

## TD – Transport - bloc 3 – Diffusion de particules

### Evaluation du coefficient de diffusion D d'une particule dans un fluide visqueux

#### Exercice 1 - Sédimentation et relation d'Einstein

On s'intéresse à de petites particules sphériques en suspension au sein d'un fluide. Ces particules sont suffisamment diluées pour ne pas interagir entre elles. On considère un tube cylindrique d'axe  $(Ox)$  vertical ascendant, de section  $S$ , de hauteur  $h$ , contenant de l'eau. Ce liquide contient  $N$  particules en suspension, de masse  $m$  chacune. On note  $\rho_p$  la masse volumique des particules et  $\rho$  celle du liquide. On suppose  $\rho_p > \rho$ . Dans l'état initial, le mélange a été rendu homogène par agitation.

1. Chaque particule est soumise à son poids et à la poussée d'Archimède exercée par le liquide, force proportionnelle à la masse de fluide déplacé et opposée au poids, et à une force de frottement visqueux  $-6\pi\eta R \vec{v}$ , où  $\eta$  est la viscosité du liquide et  $R$  le rayon d'une particule.  $(Ox)$  est l'axe vertical ascendant.

Établir l'équation différentielle qui pilote l'évolution de la vitesse d'une particule :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m^* \vec{g} - 6\pi\eta R \vec{v}$$

Montrer que  $v_x$ , la composante selon  $\vec{u}_x$  de la vitesse, tend vers une valeur limite  $v_L$  que l'on exprimera en fonction de la masse apparente  $m^* = m(1 - \frac{\rho}{\rho_p})$ . Vers

quelles limites tendent  $v_y$  et  $v_z$  ?

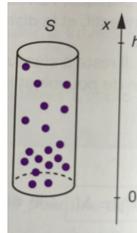
2. On suppose que la vitesse limite  $v_L$  est atteinte très rapidement. On note  $n(x, t)$  la densité particulaire en  $x$  à l'instant  $t$ . Exprimer le vecteur densité de flux de particules  $\vec{j}_1$  résultant du mouvement décrit ci-dessus.

3. Du fait de ce mouvement, les particules sédimentent et leur densité augmente à faible altitude. Un gradient de densité particulaire apparaît donc au sein du liquide, donnant lieu à un phénomène diffusif.

On notera  $D$  le coefficient de diffusion des particules dans le liquide. Exprimer le vecteur densité de flux de particules  $\vec{j}_2$  de diffusion résultant.

4. Au bout d'un certain temps, un régime stationnaire et donc un équilibre finit par s'établir. A quelle équation différentielle obéit alors la concentration particulaire ?

5. Déterminer l'expression de  $n(x)$  et représenter le profil de densité en fonction de  $x$ . On notera  $n_0 = n_0(x=0)$  la densité au fond du récipient. Exprimer la distance caractéristique  $H$  dite de sédimentation : hauteur typique de la répartition au fond du récipient.



6. L'expression obtenue précédemment pour la concentration obéit aussi à la loi de répartition de Boltzmann  $n(x) = A e^{-\frac{E_p}{k_B T}}$ , où  $E_p$  est l'énergie potentielle apparente (avec  $m^*$ ) de la particule, dans le champ de pesanteur,  $k_B = \frac{\mathfrak{R}}{N_A}$  la constante de Boltzmann.

En déduire la relation d'Einstein  $D = \frac{k_B T}{6\pi\eta R}$

7. Evaluer  $H$  pour deux molécules de même masse volumique et de masses molaires différentes :  $\mu_p = 1,3 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  à température ambiante  $T = 293 \text{ K}$ .

**urée** :  $M = 60 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $D = 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

**hémoglobine** :  $M' = 68000 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $D' = 5 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

On prendra  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  et  $\mathfrak{R} = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  constante des gaz parfaits

**Réponses** : 1.  $v_L = -\frac{m^* g}{6\pi\eta R}$ ,  $v_x, v_y \rightarrow 0$  amorties ; 2.  $\vec{j}_1 = n \vec{v}_L$  ; 4. Équilibre :  $\vec{j}_1 +$

$\vec{j}_2 = \vec{0}$  ; 5.  $n(x) = n_0 e^{-\frac{x}{H}}$  avec  $H = \frac{D}{v_L} = \frac{6\pi\eta R D}{m^* g}$  ; 7.  $m(\text{urée}) = 1,0 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$  et

$m^*(\text{urée}) = 2,3 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$  et  $m(\text{hém}) = 1,1 \cdot 10^{-22} \text{ kg}$  et  $m^*(\text{hém}) = 2,6 \cdot 10^{-33} \text{ kg}$ ,

$H = \frac{k_B T}{m^* g}$  donc  $H(\text{hém}) = 16 \text{ m} \ll H(\text{urée}) = 1,8 \cdot 10^4 \text{ m}$  !!!! en effet, l'hémoglobine

possède une taille bien plus grande que l'urée (+ faible diffusion pour l'hémoglobine)!

