

## TD/Cours Info – Résolution numérique de l'équation de la chaleur

### Extrait du programme de PSI

Équation de la diffusion thermique.	Établir l'équation de diffusion thermique avec ou sans terme source. Analyser une équation de diffusion en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle. Relier l'équation de diffusion à l'irréversibilité temporelle du phénomène.  <b>Capacité numérique</b> : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la méthode d'Euler explicite de résolution des équations différentielles ordinaires.
Conditions aux limites.	Exploiter la continuité du flux thermique. Exploiter la continuité de la température pour un contact thermique parfait. Utiliser la relation de Newton (fournie) à l'interface solide-fluide.

**En régime variable**, la **résolution analytique de l'équation de diffusion thermique** s'avère hardue et peut faire appel à des fonctions mathématiques élaborées (fonction erreur erf ...), dont la manipulation est à la marge du programme de la classe de PSI. Hormis dans des situations simples, cette équation n'a pas de solution analytique. On préfère alors employer une **méthode de résolution numérique** approchée.

Dans la continuité du programme de PCSI, et en matière de rappel, nous présentons d'abord dans ce TD **les capacités numériques** nécessaires à la **résolution de l'équation de la chaleur**, puis nous l'appliquerons à des cas pratiques ciblés, issus de sujets de concours récents.

### 1) Méthode d'Euler pour la résolution d'une équation différentielle ordinaire EDO

L'équation de diffusion thermique est une **équation aux dérivées partielles d'ordre 2, linéaire**, qui couple les variations spatiales et temporelle et pilote le transfert thermique. On la qualifie d'EDO.  
On se limitera ici à un **problème unidimensionnel** où la température ne dépend que d'une seule coordonnée, du type :  $T(M,t) = T(x,t)$ .

En l'absence de terme source, l'équation de diffusion thermique s'exprime par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Avec D le coefficient de diffusion thermique en  $m^2.s^{-1}$

Pour résoudre une équation aux dérivées partielles d'ordre 2, on utilise les **approximations des dérivées partielles premières et secondes** suivantes, **par développement limité de Taylor** à l'ordre 1 et 2 respectivement :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) \approx \frac{T(x, t + dt) - T(x, t)}{dt}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) \approx \frac{T(x + dx, t) + T(x - dx, t) - 2T(x, t)}{dx^2}$$

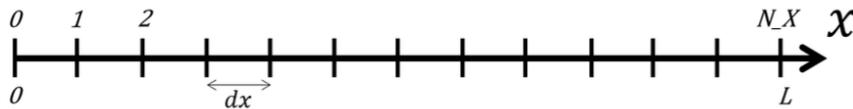
que l'on injecte ensuite dans l'équation aux dérivées partielles pour en déduire le **schéma explicite de résolution**.

**A faire** : **déterminer le schéma d'Euler explicite de l'équation de diffusion thermique** (sans terme source), soit exprimer la température au point x au temps t + dt : T(x,t+dt) en fonction de T(x,t), T(x+dx,t) et T(x-dx,t) les températures aux points x, x + dx et x - dx au temps t

## 2) Principe de la résolution par la méthode des différences finies

La **méthode des différences finies** consiste en une **double discrétisation de l'espace et du temps**, pour exprimer le schéma d'Euler précédent :

- on impose une **subdivision régulière de l'espace**, entre  $[0, L]$  par exemple, avec  $N_x + 1$  valeurs, de **pas spatial  $dx$** , pour le **profil spatial de température  $T(x) \rightarrow T(x_k)$**   
 $x_k = k dx$  pour  $k \in [0, 1, 2, \dots, N_x]$   
 et  $(\forall k \in [0, 1, 2, \dots, N_x - 1]) x_{k+1} - x_k = dx = L/N_x$



- on impose une **subdivision régulière du temps**, entre  $[0, t_{\max}]$  par exemple, de **pas temporel  $dt$** , pour l'évolution au cours du temps avec  $t_i = i dt$   
 et  $(\forall i \in [0, 1, 2, \dots, N_t - 1]) t_{i+1} - t_i = dt = t_{\max}/N_t$

En appliquant les approximations des dérivées partielles premières et secondes :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x_k, t_i) \approx \frac{T(x_k, t_{i+1}) - T(x_k, t_i)}{dt}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_k, t_i) \approx \frac{T(x_{k+1}, t_i) + T(x_{k-1}, t_i) - 2T(x_k, t_i)}{dx^2}$$

Le schéma d'Euler explicite s'exprime alors pour l'équation de diffusion (sans terme source) :

$$T(x_k, t_{i+1}) \approx T(x_k, t_i) + \frac{Kdt}{dx^2} (T(x_{k+1}, t_i) + T(x_{k-1}, t_i) - 2T(x_k, t_i))$$

