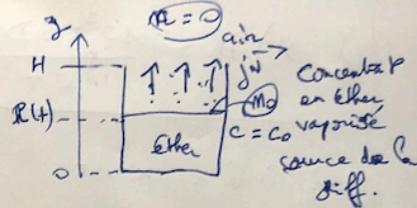


# Evaporat de l'ether

$H = 8 \text{ cm}$   
initialment  $h_0 = 5 \text{ cm}$



Hyp de modèle :  $P(\text{ether}) = 0$  pour  $z > H$   
 $P(\text{ether}) = P_s(\text{ether})$  pour  $z = h$   
 $= 0,58 \text{ bar}$

ceci fixe les condit aux limites pour le gradient de concentration a l'ether

a) On se place dans l'air : vaporisé dans la zone  $h \leq z \leq H$

$\text{div } \vec{j}_N + \frac{\partial n}{\partial t} = 0 \rightarrow \text{div } \vec{j}_N = 0$  (flux conservatif)  
 avec  $\vec{j}_N = -D \text{ grad } n \rightarrow \Delta n = 0$  condit aux limites :

avec  $n = n(z) \rightarrow \frac{d^2 n}{dz^2} = 0 \rightarrow n = Az + B$   
 avec  $n(z=h) = n_0$   
 $n(z=H) = 0$

donc  $n = \frac{n_0}{H-h} (z-H)$  avec  $n_0 = \frac{P_s}{RT} = 0,58$  (gp de la condit (T,P))

et  $PV = nRT \Rightarrow \frac{P_s}{RT} \frac{N}{V} = \frac{P_s}{RT} = n$  densité de particules  
 $\Rightarrow M_0 = \frac{N_A P_s}{RT} = \frac{N_A P_s}{k_B T}$

b)  $\frac{d\phi(z=h)}{dt} = \iint_S \vec{j}_N \cdot d\vec{s} = \frac{+D n_0 S}{H-h}$   
 $\vec{j}_N = -D \frac{dn}{dx}$   
 flux  $> 0$  (sortant de la surface d'ether)

c) Le volume d'ether varie  $\propto$  conspentes par diffusion dans l'air  
 $dN(\text{ether}) = -\phi(z=h) dt = -\frac{D S n_0}{H-h} dt \rightarrow dV = \frac{dN}{n} = \frac{D S n_0}{n(H-h)} dt$   
 et  $dV = dh \times S = \frac{10^3 M}{\rho N_A} \times -\left(\frac{D S n_0}{H-h}\right) dt = \frac{10^3 M}{\rho N_A} \times -\frac{D S}{RT} dt$   
 $(h-H) dh = \frac{10^3 M}{\rho N_A} \times D S \times \frac{N_A P_s}{RT} dt$

$(h-H) dh = \frac{10^3 M S D P_s}{RT} dt \Rightarrow \frac{dh}{dt} \propto h$  grande vitesse d'evaporat au debut

$(h-H) dh = K dt$  avec  $K = \frac{10^3 M S D P_s}{RT}$  puis très faible qd  $h \rightarrow 0$   
 $\int_{h_0}^h (h'-H) dh' = \int_{t=0}^t K dt'$   
 $h(t=0) = h_0$

$\left[\frac{h'^2}{2} - H h'\right]_{h_0}^h \Rightarrow \left[\frac{h^2}{2} - H h - \frac{h_0^2}{2} + H h_0\right] = K t$

d) Pour l'evaporat totale :

$\int_{h_0}^0 (h'-H) dh' = \int_{t=0}^{\tau} K dt' \rightarrow \left[\frac{h'^2}{2} - H h'\right]_{h_0}^0 = K \tau$   
 $\tau = \frac{1}{K} \left(-\frac{h_0^2}{2} + H h_0\right)$   
 $\tau = \frac{h_0}{K} \left(H - \frac{h_0}{2}\right)$

Autre méthode : analyse en ordre de gd. de l'eq. diff.

