumique proche de celle de l'eau, évaluer en J puis en kcal l'énergie quotidienne nécessaire au maintien de sa température à  $T_C = 30^\circ\text{C}$ . Sachant que l'apport calorique du poisson est en moyenne de  $2000 \text{ kcal.kg}^{-1}$ , quelle masse doit-il manger ? Commenter en comparaison de son propre poids.

**Données** :  $1 \text{ kcal} = 4184 \text{ J}$

9. On considère à présent que ce mammifère possède une épaisse couche de graisse de 2 cm, et de conductivité thermique et  $\lambda(\text{gras}) = 0,2 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ , qui entoure son corps à partir (entre  $r = 10 \text{ cm}$  et  $r = 15 \text{ cm}$ ).

Etablir l'expression du nouveau profil de température dans la couche de gras, en supposant qu'il doit maintenir sa température corporelle intérieure à  $T_C = 30^\circ\text{C}$ .

En déduire l'expression et la valeur de la puissance volumique nécessaire.

Quelle quantité journalière de poisson est nécessaire ?

**Réponses** : 1.  $P_{\text{dégagée}} \propto V \propto R^3$  avec R taille de l'animal,  $P_{\text{échangée}} \propto S \propto R^2$ , grands mammifères + difficile d'évacuer la chaleur produite -> limitation en taille max comme éléphant, et métabolisme + lent pour produire une puissance volumique + faible, petit mammifère (musaraigne de quelques cm !!) + performant dans l'évacuation et les échanges, ce qui fixe une taille mini car évacuation de très efficace d'énergie thermique ; 2.  $T(M,t) = T(r)$  en régime stationnaire ->  $\vec{j} =$

$$-\lambda \frac{dT}{dr} \vec{u}_r = j(r) \vec{u}_r ; 3.$$

$$P = -\lambda \left( \frac{dT}{dr} \right)_{r=R} 4\pi R^2 ; 4. \frac{dT}{dr} = -\frac{P}{4\pi\lambda r^2} ; 6. T_C = P_V R^2 / 3\lambda + T_\infty \rightarrow \lambda \uparrow \text{ alors } T_C \downarrow :$$

évacuation + efficace -> R  $\uparrow$  alors  $T_C \uparrow$  : production thermique + efficace ; 7.  $P_V = \frac{3\lambda(T_C - T_\infty)}{R^2}$   $P_V(\text{eau}) = 1,5 \cdot 10^6 \text{ W.m}^{-3}$  et  $P_V(\text{air}) = 3 \cdot 10^4 \text{ W.m}^{-3}$  transfert + efficace dans l'eau -> mammifères marins de taille minimale + grande que dans l'air,  $R_{\text{min}} =$

$\sqrt{3\Delta T\lambda/P_V}$ ; 8.  $E(\text{eau}) = 5,4 \cdot 10^8 \text{ J}$  soit 130 000 kcal  $\rightarrow$  75 kg de poisson par jour avec une masse d'environ 4 Kg 20 fois son poids  $\rightarrow$  peu réaliste ; 9. En régime stationnaire  $T(r)$  toujours de la forme  $A/r + B$  avec  $T(r=R_1)=T_C$  et  $T(r=R_2)=T_\infty$  donc  $T(r) = \frac{T_C - T_\infty}{R_1 - R_2} \frac{1}{r} + \frac{T_C R_1 - T_\infty R_2}{R_1 - R_2}$ , continuité du flux thermique en  $r = R_1$   $P_V = \frac{3\lambda_{gras}(T_C - T_\infty) R_2}{R_2 - R_1} \frac{1}{R_1^2}$  alors  $E \approx 8000 \text{ kcal}$   $\rightarrow$  une seule fois son poids ! stratégie évolutive viable, autre méthode exploiter la résistance thermique avec  $\Delta T = R_{th} P$  et  $P = P_V \cdot V$  Et calcul de  $R_{th} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$

## Bilan d'énergie en présence de source thermique avec effet Joule

### Géométrie cartésienne et Régime stationnaire

#### Compétences :

- réaliser des bilans sous forme globale et locale
- manipuler le terme source local et intégral de l'effet Joule

### Exercice 2 : Fusible chauffé par effet Joule

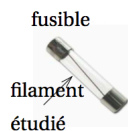
Le fusible envisagé est un cylindre plein, conducteur électrique d'axe Ox, de section S, de longueur 2L, de conductivité thermique  $\lambda$ , de conductivité électrique  $\gamma$ , parcouru par un courant I.

Sa surface latérale est calorifugée : dans la réalité la faible densité de l'air, confiné dans le fusible, limite fortement toute

diffusion thermique, d'où l'équivalent d'un fil calorifugé. Ses extrémités  $x = -L$  et  $x = L$  sont en contact avec le milieu ambiant de température  $T_0$ . On considère un problème unidimensionnel, l'origine en  $x = 0$  sera prise au milieu du fil.

Données :  $\lambda = 65 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  ;  $\gamma = 1,2 \cdot 10^6 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$  ;  $T_0 = 290 \text{ K}$  ;  $2L = 2 \text{ cm}$ .

1. Expliciter la puissance volumique dissipée par effet Joule  $P_V$  en fonction de I, S et  $\gamma$ .
2. Réaliser un bilan d'énergie local en régime stationnaire pour établir la loi d'évolution spatiale de la température  $\rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} + P_V/\lambda = 0$
3. L'intégrer pour établir le profil de température dans le fil (le représenter). Commenter.
4. Le fusible fond pour  $T_f = 400 \text{ K}$ , et on veut un fusible admettant  $I_{\max} =$



*Les premiers fusibles se présentaient sous forme d'un fil nu, dont la couleur et la ductilité rappelait le plomb, et que l'utilisateur enroulait autour de bornes métalliques sur un support en céramique. Il en a résulté l'appellation familière (et erronée) de « plomb » pour désigner un fusible, ainsi que quelques dérivés argotiques (« péter les plombs », etc.).*

16 A. À quel endroit le fusible va-t-il se rompre si  $I > I_{\max}$  ? Quelle section S doit-on prévoir ? Donner sa valeur numérique en  $\text{mm}^2$ .

5. Exprimer les puissances thermiques transférées par conduction en  $x = -L$  et en  $x = L$  :  $P_{th}(-L)$  et  $P_{th}(L)$ . Commenter leurs signes. Les comparer à la puissance totale apportée par effet Joule.

**Réponses** : 1.  $P_V = I^2/(\gamma S^2)$  ; 3.  $T(x) = T_0 + \frac{P_V}{2\lambda}(L^2 - x^2)$  ; 4.  $S = \frac{I_{\max} L}{\sqrt{2\lambda\gamma(T_f - T_0)}} = 1,6 \text{ mm}^2$  ; 5.  $P_{th}(L) = P_{th}(-L) = -P_{tot}/2$

## Associer et exploiter les résistances thermiques

### Exercice 3 : Association de résistances thermiques et évaluation d'un temps caractéristique de diffusion – pour s'entraîner

1. Deux thermostats de températures  $T_1$  et  $T_2$  sont reliés par 3 barres de cuivre de longueurs  $L_1 = L_2 = 2L_3$  et de sections  $S_3 = S_2 = 4S_1$ . Que peut-on dire des flux thermiques 1, 2 et 3 traversant chacune des barres ?