En algorithm python, après définition des deux **tableaux de température de  $N_x + 1$  valeurs** :

**$T_i[k]$  prises au point  $x_k$  en  $t + dt$**

**$T[k]$  prises au point  $x_k$  en  $t$**

$$T_1[k] \approx T[k] + \frac{Kdt}{dx^2} (T[k+1] + T[k-1] - 2T[k])$$

**Attention** : cette relation ne peut être appliquée que pour  $1 \leq k \leq N_x - 1$  et  $0 \leq i \leq N_t - 1$

Vu les limites des domaines spatial et temporel. D'ailleurs, aux bords gauche  $k = 0$  et droit  $k = N_x$  vont intervenir les conditions aux limites.

**Remarque** : schéma explicite et implicite...

Lorsqu'on utilise une différence finie, on peut la réaliser avec une différence finie progressive  $\rightarrow$  schéma explicite (« forward difference approximation ») ou une différence finie rétrograde  $\rightarrow$  schéma implicite (« backward difference approximation »), toujours d'ordre 1, telle que :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) \approx \frac{T(x, t) - T(x, t - dt)}{dt}$$

Le type de schéma choisi dépendra par exemple des propriétés de convergence : un schéma explicite ne converge que si le pas de temps  $dt$  est suffisamment faible par rapport au pas d'espace  $dx$ .

On peut aussi choisir des différences finies centrées (d'ordre 2) telles que :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) \approx \frac{T(x, t + dt) - T(x, t - dt)}{2 dt}$$

Des discrétisations plus élaborées existent aussi (méthode de Verlet, Leapfrog, Cranck-Nicholson, méthode à pas multiples de Runge-Kutta...)

Pour l'approximation de la dérivée seconde précédente, il s'agit d'une différence finie centrée d'ordre 2, là aussi il existe d'autres approches.

Le schéma explicite avec différence finie progressive pour la dérivée première et différence finie centrée pour la dérivée seconde n'est stable que si  $r = D \frac{dt}{dx^2} \leq 1/2$

## 3) Focus sur l'équation de diffusion : présence de terme source et conditions aux limites

### a) Présence de terme source

Dans le cas où il existe un terme source dans l'équation de diffusion thermique : exemple d'une dissipation et d'un échauffement d'un conducteur électrique soumis à l'effet Joule, d'un échauffement par radioactivité, ou d'une perte par conducto-

convection, ce terme source étant caractérisé par une puissance thermique volumique  $P_v$ , l'équation de diffusion s'exprime par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{P_v}{\rho c}$$

Avec  $\rho$  la masse volumique et  $c$  la capacité thermique massique et  $D = \frac{\lambda}{\rho c}$  et  $\lambda$  la conductivité thermique.

Un exemple est donné dans le sujet à suivre CCINP 2018 PSI – Modélisation thermique de la caténaire d'un train, avec pertes thermiques par conduction-convection et effet Joule :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - b(T - T_e) + d$$

Le terme en  $-b(T - T_e)$  représentant les pertes par flux conducto-convectif et d'échauffement par effet Joule.

### **b) Conditions aux limites spécifiques à la diffusion thermique**

-> **Exemples de schéma de résolution sans terme source !!!**

Pour la résolution de l'équation de diffusion thermique, comme nous l'avons vu en cours, nous pouvons envisager principalement trois types de conditions aux limites pour  $x \in [0, L]$

→ **contact thermique parfait avec imposition de la température à une ou deux extrémités** du domaine spatial : **condition de Dirichlet**

$T(x=0, t) = T_0(t)$  et/ou  $T(L, t) = T_L(t)$  -> valeurs de température éventuellement dépendantes du temps aussi.

Par exemple, prenons le cas simple d'une barre en contact avec deux thermostats, de températures constantes  $T_1$  et  $T_2$ .