$|(h-H) dh| \propto \left(\frac{h_0-H}{2}\right) \Delta h \approx K \Delta t$   
 $\left(\frac{h_0-H}{2}\right) x - h_0 \approx K \tau$   
 $\tau \approx \frac{h_0}{K} \left(H - \frac{h_0}{2}\right) \rightarrow$  m'importe!

on prend  $h_0/2$  (moyenne)  
 c) Mais si  $\tau \ll \tau_{diff}$  : la diffusion s'adapte immédiatement a la variat de niveau  $h(t)$  : avec  $\tau_{diff} = \frac{L^2}{D}$  ici  $L$  typique  $\approx |H-h_0| \approx \frac{H}{2}$   
 donc  $\tau \approx 18 \text{ h} \ll \tau_{diff} \approx 1 \text{ min}$

## Exercice 5 : Séchage d'une éponge

1. > Pour que l'éponge sèche, il faut que les molécules d'eau passées sous forme de vapeur diffusent vers l'extérieur pour être éliminées. Pour cela, il faut que la densité particulaire en eau soit plus faible à l'extérieur qu'au niveau de la partie mouillée, c'est-à-dire  $P_{\text{H}_2\text{O}} < P_{\text{sat}}(T)$ .

2. > En  $r = R_0$ , l'air extérieur présente une pression partielle en eau  $P_{\text{H}_2\text{O}}$ . En supposant que l'air extérieur se comporte comme un gaz parfait,  $P_{\text{H}_2\text{O}} = n(R_0, t)k_B T$  où  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$  est la constante de Boltzmann. On a donc :

$$n(R_0, t) = \frac{P_{\text{H}_2\text{O}}}{k_B T}. \quad (6.6)$$

3. > En  $r = R(t)$ , on a  $n(r = R(t), t) = n_{\text{liq}}$ . À la limite de la partie mouillée, l'eau est à l'équilibre liquide-vapeur à la pression  $P_{\text{sat}}(T)$ . En supposant que la vapeur se comporte comme un gaz parfait, on a  $P_{\text{sat}}(T) = n_{\text{liq}}k_B T$ . On en déduit :

$$n(R(t), t) = \frac{P_{\text{sat}}(T)}{k_B T}. \quad (6.7)$$

4. > On note  $\vec{j}_N$  le vecteur densité de flux de particules. La densité particulaire ne dépendant que de  $r$ , la loi de Fick en coordonnées sphériques donne :

$$\vec{j}_N(r, t) = -D \frac{\partial n(r, t)}{\partial r} \vec{u}_r.$$

Le vecteur densité de flux de particules est donc radial et ne dépend que de  $r$ .

5. > Dans le cas d'un problème de diffusion radiale en coordonnées sphériques, un tube de champ de  $\vec{j}_N$  est porté par des lignes de champ radiales et limité par deux portions de sphères de rayons  $r_1$  et  $r_2$  (voir figure 6.29).

7. > Faisons un bilan de particules sur la partie mouillée de l'éponge de rayon  $R(t)$ . Ce système possède à l'instant  $t$  un nombre de particules  $N_{\text{liq}} = \frac{4}{3} \pi R^3(t) n_{\text{liq}}$ . Le nombre de particules s'échappant par unité de temps de la partie mouillée est donné par le flux  $\Phi(t)$ . Le bilan de particules sur la partie mouillée s'écrit donc :

$$\frac{dN_{\text{liq}}}{dt} = -\Phi(t) \implies 4\pi n_{\text{liq}} R^2(t) \frac{dR(t)}{dt} = -\Phi(t). \quad (6.9)$$

8. En combinant les équations (6.8) et (6.9) et en remplaçant  $n_{\text{liq}} = P_{\text{sat}}(T)/k_B T$ , on trouve l'équation différentielle vérifiée par  $R(t)$  :

$$R^2(t) \frac{dR(t)}{dt} = -\frac{D}{1 - \frac{1}{R(t) - R_0}} \left( 1 - \frac{P_{\text{H}_2\text{O}}}{P_{\text{sat}}(T)} \right).$$

