

Exercice 1 – Modèle de Drude et probabilité de collisions

1. La probabilité de subir un choc entre t et $t + dt$, est donnée par $\frac{dt}{\tau}$. La probabilité de ne pas subir un choc entre t et $t + dt$, est donc donnée par $1 - \frac{dt}{\tau}$. On peut donc (loi des probabilités composées) :

$$P(t + dt) = P(t) \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) \implies \frac{dP}{P} = -\frac{dt}{\tau}$$

Par intégration, en tenant compte qu'à $t = 0$, $P(0) = 1$:

$$P(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

2. Par définition le temps moyen est donné par :

$$\langle t \rangle = \frac{\int_0^{\infty} t dp}{\int_0^{\infty} dp}$$

On obtient par intégration par partie : $\langle t \rangle = \tau$.

3. Entre deux chocs, l'équation du mouvement d'un électron est donnée par application du principe fondamental de la dynamique :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$$

En tenant compte des conditions initiales et du fait que le champ électrique est uniforme, on obtient :

$$\vec{v} = -\frac{e}{m} \vec{E} t + \vec{v}_0$$

Par hypothèse, \vec{v}_0 est d'orientation et de module quelconques, sa valeur moyenne est donc nulle. Il vient :

$$\langle \vec{v} \rangle = -\frac{e}{m} \vec{E} \tau \implies \langle \vec{j} \rangle = -ne \langle \vec{v} \rangle = \frac{ne^2 \tau}{m} \vec{E}$$

Ce qui donne : $\sigma = \frac{ne^2 \tau}{m}$.

4. La variation moyenne d'énergie cinétique entre deux instants $t = 0$ et t s'écrit : On a :

$$\Delta E_c = \frac{m}{2} (v^2 - v_0^2) = \frac{m}{2} \left(\frac{e^2 E^2 t^2}{m^2} - \frac{2e \vec{v}_0 \cdot \vec{E} t}{m} \right)$$

Exercice 4 - Limite de validité de la loi d'Ohm et de l'effet Joule en régime variable

6 - Modèle de Drude en régime variable : limite de validité de la loi d'Ohm

$$6-1 - \overset{\text{PFD}}{m} \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v} \rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

↳ en régime sinusoïdal (forcé) $\frac{d}{dt} \leftrightarrow j\omega \rightarrow j\omega \vec{v} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m} \vec{E}$
 $\rightarrow \vec{v} \left(\frac{1 + j\omega\tau}{\tau} \right) = -\frac{e}{m} \vec{E}$

$$\text{donc } \vec{v} = \frac{-e\vec{E}}{m} \frac{\tau}{1 + j\omega\tau}$$

$$6-2 - \vec{j} = e\vec{v} = -ne\vec{v} \text{ (on suppose ici } \tau \text{ réel)}$$

$$\text{donc } \vec{j} = \frac{\frac{me^2\tau}{m} \vec{E}}{1 + j\omega\tau} = \frac{\gamma_0}{1 + j\omega\tau} \vec{E} = \gamma \vec{E}$$

avec $\gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m} \rightarrow$ conductivité en régime stationnaire pour $\omega\tau \ll 1$ soit $f \ll \frac{1}{2\pi\tau}$

$$6-3 - \text{Pour } \omega\tau \gg 1 \rightarrow \text{haute fréquence } f \gg \frac{1}{2\pi\tau} \gamma \approx \gamma_0$$

$$\vec{j} \approx \frac{\gamma_0}{j\omega\tau} \vec{E} = \left[-\frac{ne^2}{m\omega} j \right] \vec{E} = -\gamma_{HF}(\omega) \vec{j} \text{ (Re) en électrolyse } \gamma_{HF} = \frac{\gamma_0}{\omega} \text{ avec } \omega_f \text{ pulsation plasma}$$

6-4 - Puissance volumique dissipée par effet Joule P_v

$$P_v = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

6-5 - Expressions des grandeurs réelles : $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$

$$\vec{j} = -j \gamma_{HF}(\omega) e^{j\omega t} \vec{E}_0 = \gamma_{HF} \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} \text{ car } -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{donc } \vec{j} = \text{Re}(\vec{j}) = \left[-\gamma_{HF}(\omega) \vec{E}_0 \sin \omega t \right] \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

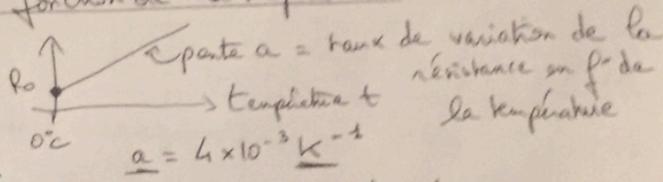
On remarque que \vec{j} et \vec{E} sont en quadrature (déphasés de $\frac{\pi}{2}$)