**L'algorithme final de résolution** intégrera alors :

- **initialisation avec les conditions initiales du profil température**

$T[k] = T_{initiale}(x_k)$  -> donnée du problème pour résoudre

- **application des conditions aux limites**  $T_1[0] = T_1$  et  $T_1[N_x] = T_2$

- **calcul répété** à chaque nouvelle date  $t + dt$  **de la propagation de la chaleur** donc du profil de  $T_1$  aux points  $x_k$  à partir des valeurs de la température  $T$  aux points  $x_k, x_{k+1}$  et  $x_{k-1}$  et au temps  $t$  :

$$T_1[k] \approx T[k] + \frac{K dt}{dx^2} (T[k+1] + T[k-1] - 2 T[k]) \text{ pour } 1 \leq k \leq N_x - 1$$

Soit une traduction en code Python boucle : **for k in range (1, N<sub>x</sub>)**

→ **flux de chaleur imposé à une ou deux extrémités : condition de Neumann**

C'est par exemple le cas lors du contact avec un résistance chauffante qui impose un **flux thermique surfacique** en  $x = 0$  :  $P_S = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(0, t)$ . La condition aux limites concerne alors la **dérivée temporelle de la température**, notée  $\phi_0$ , avec  $\phi_0(t) = \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = -\frac{P_S}{\lambda}$

Les sujets à suivre : CCINP 2018 PSI - Modélisation thermique de la caténaire d'un train et E3A 2023 PSI – Stockage des déchets radioactifs, illustrent ce type de condition aux limites.

Il faut alors approximer  $\frac{\partial T}{\partial x}(0, t)$  par une différence finie progressive d'ordre 1 :

$$\phi_0(t) = \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) \approx \frac{T(x_1, t) - T(x_0, t)}{dx}$$

Donc  $T(x_0, t) = T(x_1, t) - \phi_0(t) dx$

*Remarque* : on peut aussi choisir une différence centrée d'ordre 2 pour exprimer  $\frac{\partial T}{\partial x}(0, t)$  etc....

**L'algorithme final de résolution** intégrera alors :

- **initialisation avec les conditions initiales du profil température**

$T[k] = T_{initiale}(x_k)$  -> donnée du problème pour résoudre

**Et application des conditions aux limites** : selon l'exemple précédent

$T[0] = T[1] - \phi_0 dx$  -> à l'instant initial

- **calcul répété** à chaque nouvelle date  $t + dt$  **de la propagation de la chaleur**

donc du profil de  $T_1$  aux points  $x_k$  à partir des valeurs de la température  $T$  aux points  $x_k, x_{k+1}$  et  $x_{k-1}$  et au temps  $t$ , en **intégrant les conditions aux limites** :

$$T_1[k] \approx T[k] + \frac{K dt}{dx^2} (T[k+1] + T[k-1] - 2 T[k]) \text{ pour } 1 \leq k \leq N_x - 1$$

Et  $T_1[0] = T_1[1] - \phi_0 dx$  -> seulement en  $x = 0$

→ **condition mixte avec flux et température imposés**

C'est par exemple le cas lors d'échanges conducto-convectifs à une interface solide/fluide, pilotés par la loi de Newton, par exemple en  $x = L$

$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = h(T(L, t) - T_{\text{fluide}})$  où  $h$  est le coefficient d'échange conducto-convectif et  $T_{\text{fluide}}$  la température du fluide en contact.  
Il faudra alors de nouveau

Le sujet CCINP 2018 PSI - Modélisation thermique de la caténaire d'un train, présente un exemple de traitement de cette condition mixte, avec en sus prise en compte d'effet Joule.

#### 4) Exemples d'application classiques

##### a) Barre de fer initialement à température uniforme au contact de deux thermostats à ses extrémités

On s'intéresse ici à une barre conductrice, d'épaisseur négligeable, calorifugée sur sa surface latérale, de longueur  $L = 1$  m et de coefficient de diffusion  $D = 10^{-5}$  m.s<sup>-2</sup>.

Initialement, la température est  $T1 = 20$  °C en tout point de la barre. Celle-ci est placée au contact de deux thermostats de température  $T1 = 20$  °C en  $x = 0$  à une extrémité et  $T2 = 100$  °C en  $x = L$  à son autre extrémité. Les conditions aux limites sont donc de type Dirichlet.

On souhaite tracer l'évolution de la température le long de la barre pendant 5 heures.

On choisit de tracer à un instant  $t$  la température aux différentes positions le long de la barre dans un tableau unidimensionnel. On mettra à jour la température le long de la barre des temps  $t = 0$  à  $t = t_{\text{max}}$  par pas  $dt$  de 1 seconde.

On souhaite tracer la courbe des températures le long de la barre toutes les 600 secondes (=10 min).

Remarque : on aurait pu constituer directement un tableau bidimensionnel des profils de température au cours du temps.

Pour la discrétisation spatiale le long de la barre, on choisit  $N_x = 100$  points.