9. > En séparant les variables et en intégrant entre l'instant initial  $t = 0$  où  $R(t = 0) = R_0$  l'instant final  $t = \tau$  correspondant à la fin du séchage donc  $R(t = \tau) = 0$ , on a :

$$\int_{R_0}^0 R^2 \left( \frac{1}{R(t)} - \frac{1}{R_0} \right) dR = \int_0^\tau -D \left( 1 - \frac{P_{\text{H}_2\text{O}}}{P_{\text{sat}}(T)} \right) dt.$$

Les calculs de ces intégrales donnent :

$$-\frac{1}{6} R_0^2 = -D \left( 1 - \frac{P_{\text{H}_2\text{O}}}{P_{\text{sat}}(T)} \right) \tau \implies \tau = \frac{R_0^2}{6D \left( 1 - \frac{P_{\text{H}_2\text{O}}}{P_{\text{sat}}(T)} \right)} = \frac{R_0^2}{6D(1 - \Pi)}.$$

On remarque que le temps de séchage de l'éponge ne dépend que de l'humidité relative  $\Pi$  et aucunement de la température du milieu  $T$ .

10. (a)  $\tau = 6,0 \cdot 10^2 \text{ s} = 10 \text{ min}$ .

(b)  $\tau = 2,1 \cdot 10^3 \text{ s} = 35 \text{ min}$ .

5. > En régime stationnaire (ou quasi-stationnaire), le flux de particules se conserve le long d'un tube de champ de  $\vec{j}_N$ , on peut donc écrire  $\Phi(r_1, t) = \Phi(r_2, t)$ . En choisissant  $r_1 = r$  et  $r_2 = r + dr$ , on a :

$$\Phi(r, t) = \Phi(r + dr, t) \implies \frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial r} = 0.$$

On trouve ainsi que  $\Phi(t)$  est indépendant de  $r$ .

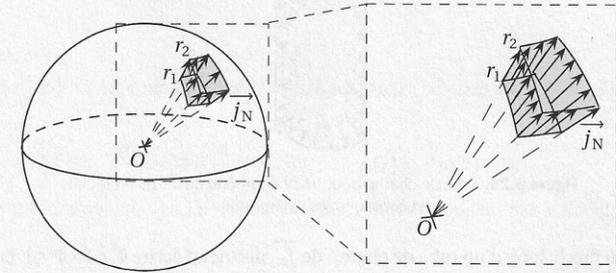


Figure 6.29. Tube de champ pour un phénomène de diffusion radiale en coordonnées sphériques.

4. > Calculons le flux de particules  $\Phi(t)$  au travers de la sphère de rayon  $r$  et de centre  $O$  confondu avec le centre de l'éponge. L'expression de  $\Phi(t)$  est :

$$\Phi(t) = \iint_{(S_r)} \vec{j}_N(r, t) \cdot \vec{dS}_r,$$

où l'intégrale double porte sur la surface  $(S_r)$  de la sphère de rayon  $r$  et  $\vec{dS}_r = dS \vec{u}_r$  est le vecteur surface élémentaire orienté vers l'extérieur de l'éponge. L'intégration se faisant à rayon  $r$  constant, on peut réécrire  $\Phi(t)$  comme :

$$\Phi(t) = j(r, t) \iint_{(S_r)} dS = -4\pi D r^2 \frac{\partial n(r, t)}{\partial r},$$

d'où

$$\frac{\partial n(r, t)}{\partial r} = -\frac{\Phi(t)}{4\pi D r^2}.$$

5. > Par intégration de l'équation par rapport à  $r$ , on a :  $n(r, t) = \frac{\Phi(t)}{4\pi D r} + A(t)$ , où  $A(t)$  est une fonction du temps. En utilisant la condition aux limites en  $r = R_0$  (6.6), la densité particulaire s'écrit :

$$n(r, t) = \frac{\Phi(t)}{4\pi D} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_0} \right) + \frac{P_{\text{H}_2\text{O}}}{k_B T}.$$