### Diffusion du dioxygène en milieu liquide et en géométrie sphérique – Régime stationnaire sans terme source

#### Exercice 2 - Taille critique d'une bactérie aérobie

Une bactérie est modélisée par une sphère de centre  $O$  fixe, de rayon  $R$  et de masse volumique  $\mu = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . La bactérie évolue dans l'eau.

On note  $n(r, t)$  la densité de molécules de dioxygène dissous par unité de volume pour  $r > R$ , et  $c(r, t)$  leur concentration.

Dans l'eau,  $O_2$  diffuse avec un coefficient de diffusion  $D = 2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

Loin de bactérie, la concentration volumique molaire en dioxygène dissous vaut  $c_\infty = 0,2 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$ .

On se placera en régime stationnaire et l'étude est menée au voisinage de la bactérie pour  $r > R$ .

1. Dans ce problème à symétrie sphérique, donner la forme générale du vecteur densité de courant  $\vec{j}$ .
2. Quel est le signe de  $dn/dr$  au voisinage de la bactérie, puisque celle-ci consomme du dioxygène ?  
Exprimer le **flux entrant**  $\Phi(r)$  de molécules de  $O_2$  en  $r$ .  
Justifier que ce flux ne dépend pas de  $r$ . On le notera  $\Phi_0$  par la suite, avec  $\Phi_0 > 0$ .  
Vérifier le signe de  $\Phi_0$ .  
En déduire l'expression de  $n(r)$  puis de  $c(r)$  la concentration en fonction de  $\Phi_0$ ,  $D$ ,  $R$ ,  $N_A$  et de  $c_\infty$ . Représenter l'allure de  $c(r)$  en fonction de  $r$ .
3. La consommation en  $O_2$  d'une bactérie est proportionnelle à sa masse avec un taux massique horaire  $A = 0,02 \text{ mol.kg}^{-1}.\text{s}^{-1}$   
Exprimer  $\Phi_0$  en fonction de  $N_A$ ,  $A$ ,  $R$  et  $\mu$ .
4. En déduire une expression de  $c(R)$  en fonction de  $N_A$ ,  $A$ ,  $\mu$ ,  $R$ ,  $D$  et  $c_\infty$ . Montrer que la bactérie ne peut survivre que si son rayon est inférieur à  $R_C$ . Vérifier l'homogénéité de la relation, et calculer  $R_C$ .

**Réponses :** 1.  $\vec{j} = j(r) \vec{u}_r$ ; 2.  $\phi_0 = D \frac{dn}{dr} 4\pi r^2$  et  $c(r) = \frac{-\phi_0}{4\pi D N_A r} + c_\infty$ ; 3.  $\phi_0 = \frac{4}{3} \pi R^3 \mu A N_A$ ; 4.  $c(R) = -\frac{\mu A R^2}{3D} + c_\infty$  et  $c(R_C) \rightarrow 0$  donne  $R_C = \sqrt{\frac{3Dc_\infty}{\mu A}} = 8 \mu\text{m}$ ,  $R < R_C$ .

### Régime variable avec terme source Solution stationnaire à variables séparées : $n(x,t) = f(x) g(t)$

### Exercice 3 - Diffusion de neutrons et taille minimale d'une bombe au plutonium !

On étudie ici la diffusion unidimensionnelle de neutrons dans un barreau de plutonium cylindrique d'axe  $Ox$  et de section  $S$ , s'étendant entre les abscisses  $x = 0$  et  $x = L$ . On note  $n(x,t)$  la densité de neutrons. Cette diffusion satisfait à la loi de Fick avec un coefficient de diffusion  $D = 22 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ .

Par ailleurs, du fait de réactions nucléaires entre les neutrons et le matériau, des neutrons sont continuellement produits. On note  $dN = K n(x,t) dt dV$  le nombre de neutrons produits dans un élément de volume  $dV$  pendant la durée  $dt$ , avec  $K = 3,5.10^4 \text{ s}^{-1}$  leur taux de production caractéristique.

Pour fixer les conditions aux limites, on admettra, en première approximation, que la densité de neutrons  $n(x,t)$  doit s'annuler aux extrémités du barreau, à tout instant. En revanche, on supposera que  $n(x,t)$  ne s'annule pas à l'intérieur du barreau.