On aura donc $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle_T = 0$ (valeur moyenne sur une période comme pour Volt I en régime sinusoïdal, s'il est en quadrature)

En effet : $\langle P_v \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{j} \cdot \vec{E} dt = -\frac{1}{T} \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt = -\frac{1}{2T} \int_0^T \sin 2\omega t dt \rightarrow$ rappel de trigo : $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ donc $\int_0^T \sin 2\omega t dt = 0$

6-6- Pour les fréq. industrielles, et sous hautes fréquences
 (féléchons \ll f infarrouge), $\gamma \approx \gamma_0 \rightarrow \rho_s \neq 0$
 le caractère dissipatif de la loi d'Ohm est valide.

Ex 5 - Résistivité en fonction de la température

a) $R = R_0(1 + \alpha t)$  α pente $\alpha =$ taux de variation de la résistance en f. de la température
 R_0 résistance pour $T = 0^\circ\text{C}$
 $\alpha = 4 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$

b) Cours $\rightarrow R = \frac{L}{\gamma S} = \rho \frac{L}{S}$ avec ρ la résistivité $= \frac{1}{\gamma}$
 donc $\rho = \frac{S}{L} R = \frac{S}{L} R_0(1 + \alpha t) \rightarrow f$ affine, \uparrow avec la température

c) Comme pour la cuivre $\rightarrow 1e^-$ par atome $\rightarrow n \approx 10^{25} \text{ m}^{-3}$
 On fait l'hypothèse que la densité électronique varie peu avec la température (électrons de la bande de conduction)

d) $\vec{v} = \mu \vec{E}$ et $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ avec $\vec{j} = -ne\vec{v} = -ne\mu \vec{E} = \gamma \vec{E}$
 donc $\gamma = \frac{1}{\rho} = -ne\mu \rightarrow \mu = -\frac{1}{ne\rho}$
 $|\mu| = \frac{1}{neSR_0(1 + \alpha t)}$ la valeur de la mobilité \downarrow avec la température ($\alpha > 0$)

e) $\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$ α coefficient de dilataion $= 6 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$
 Par ex \rightarrow Pour un bancou de 10 cm et $\Delta T = 1 \text{ K} \rightarrow \Delta l = 1 \mu\text{m} \rightarrow$ dilataion

$R = \rho \frac{L}{S}$ rappal: pour évaluer les variations relatives, on utilise la dérivée logarithmique

$\ln R = \ln \rho + \ln L - \ln S$ avec $S = \pi r^2$ pour un bancou cylindrique de section S
 $\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dL}{L} - \frac{dS}{S}$ $\hookrightarrow \ln S = \ln \pi + 2 \ln r \rightarrow \frac{dS}{S} = 2 \frac{dr}{r}$

donc $\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dL}{L} - 2 \frac{dr}{r}$ \rightarrow la dilataion est inverse donc identique selon r et $l \rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dL}{L}$
 $\left[\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dL}{L} \right] \rightarrow$ avec $\left| \frac{dL}{L} \right| = \alpha dt$ et $\left| \frac{d\rho}{\rho} \right| = \alpha dt$ car $\alpha \ll 1$
 $\frac{dR}{R} = \alpha dt + \alpha dt = 2\alpha dt$ donc $\frac{dR}{R} = \frac{dL}{L}$ car $\alpha \ll 1$

Exercice 6 – Le galvanomètre de Tolman et Stewart : mesure de q/m

1. On considère les porteurs comme un ensemble de Nn points matériels de masse m animés de la même vitesse $v = r\omega_0$, ainsi :

$$E_c(t=0) = \frac{1}{2} Nnm\omega_0^2 r^2.$$

2. De même qu'à la question précédente :

$$E_c(t) = \frac{1}{2} Nnm\omega^2 r^2.$$

Soi par différentiation :

$$dE_c(t) = Nnm\omega d\omega r^2.$$

3. Un observateur « voit » passer pour un tour de fil une charge Nq avec le période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Cela correspond à un courant $I = \frac{dQ}{dt} = \frac{Nq}{T} = \frac{Nq\omega}{2\pi}$.

4. Entre deux instants t et $t + dt$, la vitesse passe de ω à $\omega + d\omega$. L'énergie dissipée par effet Joule entre ces deux instants est donnée par $dE_j = RI^2 dt$. On a donc : $dE_c = -dE_j$. Ainsi :

$$dQ = -\frac{2\pi mnr^2}{qR} d\omega.$$

En intégrant entre l'instant initial et l'instant final, on obtient :

$$\frac{q}{m} = \frac{2\pi r^2 n \omega_0}{RQ}.$$

5. On effectue l'application numérique : $\frac{q}{m} = 1,77 \cdot 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$. La valeur théorique est de $\frac{q}{m} = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$. L'expérience montre que les électrons sont les porteurs de charge.