6. > L'expression de  $\Phi(t)$  s'obtient en évaluant  $n(r, t)$  en  $r = R(t)$  (6.7) :

$$n(R(t), t) = n_{\text{liq}} = \frac{P_{\text{sat}}(T)}{k_B T} = \frac{\Phi(t)}{4\pi D} \left( \frac{1}{R(t)} - \frac{1}{R_0} \right) + \frac{P_{\text{H}_2\text{O}}}{k_B T}.$$

Finalement,

$$\Phi(t) = \frac{4\pi D (P_{\text{sat}}(T) - P_{\text{H}_2\text{O}})}{k_B T \left( \frac{1}{R(t)} - \frac{1}{R_0} \right)}. \quad (6.8)$$

# Sujet 1 - Croissance d'une bulle de champagne

$p_1 = 3$  bar, le rayon croît de  $a_0 \approx 10^{-6}$  m à  $a_1 \approx 10^{-5}$  m. Vérifier que, dans ces conditions, on a  $K \approx 4.10^{-9}$  USI et sachant que  $D \approx 3.10^{-9}$  USI et  $\chi \approx 0,7$  USI. Évaluer la durée  $\tau_1$  de cette phase.



**Conseils méthodologiques.** L'exercice met typiquement en pratique le Savoir-faire 1 (Diffusion de particules).

a) Évaluons le nombre de particules  $\delta N_r$  traversant la sphère  $S$  de rayon  $r$  entre  $t$  et  $t + dt$ , en comptant positivement celles avançant dans le sens des  $r$  croissants (Fig. 11) :

$$\delta N_r = \left( \iint_S \vec{j}(r, t) \cdot d\vec{S} \vec{u}_r \right) dt = \left( \iint_S j(r, t) dS \right) dt = j(r, t) \left( \iint_S dS \right) dt = j(r, t) 4\pi r^2 dt.$$

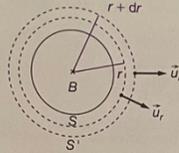


Figure 11

De même, le nombre de particules traversant la sphère  $S'$  de rayon  $r + dr$  entre  $t$  et  $t + dt$  dans le sens des  $r$  croissants est :

$$\delta N_{r+dr} = \left( \iint_{S'} \vec{j}(r + dr, t) \cdot d\vec{S} \vec{u}_r \right) dt = \left( \iint_{S'} j(r + dr, t) dS \right) dt = j(r + dr, t) \left( \iint_{S'} dS \right) dt = j(r + dr, t) 4\pi (r + dr)^2 dt.$$

Alors,  $\delta^2 N_e = \delta N_r - \delta N_{r+dr}$ , soit :

$$\delta^2 N_e = (j(r, t) 4\pi r^2 - j(r + dr, t) 4\pi (r + dr)^2) dt = -4\pi \left( r^2 \frac{\partial j(r, t)}{\partial r} \right) dr dt$$

b) En régime stationnaire,  $\delta^2 N_e = 0$ . En effet, le nombre de particules dans la couronne ne varie pas. On déduit de la question précédente :

$$r^2 j(r) = cte$$

( $j$  est indépendant du temps en régime stationnaire). D'après la loi de Fick,  $j = -DC'(r)$ .

Alors :  $r^2 C'(r) = cte$  soit  $C(r) = \alpha + \frac{\beta}{r}$  avec  $\beta = -cte$ .

c) Pour déterminer les constantes  $\alpha$  et  $\beta$ , on utilise les conditions aux limites à l'infini et au contact avec la bulle :

- pour  $r \rightarrow \infty$ ,  $C \rightarrow \chi p_1 / k_B T$ . Comme alors  $C(r) = \alpha + \frac{\beta}{r} \rightarrow \alpha$ , on déduit :

$$\alpha = \chi p_1 / k_B T ;$$



### Erreur à éviter

Ne pas oublier le signe moins devant  $\delta N_{r+dr}$  : ces particules quittent la couronne.



### Erreur à éviter

Bien conserver le terme  $f = r^2 j(r)$  groupé :  $f(r) - f(r + dr) = -\frac{df}{dr} dr$ .  $r^2$  et  $j$  doivent être traités avec le même soin.