- (a)  $\Phi_1 < \Phi_2 < \Phi_3$       (b)  $\Phi_3 < \Phi_2 < \Phi_1$       (c)  $\Phi_2 < \Phi_3 < \Phi_1$       (d) aucune de ces réponses

2. Une brique de construction est modélisée par le schéma ci-dessus. Elle est réalisée en matériau de conductivité thermique  $\lambda_b$  et l'air qu'elle contient a la conductivité thermique  $\lambda_a$ . Estimer la puissance thermique la traversant en fonction des résistances thermiques  $R_1 = \frac{3}{L\lambda_b}$

$$\text{et } R_2 = \frac{1}{L} \left( \frac{1}{\lambda_a} + \frac{2}{\lambda_b} \right).$$

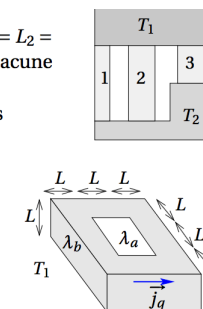
- (a)  $(T_1 - T_2) \frac{R_1 + 2R_2}{R_1 R_2}$       (b)  $\frac{T_1 - T_2}{R_1 + R_2}$       (c)  $\frac{T_1 - T_2}{R_1 - 2R_2}$

3. Estimer la durée caractéristique de chauffe d'un moteur de taille  $L \approx 30 \text{ cm}$ . On prendra  $D_{th} \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

et  $\lambda = 100 \text{ W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$  (métal = bon conducteur thermique)

On modélise en général la compression et la détente dans l'air dans un moteur à quatre temps par une évolution adiabatique. Cette approximation est-elle valide pour un moteur tournant à 6000 tours par minute ?

### Exercice 4 : Dimensionnement du chauffage d'une voiture de TGV



## → Association de résistances thermiques avec flux diffusif et conducto-convectif

### Extrait de concours Centrale TSI 2019

#### II.A – Équation de la diffusion thermique dans une paroi solide

Soit le parallélépipède représenté sur la figure 10. On considère le problème unidimensionnel suivant l'axe  $(Ox)$  (toutes les grandeurs ne dépendent a priori que de  $x$ , éventuellement du temps  $t$  et sont uniformes sur toute section orthogonale à  $(Ox)$ ).

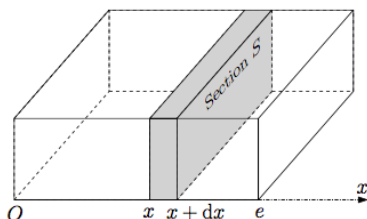


Figure 10

On suppose qu'un flux thermique traverse ce volume. L'épaisseur de la paroi (suivant  $(Ox)$ ) est  $e$  et sa section  $S$ . On a également représenté une petite tranche comprise entre  $x$  et  $x + dx$ .

Les notations utilisées sont :

- masse volumique du matériau  $\rho$  ;
- capacité thermique massique  $c$  ;
- conductivité thermique  $\lambda$  ;
- vecteur densité de flux thermique  $\vec{j}(x, t) = j(x, t) \vec{u}_x$  ;
- champ de température dans le parallélépipède  $T(x, t)$ .

**Q 37.** Exprimer le transfert thermique  $\delta Q_{in}$  entrant de la tranche d'épaisseur  $dx$  pendant une durée  $dt$  en fonction de  $\frac{\partial j}{\partial x}$  et des données. ici  $\delta Q_{int}$  désigne globalement la quantité entrante – la quantité sortante

**Q 38.** Exprimer la variation d'énergie interne  $dU$  de cette tranche pendant cette même durée  $dt$  au cours de laquelle la température varie de  $dT$ .

**Q 39.** En appliquant un résultat de la thermodynamique que l'on rappellera, en déduire une relation entre  $\frac{\partial j}{\partial x}$  et  $\frac{\partial T}{\partial t}$ .

**Q 40.** Rappeler l'expression de la loi de Fourier (dans ce cas particulier unidimensionnel).

On peut déduire de ce qui précède l'équation dite de la chaleur ou de la diffusion thermique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

**Q 41.** Donner, en le justifiant à partir des résultats des questions 39 et 40, l'expression de  $D$  en fonction des données.

#### II.B – Régime stationnaire

Dans cette sous-partie le système est en régime stationnaire. On suppose que :

$$T(x = 0) = T_1$$

$$T(x = e) = T_2$$

**Q 42.** Déterminer l'expression de  $T(x)$ .

**Q 43.** En déduire l'expression de la densité de flux thermique  $j(x)$ , ainsi que la puissance thermique  $\mathcal{P}_{th}$  traversant une section quelconque de surface  $S$  orthogonale à  $(Ox)$  et orientée dans le sens des  $x$  positifs. Que peut-on dire du champ  $\vec{j}(x)$  dans le volume étudié ?

**Q 44.** Définir la résistance thermique  $R_{th}$  du volume et l'exprimer en fonction de  $\lambda$ ,  $S$  et  $e$ .

#### Loi de Newton

On suppose qu'en plus des phénomènes purement diffusifs s'ajoutent des phénomènes conducto-convectifs aux interfaces paroi / fluide (air) ; pour simplifier on ne les prendra en compte qu'en  $x = e$ .

La modélisation de ces phénomènes par la loi de Newton consiste à supposer qu'il existe une discontinuité de température entre la paroi et le fluide et un flux thermique entre les deux de sorte que

$$\vec{j}_{cc} = h (T_{2,p} - T_{2,f}) \vec{u}_x$$

où  $\vec{j}_{cc}$  est la densité de flux conducto-convectif sortant de la paroi,  $h$  le coefficient de conducto-convexion de l'interface paroi / fluide,  $T_{2,p}$  la température en  $x = e$  de la paroi et  $T_{2,f}$  la température de l'air côté droit.

**Q 45.** Quelle est la puissance thermique  $\mathcal{P}_{cc}$  échangée par conducto-convexion à travers la surface  $S$  en  $x = e$  ?

**Q 46.** En déduire l'expression de la résistance thermique  $R_{cc}$  équivalente à ajouter en série à  $R_{th}$  pour modéliser la conducto-convexion en  $x = e$ .

#### II.C – Chauffage d'une voiture de TGV

Cette partie est moins guidée que le reste du sujet et fait plus appel à l'analyse des documents et à un raisonnement personnel construit. Le nombre de points attribué à cette partie tient compte de ces spécificités.

On considère une voiture de TGV dans des conditions hivernales. La température extérieure est constante égale à  $T_{ext} = -4$  °C. On cherche à estimer la puissance du chauffage  $\mathcal{P}_{ch}$  nécessaire pour maintenir la température intérieure constante à  $T_{int} = 20$  °C.

On fait dans un premier temps les hypothèses suivantes :

- le régime est stationnaire ;
- les vitres et le reste des parois (latérales, sol et toit) sont constituées de plusieurs couches comme schématisé figure 11 ;
- les vitres sont par ailleurs le siège de phénomènes conducto-convectifs côté intérieur (coefficient  $h_i$ ) et côté extérieur (coefficient  $h_e$ ) ;
- en outre, l'air intérieur est en permanence renouvelé par de l'air neuf venant de l'extérieur et ce avec un débit volumique  $D_V$  (figure 12). La puissance thermique nécessaire pour l'amener de la température extérieure à la température intérieure s'écrit

$$\mathcal{P}_{air\ neuf} = D_m c_p (T_{int} - T_{ext}) \quad (II.1)$$

où  $D_m$  est le débit massique de renouvellement de l'air et  $c_p$  la capacité thermique massique à pression constante de l'air (notons que la masse volumique de l'air est considérée comme constante et uniforme).