1. Montrer par un bilan local que  $n(x,t)$  est solution de l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + Kn$$

2. Déterminer  $n(x)$  en régime stationnaire à une constante multiplicative près. On introduira une distance caractéristique  $\delta$  dont on précisera l'expression.  
Montrer que ce régime n'est possible que pour une valeur particulière  $L_s$  de la longueur du barreau  $L$ . En faire l'application numérique.
3. En régime variable, on cherche une solution dite stationnaire, car à variables séparées, de la forme :  $n(x,t) = f(x) g(t) = f(x) e^{-\frac{t}{\tau}}$ .  
Déterminer  $f(x)$ . On pourra introduire une nouvelle distance caractéristique  $\delta'$ .  
En déduire que  $n(x,t)$  diverge si  $L > L_s$  qui représente donc la taille minimale d'une bombe au plutonium !

**Réponses :** 2.  $\delta = \sqrt{\frac{D}{K}}$  et  $n(x) = B \sin\left(\frac{x}{\delta}\right) = B \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  avec  $n$  entier pour satisfaire les conditions aux limites, nullité interdite de  $n(x) \rightarrow n = 1$  et  $L = L_s = \pi \delta = 7,9 \text{ cm}$  et  $n(x) = B \sin\left(\frac{\pi x}{L_s}\right)$ ; 3.  $f(x) = B' \sin\left(\frac{\pi x}{L'}\right)$  avec  $L' = \pi \delta'$  et  $\delta' = \sqrt{\frac{K+1}{D}}$  solution explosive pour  $\tau < 0$  soit  $L > L_s$

## TD – bloc 3 – Diffusion de particules Pour aller plus loin

### Autour de l'évaporation de particules ...

#### Exercice 4 – Evaporation de l'éther

Un bécher cylindrique contient de l'éther liquide.

A l'instant initial, l'éther remplit une hauteur  $h_0 = 5$  cm dans un bécher de hauteur  $H = 8$  cm.

A l'interface éther/air, repérée par  $h(t)$ , la pression partielle d'éther est égale à sa pression de vapeur saturante  $P_s$  à la température ambiante  $T_0 = 293$  K. A la sortie du bécher, en  $H$ , la pression partielle de l'éther est négligeable, vu qu'il est évacué par l'air (présence éventuellement des courants d'air). Les vapeurs d'éther sont assimilées à un gaz parfait.

La durée de caractéristique de diffusion de l'éther dans l'air est très inférieure à la durée caractéristique de la vaporisation de l'éther, de telle manière que la vaporisation s'effectue en régime quasi-permanent.

On notera  $n(z)$  la densité en molécules d'éther dans l'air, entre l'interface en  $h(t)$  et  $H$ , où sa diffusion se produit suite à son évaporation à l'interface (problème unidimensionnel).

On donne :

- la masse molaire de l'éther :  $M = 74,1$  g.mol<sup>-1</sup>
- la masse volumique de l'éther :  $\mu = 626$  kg.m<sup>-3</sup>
- le coefficient de diffusion de l'éther dans l'air  $D = 1,5 \cdot 10^{-5}$  m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup>
- la pression de vapeur saturante de l'éther à 293 K :  $P_s = 0,58$  bar

1. Montrer qu'à l'interface en  $h(t)$ , la condition aux limites impose une densité

$$n(z=h) = n_0 \text{ tel que : } n_0 = \frac{N_A P_s}{RT}.$$

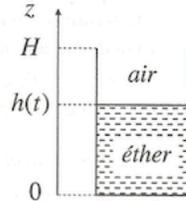
2. Déterminer la densité particulaire  $n(z)$  d'éther entre  $z = h(t)$  et  $z = H$  ;

3. En déduire le flux  $\phi$  d'éther à l'interface, en notant  $S$  la section du bécher.

4. En reliant la variation de hauteur  $h(t)$  au nombre de molécules d'éther s'évaporant à l'interface, établir l'équation différentielle vérifiée par  $h(t)$ .

5. En déduire le temps  $\tau$  nécessaire à l'évaporation totale de l'éther, présent dans le bécher. En faire l'application numérique et commenter.

6. Vérifier l'hypothèse du régime quasi-stationnaire.



#### Exercice 5 – Séchage d'une éponge Adapté d'oral Centrale

On considère une éponge de forme sphérique et de rayon extérieur  $R_0 = 5$  cm en train de sécher.

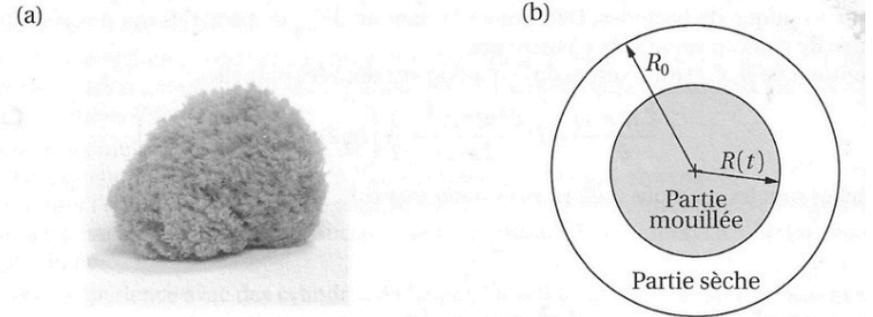


Figure 6.15. (a) Photo d'une éponge naturelle sphérique. (b) Modélisation d'une éponge sphérique durant son séchage.