### Technique de calcul

En coordonnées sphériques,  $\vec{j} = -D \text{grad} C = -DC'(r) \vec{u}_r$ .

- pour  $r \rightarrow a(t)$ ,  $C \rightarrow \chi p_e / k_B T$ . Comme  $C(a) = \alpha + \frac{\beta}{a}$ , on obtient :

$$\beta = a(t) \frac{\chi}{k_B T} (p_e - p_1).$$

d) Étudions le nombre de particules  $\delta N$  entrant dans la sphère  $S_a$  de rayon  $a$  entre  $t$  et  $t + dt$  (Fig. 12) :

$$\delta N = \iint_{S_a} \vec{j} \cdot d\vec{S} (-\vec{u}_r) dt = \iint_{S_a} j(a) (-dS) dt = -j(a) 4\pi a^2 dt.$$

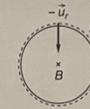


Figure 12

Ainsi, la variation du nombre de molécules gazeuses dans la bulle est :

$$dN_g = \delta N = -j(a) 4\pi a^2 dt = DC'(a) 4\pi a^2 dt = -D \frac{\beta}{a^2} 4\pi a^2 dt = -4\pi D \beta dt.$$

$$\text{Finalement : } \frac{dN_g}{dt} = -4\pi D a(t) \frac{\chi}{k_B T} (p_e - p_1) > 0.$$

La concentration en dioxyde de carbone étant plus élevée au loin, le nombre de molécules contenues dans la bulle croît suite à la diffusion.

e) Le nombre de molécules de dioxyde de carbone et le rayon de la bulle sont liés par la loi des gaz parfaits :

$$p_e V = p_e \frac{4}{3} \pi a^3(t) = N_g k_B T.$$

Par conséquent, suite au résultat de la question d) :

$$\frac{dN_g}{dt} = \frac{1}{k_B T} p_e 4\pi a^2(t) \dot{a}(t) = -4\pi D a(t) \frac{\chi}{k_B T} (p_e - p_1) > 0$$

$$a(t) \dot{a}(t) = \chi D \left( \frac{p_1}{p_e} - 1 \right) = K.$$

Vérifions l'homogénéité :  $a \dot{a}$  est homogène au carré d'une longueur divisé par un temps, soit à un coefficient de diffusion.  $K$  est homogène au coefficient de diffusion  $D$  multiplié par  $\chi$ . Or,  $\chi$  est sans dimension car  $C = \chi p_1 / k_B T$  et  $p_1 / k_B T$  est homogène à  $N/V$ , c'est-à-dire à une concentration.

f) On intègre la relation précédente :

$$\frac{a^2(t)}{2} = Kt + cte.$$

On appelle  $a_0$  le rayon de la bulle à  $t = 0$ , et :

$$a^2(t) = a_0^2 + 2Kt.$$

On utilise la relation :

$$K = \chi D \left( \frac{p_1}{p_e} - 1 \right) = 0,7 \times 3.10^{-9} (3 - 1) \approx 4.10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

La durée de cette phase de croissance est :  $\tau_1 = \frac{a_1^2 - a_0^2}{2K} = 12 \text{ ms}$ .



### Erreur à éviter

Bien penser au signe moins car la normale est rentrante.



### Remarque

Rappelons la loi des gaz parfaits :  $pV = nRT = Nk_B T$ , où  $n$  est la quantité de matière (en mol) et  $N$  le nombre de particules. Ainsi,  $k_B = R / N_A$ , où  $N_A$  est le nombre d'Avogadro.