Compléter l'algorithme suivant et tracer les courbes via Pyso :

```
#importer les modules
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
#définir les constantes utiles
D = 1e-5
L = 1
T1 = 20
T2 = 100
#définir le nbre de points pour la discrétisation le long de la barre
Nx = 100
```

```
#définir le temps total de simulation
tmax = 5*3600
#définir le pas temporel et le pas spatial
dt =
dx =
r = K*dt/dx**2
#discrétisation de x le long de la barre
x = np.linspace(0,L,Nx+1)
```

```
#initialisation de la température initiale à T1
T=T1*np.ones(Nx+1)
```

```
#création et tracé du tableau des profils de température au cours du temps avec t
la #température en t+dt et T la température en t
for i in range(tmax+1):
    t=np.empty(Nx+1) # création du tableau vide de t
    t[ ]= # définition des conditions aux limites
    t[ ]=
    for k in range( , ): # calcul du tableau de température en t+dt
```

```
T = t # pour calculer la propagation de la chaleur à chaque nouveau pas temporel
if i % 600 == 0: # tracé toutes les 10 minutes
    plt.plot(x,T,color='blue')
```

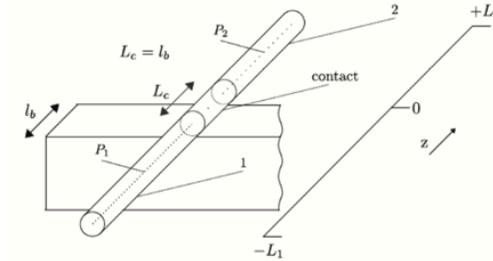
```
plt.xlabel('Position x (en m)')
plt.ylabel('température T (en °C)')
plt.title('Diffusion de la chaleur le long de la barre')
```

```
plt.show()
```

## Partie II - Modélisation thermique de la caténaire, train à l'arrêt

**Objectif :** connaître l'évolution de la température au sein de la caténaire lorsque le train est à l'arrêt.

On décompose pour cela la caténaire en plusieurs zones :  $P_1$ ,  $P_2$  et la zone de contact. Nous nous limiterons à une étude simplifiée de ces zones (**figure 4**).



**Figure 4** – Caténaire et bande de captage du pantographe, au niveau de la zone de contact

La caténaire est modélisée par un cylindre de rayon  $R$ , en cuivre de conductivité électrique  $\gamma$ , de conductivité thermique  $\lambda$ , de capacité thermique massique  $c$  et de masse volumique  $\rho$ . Le pantographe est modélisé dans la **figure 4** par un parallélépipède de largeur  $L_c$ .

Pour l'étude de la caténaire, on utilisera les coordonnées polaires  $(r, \theta, z)$ . L'axe  $z$  est l'axe de la caténaire, orienté sur la **figure 4** et  $\vec{u}_z$  est le vecteur unitaire.

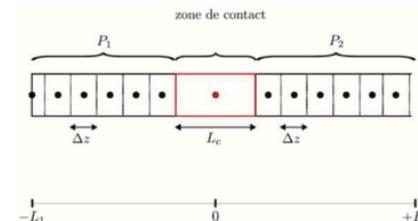
Les échanges conducto-convectifs à l'interface caténaire/air sont régis par la relation de Newton

$$\delta \Phi = h(T_{\text{paroi}} - T_e) dS \quad (1)$$

avec  $\delta \Phi$  le flux thermique en Watt (W) fourni par la caténaire à l'air à travers une surface  $dS$ ,  $T_{\text{paroi}}$  la température de la caténaire en  $r = R$ ,  $T_e = 20^\circ\text{C}$  la température de l'air et  $h$  un coefficient constant.

### II.1 – Régime transitoire dans la zone $P_1$ : $-L_1 < z < -L_c/2$

Dans la zone  $P_1$ , on considère qu'il y a invariance suivant  $r$  et  $\theta$ . On étudie le régime transitoire. La température  $T$  ne dépend donc que de  $z$  et  $t$  :  $T(z, t)$ .



**Figure 5** – Discretisation spatiale de la caténaire autour de la zone de contact

Théoriquement, montrer que la solution en régime stationnaire s'exprime par :

$$T_{\text{statio}}(x) = T1 + \frac{T2 - T1}{L} x$$

La solution en régime variable tend-elle vers cette limite ?

Evaluer  $\tau$  le temps typique de diffusion thermique, le régime stationnaire est-il quasiment atteint lorsque la durée de diffusion a atteint  $\tau$  ?

Remarque sur la stabilité : vérifier si la valeur de  $r$  est compatible avec un schéma de résolution stable.

### b) Thermalisation d'une barre de fer initialement à température uniforme au contact d'un seul thermostat à ses extrémités

On s'intéresse de nouveau à une barre conductrice, d'épaisseur négligeable, calorifugée sur sa surface latérale, de longueur  $L = 2 \text{ m}$  et de coefficient de diffusion  $D = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

Initialement, la température est  $T = 1^\circ\text{C}$  en tout point de la barre. Celle-ci est placée au contact d'un thermostat de température  $T(x=0, t) = T(x=L, t) = 0^\circ\text{C}$  à ses extrémités. Les conditions aux limites sont donc de type Dirichlet.