La densité particulaire en molécules d'eau dans la partie mouillée, dont le rayon est  $R(t)$  à l'instant  $t$ , est supposée constante, notée  $n_{liq}$ . On note  $n(r,t)$  la densité dans la partie sèche de l'éponge, pour  $r \in [R(t), R_0]$ .

On considère un régime quasi-stationnaire.

La transformation subie par les molécules d'eau est isotherme à température ambiante  $T$ . On donne le coefficient de diffusion des molécules d'eau sous forme de vapeur dans l'éponge  $D = 10^{-6}$  m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup>.

La pression partielle de la vapeur d'eau dans l'air, au contact de la surface extérieure de l'éponge, est notée  $P_{H_2O}$ , et la pression de vapeur saturante de l'eau à cette température est  $P_{SAT}(T)$ . Les gaz sont supposés parfaits.

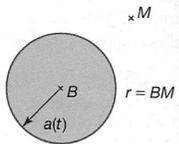
On rappelle que la constante de Boltzmann s'exprime par :

$$k_B = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.mol}^{-1}$$

1. Donner une inégalité entre  $P_{SAT}(T)$  et  $P_{H_2O}$  permettant le séchage de l'éponge.
2. Déterminer les conditions aux limites en  $r = R_0$  et  $r = R(t)$  de la densité particulaire  $n$ , respectivement en fonction de  $P_{H_2O}$  et  $P_{SAT}(T)$ ,  $k_B$  et  $T$ .
3. Soit  $\phi(r, t)$  le flux de particules s'échappant au travers de la sphère de rayon  $r$ , justifier que  $\phi$  est indépendant de  $r$ .
4. Montrer que :  $\frac{\partial n}{\partial r} = -\frac{\phi(t)}{4\pi D r^2}$
5. En déduire l'expression de  $n(r,t)$ .

6. Déterminer alors l'expression de  $\phi(t)$ .
7. Relier  $dR$  à  $\phi$  en exprimant le nombre de particules  $dN$  qui se vaporisent en  $R(t)$  entre  $t$  et  $t + dt$ .
8. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $R(t)$  et l'intégrer pour obtenir l'expression  $\tau$  du temps de séchage de l'éponge.
9. On appelle humidité relative la quantité  $\Pi = \frac{P_{H_2O}}{P_{SAT}(T)}$  où  $P_{H_2O}$  est la pression partielle en eau. Faire l'application numérique du temps de séchage pour :
  - une salle chauffée à 25 °C avec une humidité relative de 30 %
  - une salle chauffée à 15 °C avec une humidité relative de 80 %

## Extraits de concours



### Sujet 1 – Croissance d'une bulle de champagne Centrale PC 2005

On envisage une bulle de champagne unique, sphérique de centre  $B$  fixe et de rayon variable  $a(t)$  contenant  $N_g(t)$  molécules de dioxyde de carbone assimilé à un gaz parfait ; on note  $C_g(t)$  le nombre, supposé uniforme, de molécules de dioxyde de carbone par unité de volume dans cette bulle. On repère un point  $M$  par ses coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  de centre  $B$ . Le champagne liquide occupe le reste de l'espace et on y note  $C(r, t)$  le nombre volumique de molécules de dioxyde de carbone, supposé indépendant de  $\theta$  et  $\varphi$ . Dans cette partie, on néglige les phénomènes de tension superficielle et la pesanteur, de telle sorte que la pression  $p$  est uniforme dans tout le système, avec la même valeur dans la phase gazeuse et dans la phase liquide. L'équilibre chimique entre une bulle de champagne et la solution aqueuse qui l'entoure dans une bouteille fermée où la pression initiale vaut  $p = p_i$ , impose la relation  $C = \chi p_i / k_B T$  entre le nombre volumique de molécules  $C$  dans la phase liquide et la pression  $p_i$  dans la phase gazeuse ;  $\chi$  ne dépend que de la température (c'est donc une constante) ;  $k_B$  est la constante de Boltzmann. Lorsqu'on ouvre la bouteille de champagne, la pression chute brutalement jusqu'à la pression atmosphérique  $p = p_e$  avec  $p_e < p_i$ . La condition d'équilibre chimique n'est plus assurée qu'à l'interface entre la bulle et la solution ; elle s'écrit  $C(r = a, t) = \chi p_e / k_B T$ . Loin de la bulle, on suppose qu'on a toujours  $C(r = \infty, t) = \chi p_i / k_B T$ . Ainsi  $C(r, t)$  n'est plus uniforme et le dioxyde de carbone diffuse dans la solution : on note  $\vec{j} = j(r, t)\vec{u}_r$  le vecteur-densité de flux de particules ; il satisfait à la loi de Fick avec un coefficient de diffusion  $D$ .