Sujet 1 : Transfert de charges dans un conducteur par effet Hall

III Transferts de charges par effet Hall

III.A -

Q53. Par définition, $\vec{j} = n \cdot q \vec{v}$.

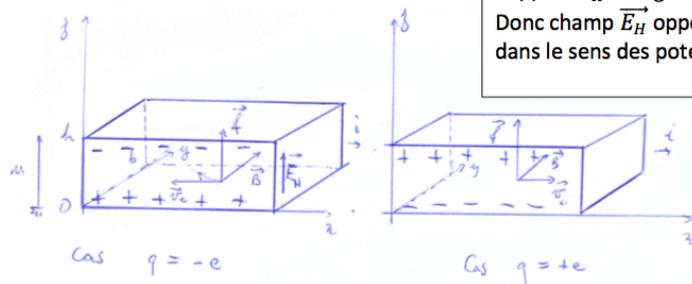
III.B - Approche qualitative de l'effet Hall

Q54. I représente le flux de \vec{j} : $I = \iint_S \vec{j} \cdot d^2\vec{S}$. Le sens arbitrairement choisi pour I revient à prendre $d^2\vec{S} = d^2S \vec{u}_z$ et \vec{j} est de même sens que I soit $\vec{j} = j \vec{u}_z$ (avec $j > 0$). Dans le cas d'électrons, $\vec{j} = -ne\vec{v}$ donc \vec{v} est dans le sens contraire à I : $\vec{v} = -v \vec{u}_z$ (avec $v > 0$).

Q55. Si les porteurs de charges sont de signe positif, le sens de \vec{j} n'est pas modifié, mais celui de \vec{v} l'est et \vec{v} est dans le sens de I : $\vec{v} = v \vec{u}_z$ (avec $v > 0$).

Q56. Un porteur de charge va être soumis à $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = \frac{1}{n} \vec{j} \wedge \vec{B}$. Par conséquent, il subit une force perpendiculaire à la fois à \vec{v} et à \vec{B} , donc dirigée selon (Oz) . Les porteurs de charges - qui ne peuvent pas quitter le conducteur - vont donc s'accumuler sur la face supérieure (ou inférieure) du conducteur. Comme le conducteur reste globalement électriquement neutre, des charges opposées vont apparaître sur la face opposée et il se forme ainsi un champ électrique entre les faces $z = 0$ et $z = h$.

Q57.



Rappel : $\vec{E}_H = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$
Donc champ \vec{E}_H opposé au gradient de V , dans le sens des potentiels décroissants

Q58. Si on relie la masse du voltmètre à la face $z = 0$ et la borne de mesure à la face $z = h$, on mesure u . Si $u < 0$, alors $q = -e$ et si $u > 0$ alors $q = +e$. On a ainsi accès au signe de la charges des porteurs de charge.

III.C - Approche quantitative de l'effet Hall (cas des électrons porteurs)

Q59. On se place dans le premier cas de la Q57. Le champ électrostatique va des charges + vers les charges - donc $\vec{E}_H = E_H \vec{u}_z$ avec $E_H > 0$.

Q60. En régime permanent, les électrons ne sont pas déviés, donc $\sum \vec{f}_{ext} = \vec{0}$ et donc $-e\vec{v}_e \wedge \vec{B} = -e\vec{E}_H$. On en déduit que $\vec{E}_H = -\vec{v}_e \wedge \vec{B}$. C.Q.F.D.

Q61. On remplace : $\vec{E}_H = -(-v_e \vec{u}_x) \wedge B_0 \vec{u}_y$ d'où, en projection sur \vec{u}_z : $E_H = v_e B_0$. Par ailleurs, $v_e = \frac{j}{n_e e}$ et $I = j \cdot h \cdot b$

En remplaçant, il vient finalement : $E_H = \frac{B_0 I}{n_e e \cdot h \cdot b}$. On retrouve bien que \vec{E}_H est de même sens que \vec{u}_z .

Q62. On sait que $U = -\int_0^h \vec{E}_H \cdot d\vec{l}$ d'où $U_H = -\frac{B_0 I}{n_e e \cdot b}$. On a bien une tension négative.

Rappel : $\vec{E}_H = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$
Donc $dV = -\vec{E}_H \cdot d\vec{l}$ avec $d\vec{l} = dz \vec{u}_z$
et $U = V(h) - V(0)$

III.D - Cas de porteurs négatifs

Q63. Le raisonnement serait le même à partir du second schéma. On retrouve la même expression $\vec{E}_H = -\vec{v}_e \wedge \vec{B}$, mais la vitesse est dans le sens contraire. On trouve finalement $U_H = \frac{B_0 I}{n_e e \cdot b}$.