On choisit de tracer à un instant  $t$  la température aux différentes positions le long de la barre dans un tableau unidimensionnel.

On souhaite tracer l'évolution de la température le long de la barre pendant 1 seconde, et on mettra à jour la température le long de la barre des temps par pas  $dt = 10^{-4} \text{ s}$ .

On souhaite tracer la courbe des températures le long de la barre toutes les  $5 \cdot 10^{-2}$  secondes.

Pour la discrétisation spatiale le long de la barre, on choisit  $N_x = 100$  points.

Créer l'algorithme pour tracer les courbes.

### Sujet 1 – CCINP 2018 PSI – Modélisation et ingénierie numérique

À l'arrêt, la caténaire est parcourue par un courant continu d'intensité  $I = 60$  A, réparti uniformément. On prend comme système au sein de la zone  $P_1$  un cylindre plein en cuivre, de rayon  $R$ , compris entre  $z$  et  $z + \Delta z$  étudié entre  $t$  et  $t + \Delta t$  (**figure 5**). La relation de Newton (1) définie précédemment s'applique.

**Q10.** Pour le système défini précédemment, donner les expressions des flux thermiques entrant en  $z$ , sortant en  $z + \Delta z$  et sur les parois latérales (pertes conducto-convectives).

**Q11.** Donner l'expression de l'énergie dissipée par effet Joule dans le système entre  $t$  et  $t + \Delta t$  en fonction de  $\Delta z$ ,  $\Delta t$ ,  $I$ ,  $\gamma$  et  $R$  le rayon de la caténaire.

**Q12.** En appliquant le premier principe de la thermodynamique au système et en considérant  $\Delta z$  et  $\Delta t$  comme des infiniments petits du premier ordre, montrer que  $T$  est solution d'une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - b(T - T_c) + d,$$

avec  $a, b$  et  $d$  des constantes à exprimer en fonction de  $R, \lambda, \rho, c, \gamma, I$  et  $h$ .

## II.2 – Résolution numérique dans la zone $P_1$

L'objectif est de résoudre numériquement l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - bT + e \text{ avec } a, b \text{ et } e \text{ des constantes.} \quad (2)$$

Soient  $f$  une fonction de classe  $C^2$  sur un intervalle  $I$  et  $x \in I$ .

**Q13.** À l'aide de la formule de Taylor-Young, écrire le développement limité à l'ordre 2 de  $f(x + \varepsilon)$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Déterminer aussi le développement limité à l'ordre 2 de  $f(x - \varepsilon)$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Q14.** En déduire la valeur de :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{f(x + \varepsilon) - 2f(x) + f(x - \varepsilon)}{\varepsilon^2} \right).$$

On découpe maintenant l'intervalle  $[-L_1, -L_c/2]$  en  $N$  sous intervalles  $[z_k, z_{k+1}]$  de longueur  $\Delta z$  avec  $\Delta z = (L_1 - L_c/2)/N$ .  $z_0$  correspond à  $-L_1$  et  $z_N$  à  $-L_c/2$ .

**Q15.** Déduire des **questions Q13** et **Q14** une expression approchée de  $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z_k, t)$ .

On choisit  $\Delta t$  comme pas de temps. On cherche l'évolution de la température pendant une durée  $M\Delta t$  avec  $M$  un entier naturel. On définit donc les temps  $t_p = p\Delta t$  avec  $p \in [0, M]$ .

**Q16.** En utilisant la méthode d'Euler, donner l'expression de  $\frac{\partial T}{\partial t}(z_k, t_p)$  en fonction notamment de

$$T(z_k, t_{p+1}) \text{ et de } T(z_k, t_p).$$

**Q17.** En utilisant l'équation aux dérivées partielles (2), déterminer l'expression de  $T(z_k, t_{p+1})$  en fonction de  $T(z_k, t_p)$ ,  $T(z_{k+1}, t_p)$ ,  $T(z_{k-1}, t_p)$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $e$ ,  $\Delta t$  et  $\Delta z$ .

L'objectif est de construire un tableau de  $M+1$  lignes et  $N+1$  colonnes pour lequel :

- la première ligne contient  $N+1$  valeurs représentant les températures initiales pour chaque position  $z_k$  ;
- la deuxième ligne contient  $N+1$  valeurs représentant les températures à  $t = \Delta t$  pour chaque position  $z_k$  ;
- la  $p$ -ième ligne contient  $N+1$  valeurs représentant les températures à  $t = p\Delta t$  pour chaque position  $z_k$ .