II.A.1) Soit une couronne de champagne liquide, comprise entre les rayons  $r$  et  $r + dr$ . Exprimer le nombre  $\delta^2 N_e$  de molécules de dioxyde de carbone qui entrent dans cette couronne entre les instants  $t$  et  $t + dt$  en fonction de  $\partial(r^2 j) / \partial r$ ,  $dr$  et  $dt$ .

II.A.2) On se place en régime stationnaire. En déduire que  $C(r)$  est de la forme  $C(r) = \alpha + \beta / r$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes.

II.A.3) Bien que le régime réel ne soit pas stationnaire puisque le rayon  $a$  dépend du temps, on utilise la forme de  $C(r)$  ci-dessus avec  $a(t)$ . Exprimer  $\alpha$  et  $\beta$  en fonction de  $a(t)$ ,  $\chi$ ,  $p_i$ ,  $p_e$ ,  $k_B$  et  $T$ .

II.A.4) En déduire le taux de variation  $dN_g / dt$  du nombre  $N_g$  de molécules de dioxyde de carbone dans la bulle de gaz en fonction de  $D$ ,  $a$ ,  $\chi$ ,  $p_i$ ,  $p_e$ ,  $k_B$  et  $T$ .

II.A.5) Montrer que  $a(t)$  est solution d'une équation différentielle de la forme :

$$a(t) \dot{a}(t) = K \quad (1)$$

où  $K$  est une constante qu'on exprimera en fonction de  $p_e$ ,  $p_i$ ,  $\chi$  et  $D$ . Vérifier l'homogénéité de l'équation (1).

II.A.6) En déduire l'expression de  $a(t)$ . Lors de la croissance de la bulle à la surface du verre sur son site de naissance pour  $p_e = 1$  bar et  $p_i = 3$  bars, le rayon des bulles croît de  $a_0 \approx 10^{-6}$  m jusqu'à  $a_1 \approx 10^{-5}$  m. Vérifier que dans ces conditions on a  $K \approx 4 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  sachant que  $D \approx 3 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\chi \approx 0,7$ . Évaluer la durée  $\tau_1$  de cette phase.

**Sujet 2 : Stockage de déchets radioactifs - Diffusions thermique et particulaire**  
Centrale 2008 PSI

Les parties suivantes étudient de manière extrêmement simplifiée la possibilité d'un stockage géologique de ces déchets, sous une couche argileuse d'épaisseur  $l = 50$  m (Figure 3). Les vecteurs seront notés en gras.

**II.A - Aspect thermique**

Du fait de la radioactivité des produits de fission, les déchets sont très exothermiques. Le champ de température  $T(x, t)$  est supposé unidimensionnel, dans un cylindre d'argile (masse volumique  $\rho_a$ , conductivité thermique  $K_a$ , capacité calorifique massique  $c_a$ , diffusivité thermique  $D_T$ ) de section  $S$ . L'énergie thermique s'évacue suivant la loi de Fourier :

$$j_T(x, t) = -K_a \text{grad}(T).$$

II.A.1) Quel est le nom et l'unité du vecteur  $j_T(x, t)$  ?

II.A.2) Établir l'équation de la chaleur vérifiée par  $T(x, t)$ .

II.A.3) Relier  $D_T$  aux caractéristiques de l'argile.

II.A.4) Interpréter le résultat obtenu lorsqu'on remplace  $t$  par  $-t$  dans l'équation de la chaleur de la question II.A.2.

Après 30 ans d'entreposage en surface,  $N$  colis de déchets  $C$  sont uniformément répartis sur la surface  $S$  en  $(x, t) = (0, 0)$ . La puissance dégagée par un colis suit approximativement la loi  $p(t) = p_0 e^{-t/\tau}$  avec  $p_0 = 1$  kW et  $\tau = 43$  ans.

II.A.5) Interpréter les conditions aux limites :

$$T(x, 0) = T_0 ; T(l, t) = T_0 ; \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \frac{Np(t)}{2K_a S}.$$

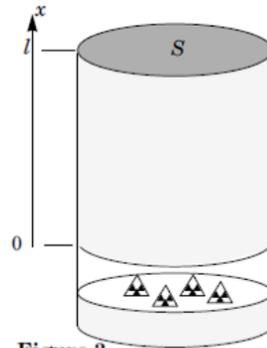


Figure 3

La solution  $T(x, t)$  est représentée sur l'annexe 1, au bout de 10, 40 et 100 ans, avec  $T_0 = 25^\circ \text{C}$ , dans le cas où la température maximale tolérée est de  $100^\circ \text{C}$ .