Les données numériques utiles au problème sont fournies en fin d'énoncé.

**Q 47.** Pourquoi les valeurs des coefficients conducto-convectif verre / air sont-elles différentes ( $h_i$  et  $h_e$ ) pour l'extérieur et l'intérieur de la voiture ?

**Q 48.** Justifier l'expression de l'équation (II.1).

**Q 49.** On souhaite se placer dans un premier temps dans la situation la plus défavorable (celle qui nécessitera la plus grande valeur de  $\mathcal{P}_{ch}$ ). Doit-on supposer la voiture pleine de passagers ou vide (justifier) ?

**Q 50.** On se place dans l'hypothèse de la question précédente. En précisant toutes les étapes du raisonnement et des calculs, estimer la valeur de la résistance thermique équivalente totale de la voiture ( $R_{tot}$ ).

**Q 51.** En précisant toutes les étapes du raisonnement et des calculs, estimer la valeur de  $\mathcal{P}_{ch}$  permettant de maintenir la température intérieure constante.

**Q 52.** Que devient cette valeur si on suppose la voiture pleine de passagers ?

**Réponses :** II.A. voir cours IIB. 42.  $T(x) = T_1 + x(T_2 - T_1)/e$ ; 43.  $P_{th} = (T_1 - T_2) \lambda S/e$  et  $j$  uniforme; 44.  $R_{th} = e / \lambda S$ ; 46.  $R_{CC} = 1/hS$ ; 47.  $h_{int} < h_{ext}$ ; 49. Voiture vide défavorable; 50. Association en parallèle  $\frac{1}{R_{tot}} = \frac{12}{R_{vitre}} + \frac{1}{R_{toit}} + \frac{1}{R_{sol}} + \frac{2}{R_{paroi,lat}}$

Association en série pour les différentes résistances

$$R_{vitre} = \frac{1}{L_v H_v} \left( \frac{1}{h_e} + \frac{e_{ve}}{\lambda_v} + \frac{e_{air}}{\lambda_{air}} + \frac{e_{vi}}{\lambda_v} + \frac{1}{h_i} \right) = 3,40 \cdot 10^{-1} \text{ K.W}^{-1}$$

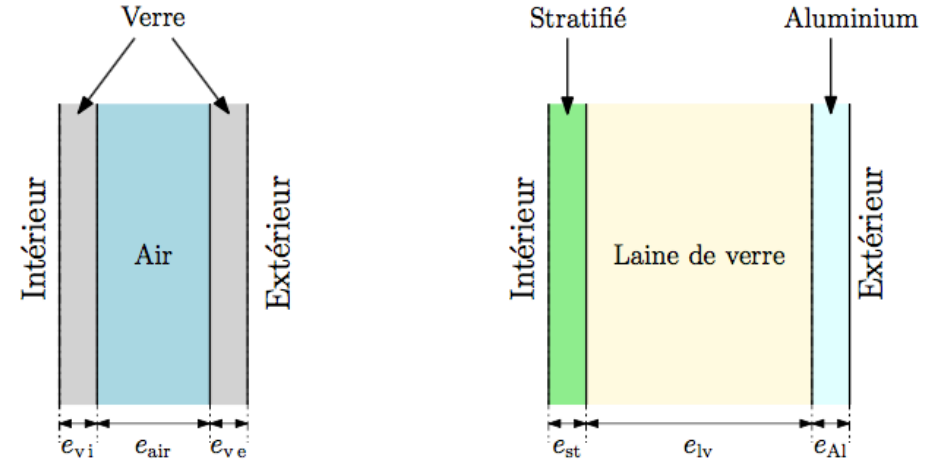
$$R_{toit} = \frac{1}{Ll} \left( \frac{e_{st}}{\lambda_{st}} + \frac{e_{lv}}{\lambda_{lv}} + \frac{e_{Al}}{\lambda_{Al}} \right) = R_{sol} = 7,59 \cdot 10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$$

$$R_{paroi,lat} = \frac{1}{Lh - 6L_v H_v} \left( \frac{e_{st}}{\lambda_{st}} + \frac{e_{lv}}{\lambda_{lv}} + \frac{e_{Al}}{\lambda_{Al}} \right) = 1,28 \cdot 10^{-2} \text{ K.W}^{-1} \text{ et } R_{tot} = 2,20 \cdot 10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$$

$$51. P_{ch} = (T_{int} - T_{ext})/R_{tot} = 10,9 \text{ kW}; 52. P_{ch}' = 7,9 \text{ kW}$$

*Données numériques pour le dimensionnement du chauffage d'une voiture de TGV*

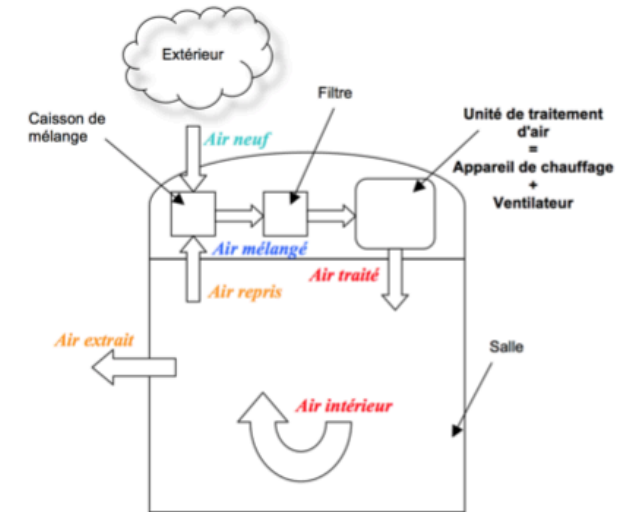
Voiture	$L$ (longueur)	22500 mm
	$\ell$ (largeur)	2780 mm
	$h$ (hauteur)	2100 mm
	$e_{Al}$	4 mm
	$e_{lv}$	24 mm
	$e_{st}$	4 mm
Vitres	Nombre de places assises	50
	Nombre par voiture	12
	$L_v$ (largeur)	2000 mm
	$H_v$ (hauteur)	840 mm
	$e_{air}$	12 mm
	$e_{vi}$	4 mm
Conductivités thermiques	$e_{ve}$	4 mm
	$\lambda_{Al}$	$237 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
	$\lambda_{lv}$	$0,051 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
	$\lambda_{st}$	$1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
	$\lambda_{air}$	$0,03 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
	$\lambda_v$	$1,15 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Masse volumique de l'air	$\rho_{air}$	$1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Puissance thermique moyenne dégagée par un passager	$\mathcal{P}_{pass}$	60 W
Autres données	$h_i$	$8 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$
	$h_e$	$25 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$
	$D_v$	$2100 \text{ m}^3\cdot\text{h}^{-1}$
	$c_p$	$1000 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$



(a) Constitution d'une vitre

(b) Constitution des parois

**Figure 11** Constitution des parois et des vitres



**Figure 12** Circulation de l'air dans un véhicule ferroviaire et appellations selon la norme NF EN 14750-1



## Résolution de problèmes

### Exercice 5 : Refroidissement d'un point de soudure

#### Extrait de concours CCINP PSI 2017

On se propose ici de déterminer un ordre de grandeur du temps, noté  $\Delta t$ , nécessaire à la solidification d'un point de soudure.