On donne dans le **tableau 1** le programme avec des lignes incomplètes. On utilisera les constantes définies en début de programme pour l'écriture des lignes incomplètes. On note  $T_0$  la température initiale de la caténaire. **Le candidat doit utiliser au choix un des deux langages : Python ou Scilab.**

**Q18.** Donner le contenu de la ligne 18 (on pourra également utiliser les lignes suivantes si nécessaires) qui enregistre les conditions initiales dans le tableau Tab.

**Q19.** Recopier et compléter la ligne 27 qui permet de remplir une ligne de Tab en fonction de la précédente. Veuillez respecter l'ordre des paramètres  $p$  et  $k$  utilisés dans les lignes 27 et suivantes.

Python	N°	Scilab
import numpy as np	1	
	2	
#Définition des constantes :	3	//Définition des constantes :
T0=23 #Température initiale de la caténaire.	4	T0=23 //Température initiale de la caténaire.
	5	
a=10**(-4)	6	a=1e-4
b=1.2*10**(-3)	7	b=1.2e-3
e=3*10**(-2)	8	e=3e-2
L=0.95 #Longueur de la caténaire étudiée (L1-Lc/2)	9	L=0.95 //Longueur de la caténaire étudiée (L1-Lc/2)
Lc=0.05 #Longueur de la zone de contact	10	Lc=0.05 //Longueur de la zone de contact
N=50 #Nombre d'intervalles de longueur dz	11	N=50 //Nombre d'intervalles de longueur dz
dt=1 #Pas de temps en s	12	dt=1 //Pas de temps en s
M=1200 #Nombre de pas de temps de l'étude	13	M=1200 //Nombre de pas de temps de l'étude
g=0.09 #Grandeur proportionnelle au flux en z=-Lc/2	14	g=0.09 //Grandeur proportionnelle au flux en z=-Lc/2
dz=L/N	15	dz=L/N
Tab=np.zeros((M+1,N+1))	16	Tab=zeros(M+1,N+1)
#Définition des conditions initiales :	17	//Définition des conditions initiales :
...	18	...
...	19	...
...	20	...
#Condition à la limite z=-L1	21	//Condition à la limite z=-L1
...	22	...
...	23	...
#Résolution de l'équation aux dérivées partielles	24	//Résolution de l'équation aux dérivées partielles
for p in range(0,M):	25	for p=1:M
for k in range(1,N):	26	for k in 2:N
Tab[p+1,k]=Tab[p,k]+ ...	27	Tab(p+1,k)=Tab(p,k)+ ...
	28	end
Tab[p+1,N]=Tab[p,N]+dt*(-a*(Tab[p,N]-Tab[p,N-1])/dz-b*Tab[p,N]*dz+e*dz+g)/dz	29	Tab(p+1,N)=Tab(p,N)+dt*(-a*(Tab(p,N)-Tab(p,N-1))/dz -b*Tab(p,N)*dz+e*dz+g)/dz
	30	end

**Tableau 1 – Programme incomplet**

### Partie III - Stockage des déchets radioactifs

Le projet français Cigéo vise à enfouir, sous 500 m de roches argileuses, les déchets nucléaires dits « de moyenne et haute activité à vie longue » ( $T_{1/2} > 31$  a) - soit les plus dangereux - sur un terrain situé à cheval sur les départements de la Meuse et de la Haute-Marne (site de Bure). Afin de préparer ce projet, un laboratoire souterrain a été mis en service sur ce site en 2 000 par l'Agence nationale pour la gestion des déchets radioactifs (Andra).

Les combustibles usés, qui constituent l'essentiel des déchets de haute activité et qui resteront radioactifs des centaines de milliers d'années, sont actuellement entreposés dans les installations d'Orano (ex-Areva) à La Hague (Manche) sous forme de « colis » vitrifiés.

On étudie de manière très simplifiée la possibilité de stocker de tels déchets radioactifs, sous une couche argileuse d'épaisseur  $L = 5,0 \cdot 10^2$  m.

Du fait de la radioactivité des produits de fission, les déchets sont exothermiques. Ils sont vitrifiés dans des colis qui dégagent une puissance  $P_0 = 2,0$  kW dans la première décennie du stockage et décroissante dans le temps.  $N$  colis sont entreposés à 500 m sous la surface. Ils sont uniformément répartis sur une surface  $S$ .