II.A.6) Compléter le diagramme de l'annexe 1 en identifiant les trois courbes et en justifiant rapidement.

II.A.7)  $K_a = 1,5 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ . À partir de ce diagramme, expliquer comment on peut accéder à la surface nécessaire à l'enfouissement du stock des déchets  $C$  français, estimé à 36 000 colis. Donner une estimation numérique de cette surface.

**II.C - Barrière géologique**

On s'intéresse maintenant à une espèce non retenue au voisinage du colis. Cette espèce est alors susceptible de diffuser dans l'argile environnante. La géométrie utilisée est la même que dans la partie II.A (figure 3), et le problème est encore considéré unidimensionnel. On négligera ici la décroissance radioactive des concentrations.

Simultanément à la diffusion, une partie des déchets se fixe dans l'argile (phénomène de sorption). On écrit donc la concentration totale de l'espèce considérée (en  $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$ ) sous la forme  $c_t(x, t) = c(x, t) + c_f(x, t)$ , où  $c(x, t)$  et  $c_f(x, t)$  représentent respectivement la concentration en espèce mobile et la concentration en espèce fixée. Ces deux concentrations sont liées par  $c_f(x, t) = K_s c(x, t)$ , où  $K_s$  est une constante.

Le vecteur densité de courant de particules (en  $\text{mol} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ ) s'obtient alors par la loi de Fick, à partir de la concentration  $c(x, t)$  en espèce mobile  $j_c(x, t) = -D \text{grad}(c)$ , où  $D$  est le coefficient de diffusion (en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ) de l'espèce mobile.

II.C.1) À l'aide d'un bilan de matière dans une tranche d'argile de section  $S$ , comprise entre  $x$  et  $x + dx$ , montrer que  $c(x, t)$  vérifie une équation de diffusion :

$$D' \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\partial c}{\partial t},$$

où l'on exprimera  $D'$  en fonction de  $D$  et  $K_s$ .

On impose les conditions aux limites :

$$c(0, t) = C_0$$

$$c(l, t) = 0$$

$$c(0 < x < l, 0) = 0$$

II.C.2) Justifier que la solution  $c_0(x)$  de l'équation de la diffusion en régime permanent soit une fonction affine de  $x$ . Expliciter complètement cette solution. On pose  $c(x, t) = c_0(x) - c'(x, t)$ .

II.C.3) Donner l'équation et les conditions aux limites vérifiées par  $c'(x, t)$ . On cherche pour  $c'$  une solution de la forme  $c'(x, t) = f(x)g(t)$  où  $f(x)$  et  $g(t)$  sont deux fonctions à déterminer.

II.C.4) Montrer que  $g(t)$  est nécessairement de la forme  $Ae^{-t/\tau}$ , où  $A$  et  $\tau$  sont deux constantes. Justifier  $\tau > 0$ .

II.C.5) En déduire la forme de  $f(x)$ . En tenant compte des conditions aux limites en  $x = 0$  et  $x = l$ , montrer que  $\tau$  ne peut prendre que les valeurs discrètes  $\tau_n = \tau_1/n^2$ , où  $n$  est un entier non nul, et préciser la valeur de  $\tau_1$  en fonction de  $D'$  et  $l$ .

La fonction  $c_0^*(x)$ , périodique de période  $2l$ , impaire, et qui coïncide sur  $]0, l[$  avec  $c_0(x)$  admet comme développement en série de Fourier :

$$c_0^*(x) = \frac{2C_0}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right).$$

II.C.6) Vérifier soigneusement que

$$c(x, t) = \left[ c_0(x) - \frac{2C_0}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right) \right]$$

est solution de ce problème de diffusion.

II.C.7) Donner l'expression littérale du flux  $\phi(l, t)$  à travers la surface  $S$ , en  $x = l$ .

II.C.8) En déduire la quantité de matière  $N(t)$  évacuée à la surface entre 0 et  $t$  ; on donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