III.E - Applications numériques

Q64. Pour le cuivre, on a un électron libre par atome. Déterminons le nombre d'atome de cuivre par unité de volume : $n_e = \frac{\rho_{Cu}}{M_{Cu}}$. En remplaçant dans l'expression de U_H , on trouve :

$$U_H = -\frac{B_0 I M_{Cu}}{\mu_{Cu} N_A e \cdot b} \text{ soit numériquement : } U_H \approx -3,7 \times 10^{-9} \text{ V}$$

Sujet 2 : Magnétorésistance

Mines Ponts PSI 2016

1. Invariance par rotation autour de l'axe (Oz) et par translation (en négligeant les effets de bord), donc V ne dépend que de r .

Sans charge volumique et en statique : $\text{div} \vec{E} = \text{div} (-\overrightarrow{\text{grad}} V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ donc $\Delta V = 0$.

alors $\frac{d}{dr} (r \frac{dV}{dr}) = 0$ donc $r \frac{dV}{dr} = a$ puis $V(r) = a \ln(r) + b$. Les conditions aux limites sont $\begin{cases} V(r_1) = V_1 = a \ln(r_1) + b \\ V(r_2) = V_2 = a \ln(r_2) + b \end{cases}$ donc : $V(r) = \frac{V_1 - V_2}{\ln(\frac{r_2}{r_1})} \ln(r) + \frac{V_1 \ln(r_2) - V_2 \ln(r_1)}{\ln(\frac{r_2}{r_1})}$, puis :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) = \frac{V_1 - V_2}{r \ln(\frac{r_2}{r_1})} \vec{u}_r.$$

2. $\lambda = \frac{m}{\tau}$ où m est la masse d'un électron et τ le temps moyen entre deux chocs.

3. PFD à un électron, en référentiel galiléen : $m \frac{d^2 \vec{v}}{dt^2} = -e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B} - \lambda \vec{v}$. En régime permanent, $\frac{d^2 \vec{v}}{dt^2} = \vec{0}$, donc $e\vec{E} + e\vec{v} \wedge \vec{B} + \lambda \vec{v} = \vec{0}$. En projection :

$$e \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} = 0,$$

$$e \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + eB \begin{pmatrix} v_\theta \\ -v_r \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} = 0.$$

puis on résout le système :

$$\begin{cases} v_r = -\frac{\lambda c E}{\lambda^2 + e^2 B^2} \\ v_\theta = -\frac{e^2 E B}{\lambda^2 + e^2 B^2} \\ v_z = 0 \end{cases} \quad \text{et avec } \vec{j} = -ne\vec{v} : \begin{cases} j_r = \frac{ne^2 \lambda E}{\lambda^2 + e^2 B^2} ; \\ j_\theta = \frac{ne^3 E B}{\lambda^2 + e^2 B^2} ; \\ j_z = 0. \end{cases}$$

4. Attendu que $V(r) = a \ln(r) + b$, une surface équipotentielle, à V constant, est une surface à r constant, soit un cylindre \mathcal{S} , de rayon r , de hauteur h , d'axe (Oz). L'intensité du courant à travers \mathcal{S} est :

$$I = \iint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}} j_r dS = j_r 2\pi r h.$$

Pour obtenir R , on exprime I en fonction de $V_1 - V_2$, avec l'expression de E obtenue au 1 :

$$I = j_r 2\pi r h = \frac{ne^2 \lambda E}{\lambda^2 + e^2 B^2} 2\pi r h = \frac{ne^2 \lambda}{\lambda^2 + e^2 B^2} \frac{V_1 - V_2}{r \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} 2\pi r h.$$

$$\text{soit : } I = \frac{ne^2 \lambda}{\lambda^2 + e^2 B^2} \frac{2\pi h}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} (V_1 - V_2) \text{ donc } R = \frac{\lambda^2 + e^2 B^2}{ne^2 \lambda 2\pi h} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

Remarque : attendu que \vec{j} est radial, donc I aussi, la différence de potentiel à considérer est bien $V_1 - V_2$ en convention récepteur ; l'expression de R est alors bien positive.

$$R_0 = \frac{\lambda}{ne^2 2\pi h} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \text{ donc } R = R_0 \frac{\lambda^2 + e^2 B^2}{\lambda^2} \text{ et : } \varepsilon = \frac{\lambda^2 + e^2 B^2}{\lambda^2} - 1 = \frac{e^2 B^2}{\lambda^2}.$$

$R_0 = 1,1 \cdot 10^2 \Omega$ et $\varepsilon = 7,9 \cdot 10^{-11}$. La faiblesse de la variation de R est telle qu'une mesure reste impossible.