On adopte le modèle simplifié suivant (figure 9, page suivante), où le point de soudure, de masse  $m_1$  et d'un matériau nommé  $\text{Mat}_1$ , est assimilé à une boule de diamètre  $2R_b = 10 \text{ mm}$  qui raccorde deux conducteurs cylindriques de diamètre  $d = 2 \text{ mm}$ , constitués du même matériau nommé  $\text{Mat}_2$  et supposés infinis.

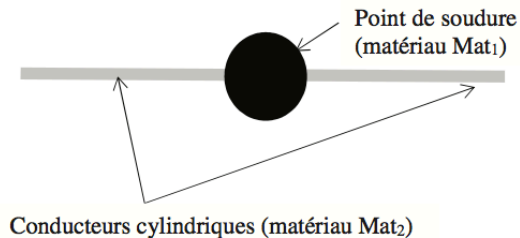


Figure 9 - Modélisation d'un point de soudure

On admettra que la chaleur s'évacue du point de soudure, de température uniforme notée  $T_1$ , à la fois par conduction thermique par les conducteurs cylindriques et par un échange conducto-convectif avec l'air extérieur. On note  $T_{\text{ext}}$  la température supposée constante de l'air extérieur. L'échange conducto-convectif suit une loi du type  $P_{\text{th}} = h.S.(T_1 - T_{\text{ext}})$ , où  $P_{\text{th}}$  est la puissance thermique évacuée,  $S$  la surface du point de soudure et  $h$  ( $\approx 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ ) le coefficient d'échange conducto-convectif.

La température initiale du point de soudure, notée  $T_1^{\text{init}}$ , n'est que très légèrement supérieure à la température de fusion du matériau  $\text{Mat}_1$ , de sorte qu'on assimilera  $T_1^{\text{init}}$  à  $T_{1\text{fusion}}$ .

On admettra, de plus, que le profil de température dans les conducteurs soudés entre eux obéit à une loi de fonction affine représentée par le graphe suivant (figure 10), où  $b \approx 10 \text{ cm}$ .

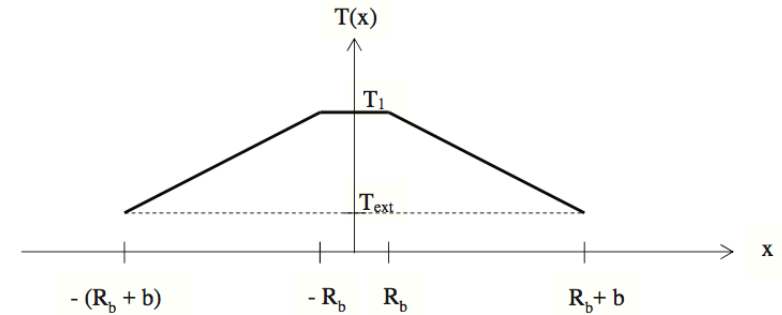


Figure 10 - Profil de température

**Q25.** Recenser, en précisant leur unité, les grandeurs physiques dont vous avez besoin pour résoudre ce problème.

**Q26.** Ecrire la (ou les) équation(s) faisant intervenir les grandeurs précitées permettant de déterminer le temps de solidification  $\Delta t$ .

**Q27.** Pour le matériau  $\text{Mat}_1$ , on donne :

- masse volumique  $\rho_1 = 8\,500 \text{ S.I.}$ ,
- capacité thermique massique :  $c_1 = 180 \text{ S.I.}$ ,
- enthalpie massique de fusion :  $L_{\text{fus}1} = 60\,10^3 \text{ S.I.}$
- conductivité électrique :  $\gamma_1 = 5\,10^6 \text{ S.I.}$

Pour le matériau  $\text{Mat}_2$ , on donne :

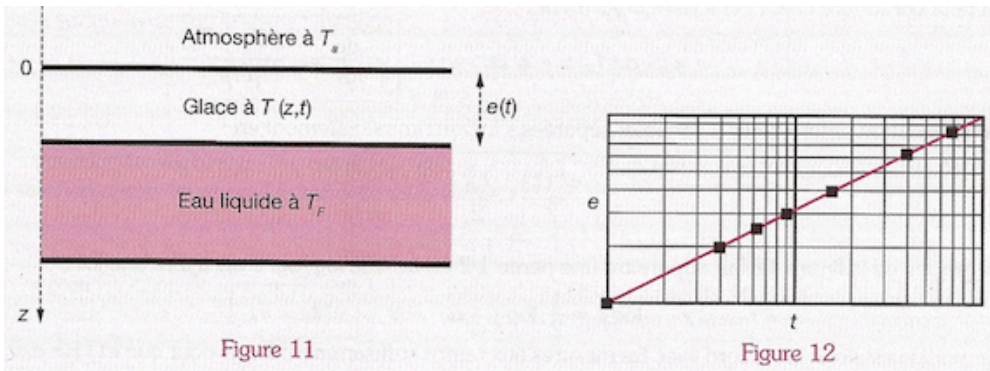
- masse volumique  $\rho_2 = 8\,200 \text{ S.I.}$ ,
- conductivité thermique :  $\lambda_2 = 400 \text{ S.I.}$

En faisant preuve d'initiatives, proposer des valeurs numériques pour les grandeurs physiques éventuellement non fournies. Puis estimer la valeur numérique du temps  $\Delta t$  de solidification du cordon de soudure.

## TD Transport bloc 2 – Conduction thermique – pour aller plus loin

### Exercice 6 : Gel d'un lac

Lorsque l'air au-dessus d'un lac de surface  $S$  est à la température  $T_a < T_F$  température de fusion de l'eau (fig. 11), on constate le gel du lac : l'épaisseur  $e(t)$  de la couche de glace croît lentement avec le temps. Une étude expérimentale



donne le graphe de  $e(t)$  (fig. 12 en échelle log-log). On suppose que :

- l'eau liquide en dessous de la couche de glace est à la température uniforme  $T_F$
- le profil de température  $T(z,t)$  dans la glace correspond à celui d'un régime stationnaire : ARQS valide pour cette évolution suffisamment lente dans le temps

On donne  $T_F = 273 \text{ K}$  et la chaleur latente de fusion, ou enthalpie de fusion,  $l_F = 330 \text{ kJ.kg}^{-1}$  pour la glace, ainsi que sa capacité calorifique massique  $c = 4,18 \text{ kJ.kg}^{-1}$ . On notera  $\mu$  la masse volumique de l'eau et de la glace, considérées ici égales pour simplifier, et  $\lambda$  la conductivité thermique de la glace.