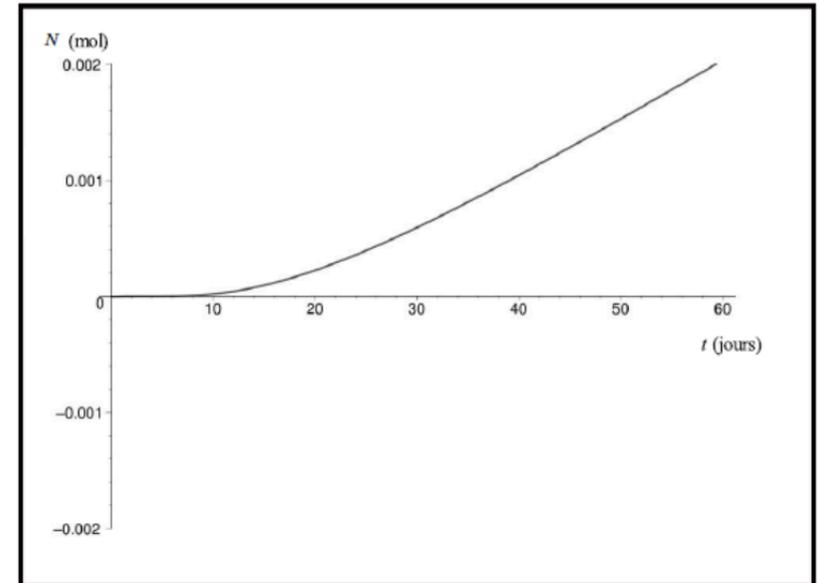
II.C.9) Montrer que  $N(t)$  admet une asymptote pour  $t \gg \tau_1$ , dont les paramètres permettent de déterminer les valeurs de  $D$  et de  $D'$ .

La courbe expérimentale de l'Annexe 3 a été réalisée pour une expérience modèle de diffusion des cations lithium  $Li^+$  dans une argile, avec  $C_0 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ,  $S = 30 \text{ cm}^2$  et  $l = 0,5 \text{ cm}$ .

II.C.10) En déduire graphiquement les valeurs numériques de  $D$  et  $D'$ . Calculer  $K_s$ .

II.C.11) Déterminer l'ordre de grandeur du temps nécessaire au lithium pour atteindre la biosphère, que l'on considérera distante de 50 m. Quel serait ce temps en l'absence de sorption ?

Annexe 3



**Sujet 3 : Mines Ponts PSI - 2008**

**III. — Le transport éolien du sable : Le modèle d'Anderson**

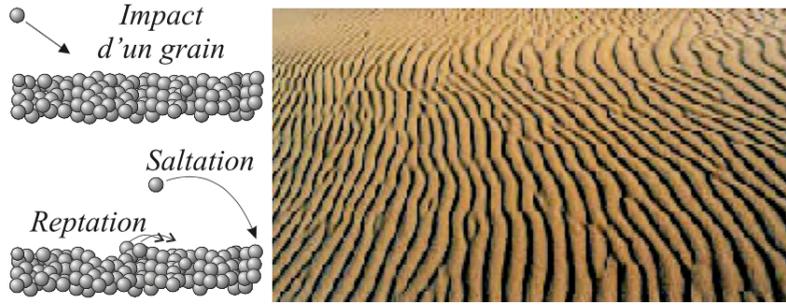


Figure 4

Les rides éoliennes sont des motifs qui se développent, par exemple dans les déserts, à partir d'un sol plat, perpendiculairement à la direction du vent (Fig. 4). On cherche dans cette partie à modéliser leur formation. Régulièrement, le désert est soumis à un vent suffisamment fort pour emporter des grains de sable sur des distances importantes : ce mécanisme est appelé saltation. Puisque le vent les a triés, on admettra que les grains en saltation sont tous entraînés à la même vitesse, et ont tous à peu près la même masse  $m$ . Ainsi, ils suivent tous, en moyenne, la même trajectoire.

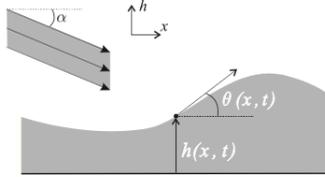


Figure 5

En particulier, leurs angles d'impact sur la surface sableuse sont en moyenne égaux et de l'ordre de 14 degrés. On note  $\alpha$  cet angle caractéristique (Fig. 5). La collision d'un grain de sable sur le sol produit localement l'éjection de plusieurs particules à des vitesses plus faibles que la vitesse de la particule incidente. Les particules éjectées retombent sur le lit de sable au voisinage du point d'impact ; ce phénomène est appelé reptation. La distance caractéristique de parcours des grains en reptation est notée  $\ell_r$ . On suppose que le lit de sable est formé de rides invariables par translation dans la direction perpendiculaire au vent de sable. La hauteur du lit de sable ne dépend alors que d'une seule variable d'espace notée  $x$  et du temps  $t$  ; on la note  $h(x, t)$ . On appelle  $Q(x, t)$  la masse de grains transportés à l'abscisse  $x$  et à l'instant  $t$  par unité de temps et par unité de largeur ; on rappelle que  $[Q] = [M][L]^{-1}[T]^{-1}$ . Ce flux par unité de largeur est la somme de deux contributions, celle des grains en reptation, notée  $Q_r$ , et celle des grains en saltation, notée  $Q_s$ . On suppose dans toute cette partie que le flux des grains en saltation est constant et uniforme avec une incidence fixe d'angle  $\alpha$ . On note enfin  $\rho$  la masse volumique du lit de grains, que l'on suppose uniforme et constante.