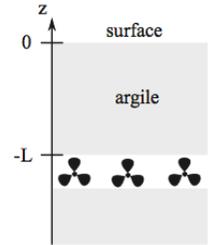


FIGURE 9 – Paramétrage du problème

La température dans l'argile est notée  $T(z, t)$ . L'argile a une masse volumique  $\rho_a$ , une conductivité thermique  $\lambda_a$ , une capacité thermique massique  $c_a$  et une diffusivité thermique  $D_a$ , toutes uniformes. L'épaisseur de la couche dans laquelle seront entreposés les déchets radioactifs est négligeable devant  $L$ .

**Q33.** Citer la loi de Fourier en nommant les différentes grandeurs physiques qui interviennent et en précisant les unités. Quel est son contenu physique ?

**Q34.** En réalisant un bilan d'énergie interne sur une tranche d'argile de surface  $S$  d'épaisseur  $dz$ , montrer que  $T(z, t)$  est solution de l'équation de la diffusion thermique (5) où le coefficient de diffusivité thermique  $D_a$  sera exprimé en fonction de  $\rho_a$ ,  $c_a$  et  $\lambda_a$ . La simplifier dans le cas stationnaire. Préciser l'unité de  $D_a$ .

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (5)$$

**Q35.** Interpréter les deux conditions aux limites suivantes :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=-L} = -\frac{N \cdot P_0}{2 \lambda_a \cdot S} \quad \text{et} \quad T(z=0, t) = T_{\text{ext}} \quad (6)$$

**Q36.** Donner l'expression de  $T(z)$  en régime permanent. Que vaut  $T(-L)$  ?

**Donnée numérique :**

- Température annuelle moyenne de l'atmosphère sur le site de Bure :  $T_{\text{ext}} = 13^\circ\text{C}$ .

**Q37.** La température dans l'argile ne doit pas dépasser  $T_{\text{max}}$  afin que ses propriétés de confinement ne soient pas dégradées. Le stock total de déchets français représente  $N = 3,6 \cdot 10^4$  colis. Estimer la surface  $S$  nécessaire à leur enfouissement, si  $T_{\text{max}} = 100^\circ\text{C}$ .

**Q38.** On envisage d'attendre 30 ans avant d'enfouir les déchets, pendant lesquels ils sont entretenus en surface. Pourquoi ?

Pour tester le fonctionnement du programme, de façon indépendante par rapport aux zones voisines, on impose des conditions aux limites :

- limite en  $z = -L_1$  : une température constante, identique à la température initiale  $T_0$ .

**Q20.** Donner la ligne 22 (et suivantes si nécessaires) qui fixe la condition à la limite en  $z = -L_1$ .

- limite en  $z = -L_c/2$  : on admettra une densité de courant thermique constante  $\vec{j}(-L_c/2, t) = -j\vec{u}_z$  avec  $j = \text{cste} > 0$  due au transfert de chaleur provenant de la zone de contact. Cette condition est définie aux lignes 29 et 30.

**Q21.** En faisant un bilan d'énergie sur le dernier élément de largeur  $\Delta z$  situé juste avant  $z = -L_c/2$ , déterminer l'expression du terme  $g$  de la ligne 30, qui traduit le transfert de chaleur, en fonction de  $j$ ,  $\rho$  et  $c$ .

**Q22.** En exploitant la figure 6, indiquer si le régime stationnaire est atteint ou non au bout de 1200 s. Justifier sans aucun calcul.

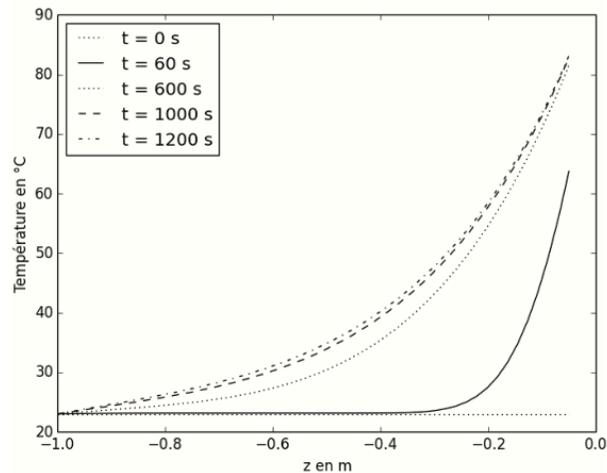


Figure 6 – Résultats de la résolution de l'équation : température en fonction de  $z$  pour différents temps

### Sujet 2 – E3A 2023 PSI – Physique - Chimie

On se propose dans la suite de simuler numériquement l'évolution temporelle du champ de température  $(z, t) \mapsto T(z, t)$  de la couche supérieure d'argile au cours du temps.