1. Par contact parfait, on suppose que l'air impose sa température  $T_a$  à la surface du lac, soit hypothèse H :  $T(z=0,t) = T_a$ 
  - a) Exprimer le flux thermique  $\phi$  traversant la couche de glace dans le sens des  $z$  décroissants en fonction de  $\lambda$ ,  $e(t)$ ,  $S$ ,  $T_a$  et  $T_F$ .

b) En faisant un bilan pour la couche de glace qui gèle entre  $t$  et  $t + dt$ , montrer que  $e(t)$  est solution de :  $e \frac{de}{dt} = \frac{\lambda(T_F - T_a)}{\mu l_F}$

c) En déduire une durée caractéristique  $\tau$  des variations de  $e(t)$ . Ce modèle rend-il compte du graphe fig. 12 ?

2. En réalité l'hypothèse H n'est pas satisfaisante en général. Elle doit être remplacé par une condition sur la continuité des flux en  $z = 0$ , intégrant le flux conducto-convectif présent à l'interface lac/air. Selon la loi phénoménologique de Newton, ce flux s'exprime par  $\phi_a = h S (T_s - T_F)$  avec  $T_s = T(z=0,t)$  la température de surface du lac et  $h$  le coefficient de conducto-convection constant, notamment fortement influencé par la présence de vent au-dessus du lac.

a) En exploitant la continuité du flux thermique en  $z = 0$ , déterminer l'expression de  $T_s$  en fonction de  $T_a$ ,  $T_F$ ,  $h$  et  $\lambda$ .

b) A quelle condition le modèle de la question 1. est-il valable ? On ne demande pas d'établir la nouvelle expression de  $e(t)$  qui ne remet pas en cause le comportement asymptotique de  $e(t)$ .

### Résolution de l'équation de diffusion en régime variable : Résolution à variables séparées pour une solution stationnaire Développement en séries de Fourier

### Exercice 7 : Thermalisation d'une barre

#### Adapté oraux Centrale et Mines Ponts

Une barre de longueur  $l$ , positionnée entre  $x = 0$  et  $x = l$ , est calorifugée latéralement. On note  $D = \lambda/\mu c$  son coefficient de diffusion thermique, avec  $c$  sa capacité calorifique massique,  $\mu$  sa masse volumique et  $\lambda$  sa conductivité thermique.

Initialement, la température de la barre est  $T(x, t = 0) = T_0 + \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$  avec  $n \in \mathbb{N}$ , les deux extrémités de la barre étant placées en contact avec un thermostat à la température  $T_0$ . On cherche ici à déterminer l'évolution de la température au cours du temps, donc en régime variable, le problème étant unidimensionnel selon  $x$ .

1. Que dire de la température de la barre pour des temps très longs ?
2. Donner l'équation différentielle de diffusion thermique.
3. La résoudre en adoptant une solution à variables séparées :  $T(x,t) = T_0 + f(x)g(t)$ . Trouver sans ambiguïté les formes de  $f$  et  $g$ .
4. Conclure en exploitant la température initiale.

5. Faire apparaître un temps typique d'évolution et commenter le résultat. On vérifiera l'homogénéité de ce temps.
6. désormais, la température initiale est une fonction quelconque  $T(x,t=0)$  vérifiant  $T(x=0,t=0) = T(x=l,t=0) = T_0$  seulement. Déterminer l'expression de  $T(x,t)$  à l'aide des séries de Fourier : on associera à  $T(x,t=0)$  une fonction impaire de période  $2l$ , identique à  $T(x,t=0)$  sur l'intervalle  $[0 ; l]$  et on fera apparaître son développement en série de Fourier.

## Résolution de problèmes

### Exercice 8 : Formation de la buée

#### Oral Mines Ponts

(Voir aussi sujet 1 Centrale PSI 2019)

Une vitre d'automobile d'épaisseur  $e = 5$  mm et de conductivité thermique  $\lambda = 1$   $W.K^{-1}.m^{-1}$  sépare l'intérieur de l'automobile rempli d'air saturé en vapeur d'eau à la température  $T_i = 20$  °C. et l'atmosphère extérieure qui impose une température  $T_e = 10$  °C à la surface de la vitre. On donne la masse volumique  $\mu = 10^3$   $kg.m^{-3}$  de l'eau et son enthalpie de vaporisation massique  $l_v = 2,6.10^3$   $kJ.kg^{-1}$ .

Expliquer la formation de la buée et estimer le taux de croissance  $de/dt$  de l'épaisseur de la couche formée.

### Exercice 9 : Le « botijo » ou jarre réfrigérante

► Cet exercice comporte une question (question 2) de type résolution de problème.

Un botijo, ou gargoulette, est une cruche en terre cuite, utilisée dans les régions méditerranéennes, qui permet de rafraîchir l'eau qu'elle contient. Elle est en général placée à l'extérieur en un lieu chaud, parfois en plein soleil. Cependant, l'eau contenue dans le récipient est fraîche, l'extérieur du botijo lui-même restant sec et frais.

Mohammed Bah Abba, enseignant nigérien a été lauréat en 2000 du Rolex Awards for Enterprise. Son système réfrigérant, « pot-in-pot cooling system », permet de conserver au frais des aliments, ce qui représente un enjeu crucial dans les régions désertiques. S'inspirant des « botijo » espagnols, le système est constitué de deux jarres en terre cuite contenues l'une dans l'autre et séparées par du sable humide. Le pot intérieur est rempli de fruits, légumes ou boissons et recouvert d'un linge humide.

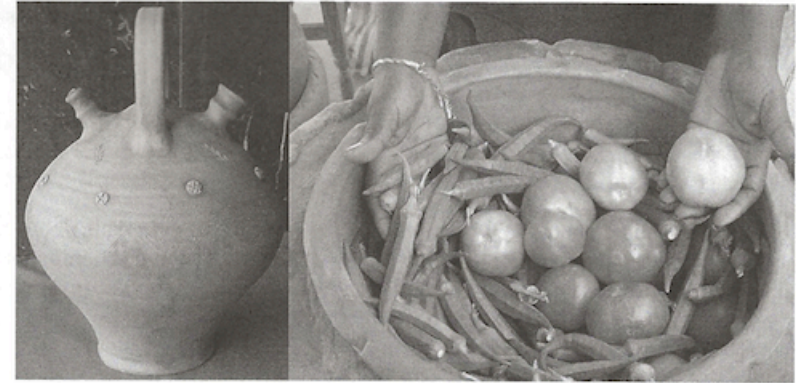


FIGURE 5.7 – À gauche, un botijo ; à droite, le réfrigérateur écologique de M.B. Abba (photo communiquée par Practical action). Pour une température extérieure supérieure à 30°C, l'écart entre la température à l'extérieur et à l'intérieur de la jarre est constant, de l'ordre de 15°C, indépendamment des conditions météo (vent).

1. Expliquer le principe du botijo et du réfrigérateur écologique.
2. Une simple jarre en terre cuite remplie d'eau permet ainsi d'obtenir et de conserver de l'eau fraîche. Avec les données à votre disposition et en mettant en œuvre un modèle simple portant sur une jarre cylindrique, évaluer l'ordre de grandeur de l'écart de température entre l'eau à l'intérieur de la jarre et le milieu extérieur, qu'il est possible d'obtenir avec ce dispositif.
3. Quel est l'intérêt du dispositif, utilisant du sable humide, proposé par M. Bah Abba ?