□ 18 — En écrivant la conservation locale de la masse sur une tranche de grains d'extension  $\delta x$  et de largeur  $L$ , établir la relation

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = 0$$

□ 19 — Soit  $N_e(x, t)$  le nombre de grains éjectés à l'abscisse  $x$  par unité de temps et de surface ; on rappelle que le flux de reptation est donné par

$$Q_r(x, t) = m \int_{x-\ell_r}^x N_e(u, t) du$$

déterminer l'équation aux dérivées partielles reliant les fonctions  $h$  et  $N_e$ .

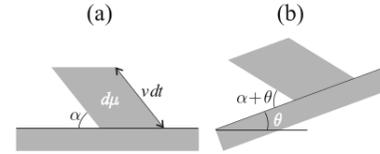


Figure 6 : Saltation sur un lit plat (a), et sur un lit de pente locale  $\theta$  (b). La quantité  $d\mu$  représente un volume élémentaire de grains en saltation.

□ 20 — On note  $N_o$  le nombre de grains en saltation arrivant sur une surface horizontale par unité de temps et de surface. Soit  $n$  la densité de grains de vitesse  $v$  arrivant sur une surface horizontale avec une inclinaison  $\alpha$ . Le nombre de grains arrivant sur une surface d'aire  $S$  pendant le temps  $dt$  est donc  $dN = n d\mu$  (Voir Fig. 6). Exprimer  $N_o$  en fonction de  $n$ ,  $v$  et  $\alpha$ . En déduire que le nombre  $N_s$  de grains en saltation par unité de surface et de temps entrant en collision avec le lit à l'abscisse  $x$  est donné par la relation

$$N_s(\theta) = N_o \left[ 1 + \frac{\tan(\theta)}{\tan(\alpha)} \right] \cos(\theta)$$

□ 21 — Établir l'équation aux dérivées partielles reliant les fonctions  $\theta(x, t)$  et  $h(x, t)$ .

□ 22 — Le modèle d'Anderson consiste à supposer que le nombre de grains éjectés du lit est proportionnel au nombre de grains en saltation  $N_s$  :  $N_e(x, t) = n_o N_s(x, t)$ , où  $n_o$  est le nombre de grains éjectés lors d'une collision. Sous cette hypothèse, et en s'appuyant sur le résultat de la question 19, établir l'équation d'évolution de  $h(x, t)$  en fonction de  $m$ ,  $n_o$ ,  $\rho$ ,  $N_s(x, t)$  et  $N_s(x - \ell_r, t)$ .

□ 23 — Déduire de cette étude l'équation suivante

$$\frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{mn_o N_o}{\rho \tan(\alpha)} \left[ \left( \tan(\alpha) + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \cos(\theta) \right]_{x-\ell_r}^x$$

□ 24 — Montrer que  $h(x, t) = h_o = \text{cste}$  est une solution possible de l'équation de la question 23 (on la nomme solution triviale).

On cherche dorénavant à analyser la stabilité de la solution triviale dans le régime des petites inclinaisons. On considère donc que  $\cos(\theta(x, t)) = \text{cste} \approx 1$

□ 25 — Ecrire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $h$  en faisant apparaître la constante  $c_o = mn_o N_o / \rho$ . Quelle est la dimension de  $c_o$  ?

□ 26 — On cherche la solution de l'équation de la question 25 sous la forme complexe

$$\underline{h}(x, t) = h_o + h_1 \exp[i(kx - \omega t)] \exp(\gamma t)$$

avec  $h_o$  et  $h_1$  deux réels tels que  $|h_o| \ll |h_1|$ , puis  $k$ ,  $\omega$  et  $\gamma$  trois paramètres réels. Déterminer les expressions de  $\omega$  et  $\gamma$  en fonction de  $u = k\ell_r$  et  $\omega_o = c_o / (\ell_r \tan(\alpha))$ .

□ 27 — A quelle condition sur  $k$  et  $\ell_r$ , la solution proposée à la question précédente est-elle stable ?

□ 28 — On note  $v_g$  et  $v_\phi$  les vitesses de groupe et de phase des rides éoliennes dans le cadre de la solution triviale perturbée décrite dans les questions 26 et 27. Déterminer la relation entre  $v_g$ ,  $v_\phi$ ,  $\gamma$  et  $\ell_r$ .

□ 29 — On dit d'un milieu qu'il est dispersif lorsque la célérité d'une onde en propagation dans ce milieu dépend de sa fréquence. Le sable vous semble-t-il être un milieu dispersif ou non ? On justifiera soigneusement sa réponse.

**FIN DE LA PARTIE III**

**FIN DE L'ÉPREUVE**