L'objectif sera donc d'approcher la fonction  $(z, t) \mapsto T(z, t)$ .

### Notations

- $h$  est le pas de la subdivision uniforme  $(t_i)_{i \in [0, N_t]}$  de l'intervalle de temps  $[0, \Delta t = 3\tau]$  où  $\tau$  est la durée caractéristique de diffusion thermique.

$$t_i = i \cdot h \text{ et } \tilde{T}^i(z) \text{ est l'approximation de } T(z, t_i) \text{ pour } i \in [0, N_t]$$

- $k$  est le pas de la subdivision uniforme  $(z_n)_{n \in [0, N_z]}$  de l'intervalle  $[-L, 0]$

$$z_n = n \cdot k \text{ et } \tilde{T}_n(t) \text{ est l'approximation de } T(z_n, t) \text{ pour } n \in [0, N_z]$$

En conclusion :  $\tilde{T}_n^i$  est l'approximation numérique de la solution  $T(z = n \cdot k, t = i \cdot h)$  sur un maillage spatial de pas  $k$  et une discrétisation temporelle de pas  $h$ .

Présentation du schéma numérique explicite centré en espace :

$$\frac{\tilde{T}_n^{i+1} - \tilde{T}_n^i}{h} = D_a \frac{\tilde{T}_{n+1}^i - 2\tilde{T}_n^i + \tilde{T}_{n-1}^i}{k^2}. \quad (7)$$

**Stabilité du schéma numérique :** le schéma numérique est stable si  $r \leq \frac{1}{2}$  avec  $r = \frac{D_a \cdot h}{k^2}$ .

On propose les lignes de code suivantes. Initialement, le champ de température de l'argile est uniforme de valeur égale à  $T_{\text{ext}}$ .

```

1  #Constantes numériques
2  lambda_a, c_a, rho_a = 1.5, 7e2, 1.7e3
3  D_a = ... #coefficient de diffusivité thermique
4  P0, N, L, S = 2e3, 36000, 5e2, 1e8
5  tau = ... #temps caractéristique de diffusion thermique
6  T_ext = 13.
7  Nt, Nx = 30000, 50
8  h = ... #pas discrétisation temporelle
9  k = ... #pas discrétisation spatiale
10 #coefficient r
11 r = D_a * h / k**2
12 assert(r < 0.5)
13 #initialisation champ température
14 T = [[Text for j in range(Nx)] for i in range(Nt)]
15 T[0][0] = T[0][1] + N * P0 / (2 * lambda_a * S) * k
16 #Schéma numérique explicite
17 for t in range(Nt - 1):
18     for x in range(1, Nx - 1):
19         T[t + 1][x] = T[t][x] + ...
20     T[t+1][0] = T[t+1][1] + N * P0 / (2 * lambda_a * S) * k

```

Après traitement des données, on obtient le réseau de courbes page suivante (figure 10).

Q39. Donner l'expression du pas de discrétisation temporelle  $h$  en fonction de  $\Delta t$  et  $N_t$ .

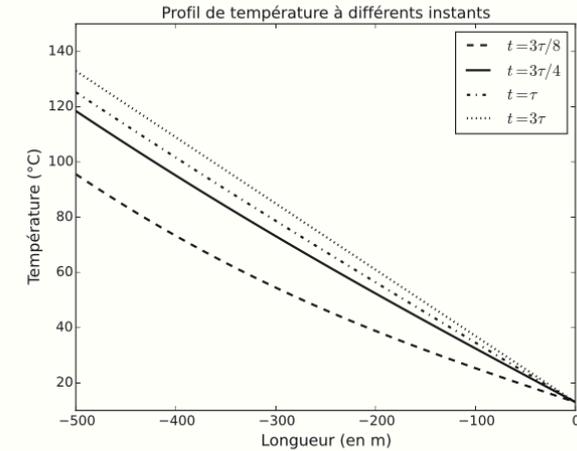


FIGURE 10 – Évolution temporelle du champ de température dans la couche d'argile

Q40. Donner une estimation de la durée caractéristique  $\tau$  de diffusion thermique. Faire l'application numérique.

Q41. Justifier que  $\left. \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right|_{z_n, t_i} \approx \frac{\tilde{T}_{n+1}^i - 2\tilde{T}_n^i + \tilde{T}_{n-1}^i}{k^2}$ .

Q42. Quel est l'intérêt de la ligne 12 ? Que traduisent les lignes 15 et 20 ?

Q43. Compléter la ligne 19 sur votre copie.

Q44. Commenter le réseau de courbes obtenu. Quelle(s) critique(s) pourrait-on formuler au sujet des lignes de code proposées ?