Document 1 : données utiles

- Jarre cylindrique de rayon extérieur  $r = 15$  cm et de hauteur  $H = 50$  cm remplie à ras bord, d'épaisseur  $e = 1,0$  cm.
- Enthalpie de vaporisation de l'eau à 30°C  $l_{vap} = 2,4.10^6$   $J.kg^{-1}$ .
- Conductivité thermique de la terre cuite saturée en eau  $\lambda = 0,9$   $W.m^{-1}.K^{-1}$ .
- Coefficient de transport conducto-convectif  $h = 10$   $W.m^{-2}.K^{-1}$  (terre cuite/air).

Document 2

La traversée d'un milieu poreux par un fluide fait intervenir des phénomènes complexes. La loi phénoménologique de Darcy a été formulée par Henry Darcy en 1856 dans son ouvrage *Les Fontaines publiques de la ville de Dijon*. Elle exprime le débit volumique (en  $m^3.s^{-1}$ ) d'un fluide incompressible qui peut traverser un matériau poreux de masse volumique  $\rho$ , de section  $A$ , de longueur  $L$  en fonction de l'écart de pression



en amont et en aval, sous la forme

$$Q = KA \frac{\Delta p}{\rho g L} \quad (5.11)$$

$K$  est la conductivité hydraulique ou « coefficient de perméabilité » du milieu poreux (m/s), qui dépend à la fois des propriétés du milieu poreux et de la viscosité du fluide. Pour la terre cuite saturée en eau  $K = 2.10^{-9} \text{ m.s}^{-1}$ .

### Document 3

La vitesse d'évaporation d'un film d'eau peut être approchée par la formule de Rohwer

$$E = 0,484(1 + 0,6.v) \exp(17,3 - 4,72.10^3/T) \left(1 - \frac{H_r}{100}\right),$$

où  $H_r$  est le taux d'humidité, rapport des pressions partielles d'eau dans l'atmosphère et de la pression de vapeur saturante d'eau, et  $v$  la vitesse du vent.

## Stockage d'énergie par pompage thermique (procédé SEPT)

### Extrait de concours Centrale PSI 2020 – sujet 1

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'expliquer clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Dans le contexte actuel, la problématique de la gestion des ressources énergétiques est devenue un enjeu économique majeur. Il est particulièrement important de disposer de moyens de stockage d'énergie qui permettent une meilleure utilisation des sources d'énergie maîtrisables comme les centrales thermiques, mais aussi des sources intermittentes comme les éoliennes ou les centrales solaires. Dans ce contexte et devant les défis posés par la protection de l'environnement, les moyens de stockage existants risquent de devenir insuffisants pour intégrer davantage d'énergies intermittentes dans la production électrique. Cette limitation explique un intérêt récent pour les technologies de stockage.

Ce sujet concerne un nouveau procédé de stockage d'énergie à échelle industrielle, le procédé SEPT (Stockage d'Électricité par Pompage Thermique), breveté en 2007. L'énergie est stockée en modifiant, à l'aide d'une machine thermique, la température de deux échangeurs de grande taille appelés régénérateurs. La machine peut fonctionner en pompe à chaleur ou en moteur thermique.

## II Analyse de quelques caractéristiques des régénérateurs

Le régénérateur est un dispositif de stockage d'énergie thermique et son fonctionnement comprend deux périodes. Pendant la période « chaude », le gaz chaud circule et se refroidit au contact des parois solides ce qui correspond à un stockage de chaleur. Pendant la période « froide », le gaz froid circule et se réchauffe ce qui permet la récupération de la chaleur stockée.

### II.A – Influence de la porosité du milieu

La porosité  $\varepsilon$  est le rapport du volume occupé par le fluide sur le volume total de l'enceinte solide. On peut montrer que l'efficacité du stockage thermique augmente avec la porosité du régénérateur jusqu'à une valeur de porosité de l'ordre de 50 % qui correspond à un optimum.

On s'intéresse à un régénérateur solide à milieu granulaire que nous modéliserons de manière simplifiée comme un empilement de sphères identiques. On considère deux modes d'empilement : cubique et cubique à faces centrées (figure 8).

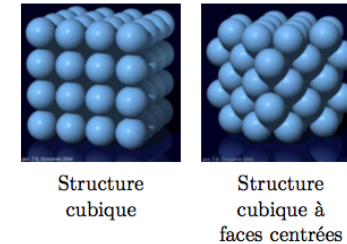


Figure 8

**Q 27.** Exprimer puis calculer la porosité théorique de chaque structure. Pourquoi dit-on que l'empilement cubique à faces centrées est un empilement compact ?

**Q 28.** Quel mode d'empilement serait le mieux adapté au remplissage d'un régénérateur ? En réalité, lorsque les sphères sont empilées dans l'enceinte sans précautions particulières, il n'apparaît aucune périodicité, l'empilement est aléatoire et la porosité est comprise entre 0,36 et 0,40.

### II.B – Influence d'autres paramètres

#### II.B.1) Fronts thermiques et influence du coefficients d'échange

La partie I a étudié le régime établi de l'installation, mais celle-ci a besoin d'un certain nombre de cycles de stockage et de déstockage « transitoires » avant d'atteindre un régime périodique stabilisé (figure 10).

En effet, en mode stockage, l'enceinte  $H$ , initialement à la température uniforme  $T_0$ , est alimentée en gaz chaud à  $T_1$  par le haut et se réchauffe progressivement du haut vers le bas. Une zone de transition existe, se traduisant par une variation progressive de  $T_1$  à  $T_0$ . Cette zone est appelée « front thermique » (figure 9).

Un modèle développé par T.E.W. Schumann permet d'obtenir les profils de température à l'intérieur de l'enceinte. Les courbes de la figure 11 donnent les températures du fluide et du solide granulaire en fonction de  $z$ , position verticale dans l'enceinte, à différents instants et pour deux valeurs du coefficient conducto-convectif  $h$  entre ces deux milieux.

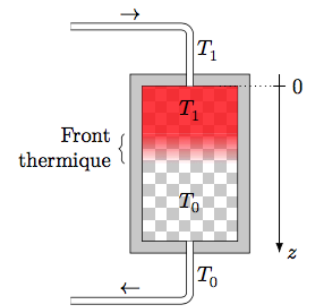


Figure 9

**Q 29.** D'après les courbes de la figure 11, comment varie la différence de température entre le fluide et le solide avec  $h$  ? Commenter.

**Q 30.** Expliquer, à l'aide de la figure 11, qu'un coefficient d'échange  $h$  plus élevé permet d'arrêter le stockage plus tard et donc de stocker davantage d'énergie dans le régénérateur.



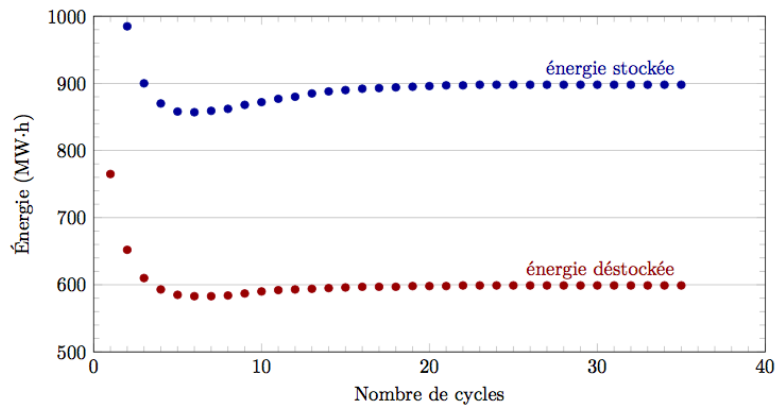


Figure 10

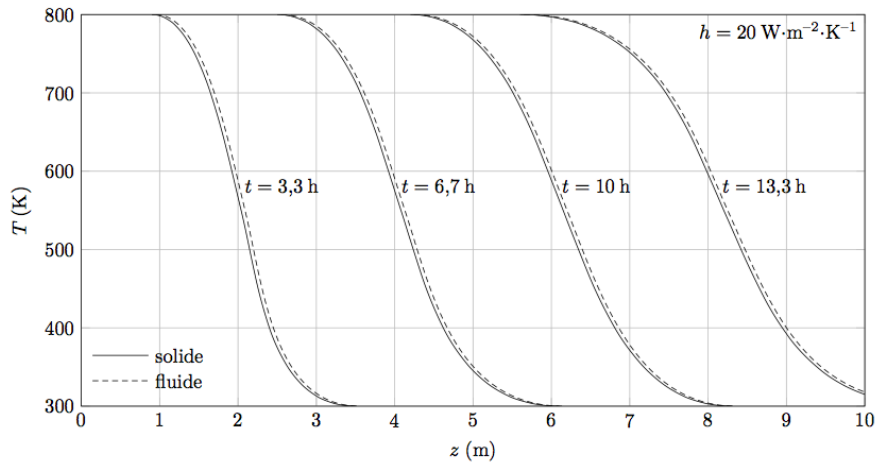
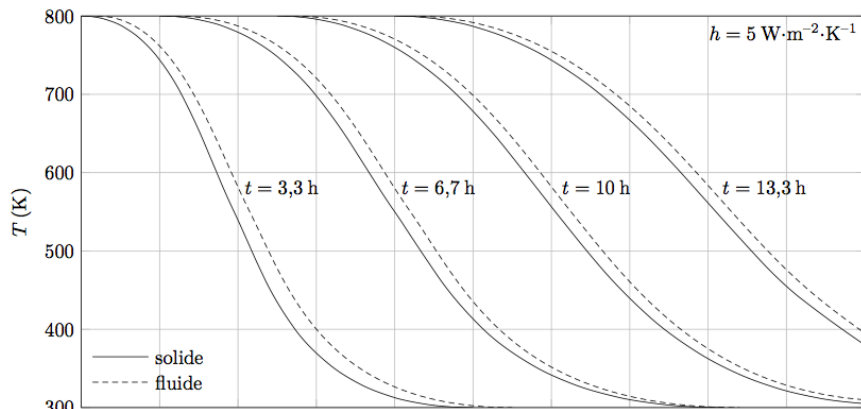


Figure 11

Q 31. Rappeler à quelles conditions un échange thermique entre un fluide (de température  $T_f$ ) et un solide (de température  $T_s$ ) peut être considéré réversible. Quelle devrait être la valeur de  $h$  pour que l'entropie créée lors du transfert gaz-solide soit nulle ?

### II.B.2) Influence de la largeur des enceintes

On considère pour cette question une enceinte ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de base carrée, de largeur  $L_e$  et de hauteur  $H_e$ . La figure 12 présente l'évolution du rendement de l'installation en fonction de la largeur des enceintes.

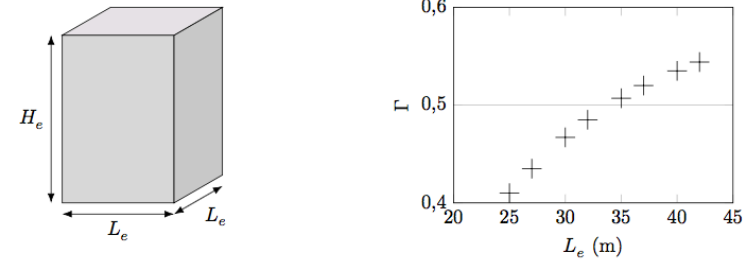


Figure 12 Rendement avec enceinte parallélépipédique

Q 32. Expliquer l'évolution du rendement en fonction de  $L_e$ .

### II.B.3) Influence du débit massique de gaz

La figure 13 présente l'évolution du rendement d'une installation SEPT en fonction du débit massique du gaz.

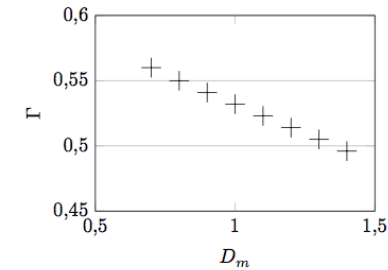


Figure 13 Rendement en fonction du débit du fluide

Q 33. Expliquer l'évolution du rendement avec le débit du gaz.

### II.C - Évolution thermique des enceintes pendant les pauses

Une installation SEPT devra quotidiennement stocker et déstocker de l'énergie à des moments de la journée bien précis déterminés par l'évolution journalière du coût de l'énergie électrique (figure 14).

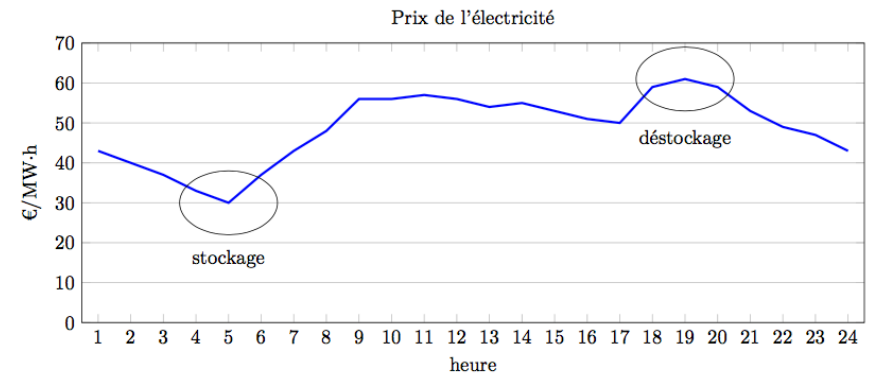


Figure 14 Phases quotidiennes de stockage et déstockage dans une installation SEPT

Entre ces périodes, le système est à l'arrêt pendant quelques heures et on observe une diffusion thermique axiale (selon  $Oz$ ) qu'on se propose d'évaluer afin de déterminer s'il est nécessaire de la prendre en compte dans l'efficacité globale du procédé.

On considère l'enceinte de la figure 12 de largeur  $L_e = 10$  m, pendant une période d'arrêt de durée  $\Delta t = 24$  h. Les matériaux réfractaires sont de porosité  $\varepsilon = 44$  %, de conductivité thermique  $\lambda = 0,03 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  et affichent un gradient thermique uniforme  $\frac{dT}{dz} = 200 \text{ K}\cdot\text{m}^{-1}$ .

**Q 34.** Évaluer un ordre de grandeur de l'énergie thermique diffusée axialement et la comparer à l'énergie interne de cette enceinte  $U = 1,7 \times 10^{12}$  J. Conclure.

### II.D – Notions sur les modèles de conductivité effective d'un milieu poreux

L'étude précédente nécessite une connaissance de la conductivité thermique  $\lambda$  du milieu poreux. La conductivité thermique d'un tel système, dite conductivité thermique effective, intègre logiquement dans sa définition, les paramètres primaires que sont les conductivités thermiques intrinsèques des particules solides  $\lambda_s$  et du gaz  $\lambda_g$  ( $\lambda_s > \lambda_g$ ) ainsi que le rapport volumique entre ces deux phases, représenté par la porosité  $\varepsilon$ .

Quel que soit le modèle utilisé pour calculer la conductivité thermique effective d'un milieu granulaire, celle-ci est toujours comprise entre deux valeurs extrêmes,  $\lambda_{\min}$  et  $\lambda_{\max}$ . Une situation limite correspond à un milieu où le vecteur densité de flux de chaleur est perpendiculaire aux strates (modèle série, figure 15). L'autre situation limite correspond à une disposition des strates parallèle à la direction de la densité du flux de chaleur (modèle parallèle, figure 15).

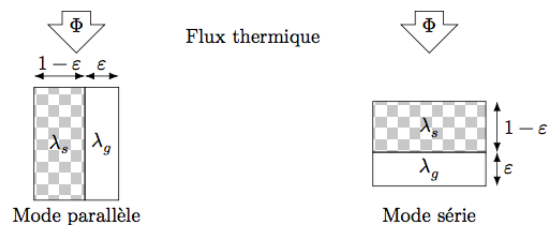


Figure 15

**Q 35.** Exprimer les conductivités dans les deux situations limites en fonction de  $\varepsilon$ ,  $\lambda_s$  et  $\lambda_g$ . Valider les expressions obtenues en considérant des cas limites.

**Q 36.** Montrer que l'une de ces deux expressions limites est toujours supérieure à l'autre. Déterminer  $\lambda_{\min}$  et  $\lambda_{\max}$ .

On donne, pour l'argon  $\lambda_g = 0,018 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  et pour le sable utilisé  $\varepsilon = 0,47$  et  $\lambda_s = 0,40 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ .

**Q 37.** Calculer les valeurs numériques de  $\lambda_{\min}$  et  $\lambda_{\max}$ .

### II.E – Mesure de la conductivité thermique effective du milieu granulaire utilisé pour les enceintes du procédé S.E.P.T.

On place un fil métallique, de rayon  $r_0$  au centre d'un bloc du matériau à étudier (sable et argon) de façon à ce qu'il le traverse verticalement. Le fil est relié à une alimentation électrique qui lui fournit un échelon de courant. On relève au cours du temps la variation de la résistance électrique du fil, ce qui permet de déterminer sa température.

On modélise ce dispositif par un fil de longueur infini plongé dans un espace totalement rempli du matériau à étudier. L'ensemble est initialement à la température uniforme  $T_0$ . À partir du temps  $t = 0$ , on applique l'échelon de courant et le fil produit un flux thermique constant par unité de longueur  $\varphi_L$ . On suppose que les transferts thermiques s'effectuent seulement par conduction. Le matériau est incompressible, de masse volumique constante  $\rho$ , de conductivité thermique  $\lambda$  et de capacité thermique massique  $c_p$ .

On admet que la répartition de température dans le matériau présente une symétrie cylindrique autour du fil électrique. On se place donc en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  en prenant le fil comme axe, autrement dit,  $r = 0$  correspond au centre du fil.

**Q 38.** Établir l'équation différentielle vérifiée par  $T(r, t)$ , la température du matériau en fonction du temps. On pourra introduire la diffusivité thermique du matériau définie par  $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ .

**Q 39.** À un instant  $t$  donné, quelle est, en ordre de grandeur, la longueur caractéristique de variation de la température avec  $r$  ?

La résolution de l'équation précédente nécessite d'exprimer la condition limite sur la surface du fil chaud en  $r = r_0$ .

**Q 40.** Exprimer  $\frac{\partial T}{\partial r}(r_0, t)$  en fonction de  $\lambda$ ,  $r_0$  et  $\varphi_L$ .

Compte tenu de cette condition limite et si on néglige le rayon du fil devant la longueur caractéristique de variation de la température avec  $r$ , la solution de l'équation de la question 38 s'écrit

$$T(r, t) = T_0 + \frac{\varphi_L}{4\pi\lambda} E\left(\frac{r^2}{4\alpha t}\right) \quad \text{avec} \quad E(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

Pour des valeurs de  $x$  petites devant 1, on peut utiliser l'approximation  $E(x) = -\gamma - \ln(x)$  où  $\gamma$  est une constante.

**Q 41.** Donner une expression approchée de  $T(r_0, t)$  aux temps longs en précisant l'échelle de temps pertinente.

La figure 16 présente le relevé expérimental de  $\Delta T = T(r_0, t) - T_0$  en fonction du temps pour les enceintes d'un procédé SEPT.

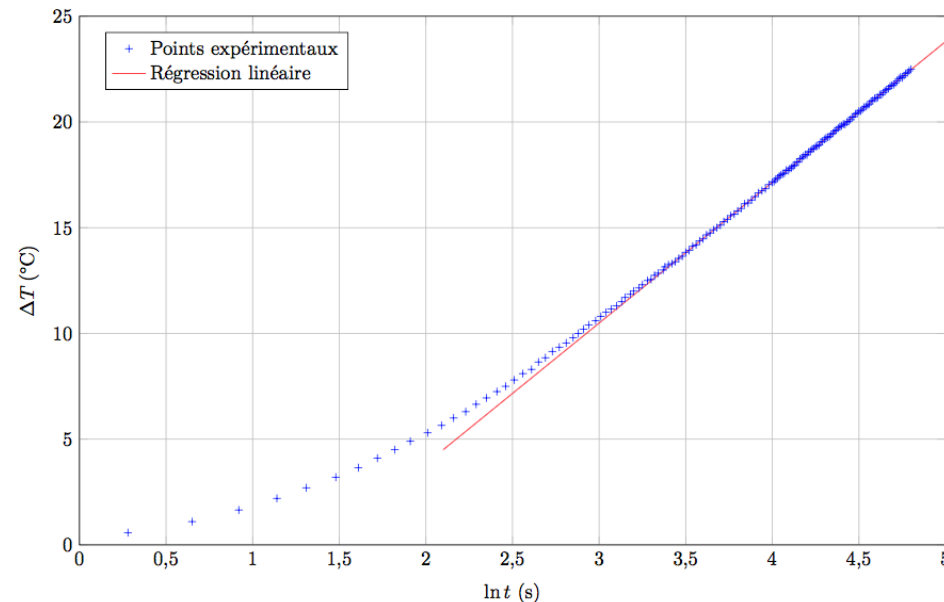


Figure 16

**Q 42.** Montrer que ces mesures sont en accord avec les résultats théoriques précédents.

**Q 43.** Estimer un ordre de grandeur de la conductivité thermique effective du régénérateur étudié sachant que le fil utilisé a une longueur  $l = 20$  cm et qu'il émet un flux thermique total  $\varphi = 0,64$  W.

**Q 44.** Commenter le résultat.

### Données

Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	$R = k_B \mathcal{N}_A = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$

Opérateur laplacien en coordonnées cylindriques

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$