## Sujet 2 – Stockage déchets radioactifs

### II. C. Barrière géologique :

C 1) Pour une tranche d'épaisseur dx, pendant dt :

$$N(t+dt) - N(t) = [C_t(x, t+dt) - C_t(x, t)] S \cdot dx = \frac{\partial C_t}{\partial t} \cdot dt \cdot S \cdot dx = (1 + K_s) \cdot \frac{\partial C}{\partial t} \cdot dt \cdot S \cdot dx$$

$$\text{et } N(t+dt) - N(t) = [j_c(x, t) - j_c(x+dx, t)] S \cdot dx = -\frac{\partial j_c}{\partial x} \cdot dt \cdot S \cdot dx = D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \cdot dt \cdot S \cdot dx$$

$$\text{On en déduit : } \frac{\partial C}{\partial t} = D \cdot \frac{1}{1 + K_s} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \text{ soit } \mathbf{D'} = \mathbf{D} / (1 + K_s).$$

$$\text{soit } N(t) = \frac{D \cdot S \cdot C_0}{1} \left( t - 2\tau_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \right) = \frac{D \cdot S \cdot C_0}{1} \left( t - \frac{1}{6} \pi^2 \tau_1 \right).$$

La pente de la courbe permet de déterminer D ; l'instant  $t_0$  pour lequel l'asymptote coupe l'axe des temps permet de déterminer  $\tau_1$  puis  $D' = l^2 / \pi^2 \tau_1$ .

10) On mesure une pente de  $DSC_0 / 1 = 0,002 / 40 \text{ mol.jours}^{-1}$  ;  
on en déduit  $D = 9,64 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

L'asymptote coupe l'axe des temps pour  $t_0 = 20 \text{ jours}$  ; on en déduit  $D' = 2,41 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

$D' = D / (1 + K_s)$  donne  $K_s = 39,0$ .

11) En ordre de grandeur  $x \approx \sqrt{D't}$ , soit  $t' = l^2 / D' = 10^{15} \text{ s} = 33 \cdot 10^6 \text{ ans}$ .  
En l'absence de sorption on remplace  $D'$  par  $D$  ; on obtient  $t = 0,8 \cdot 10^6 \text{ ans}$ .

2) En régime stationnaire :  $\frac{\partial^2 C_0}{\partial x^2} = 0$ , d'où  $C_0(x) = Ax + B$

avec  $C_0(0) = C(0, t) = 0$  et  $C_0(l) = C(l, t) = 0$ .

On en déduit :  $C_0(x) = C_0 (1 - x/l)$ .

3)  $\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial C'}{\partial t}$  ;  $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 C'}{\partial x^2}$  ; l'équation vérifiée par  $C'(x, t)$  est donc identique à l'équation vérifiée par  $C(x, t)$ .

$C'(0, t) = C_0(0) - C(0, t) = 0$  ;  $C'(l, t) = C_0(l) - C(l, t) = 0$  ;  $C'(0 < x < l, 0) = C_0(0 < x < l)$ .

4) On obtient :  $g' / g = D' \cdot f' / f$ .

Le premier membre ne dépendant que de t et le second que de x, chacun est égal à une constante.

Si cette constante est nulle :  $g(t) = A$  : solution stationnaire qui ne convient pas.

Posons  $g'/g = -1 / \tau$  ; on a alors  $g(t) = A \cdot \exp(-t/\tau)$  ;  $\tau$  doit donc être positif pour que  $g(t)$  – et par conséquent  $C'(x, t)$  ne diverge pas pour  $t \rightarrow \infty$ .

5) On a donc  $f' = -f / D' \tau$ , d'où  $f(x) = \sin\left(\frac{x}{\sqrt{\tau D'}} + \varphi\right)$ ,

puis  $C'(x, t) = A \cdot \exp(-t/\tau) \cdot \sin\left(\frac{x}{\sqrt{\tau D'}} + \varphi\right)$ .

Conditions aux limites :  $C'(0, t) = 0 = A \cdot \sin(\varphi)$ , d'où  $\varphi = 0$  ;

$C'(l, t) = 0 = A \cdot \exp(-t/\tau) \cdot \sin\left(\frac{l}{\sqrt{\tau D'}}\right)$ , d'où  $\frac{l}{\sqrt{\tau D'}} = n\pi$ , soit  $\tau_n = l^2 / n^2 \pi^2 D'^2 = \tau_1 / n^2$ .

6) La fonction  $C_0(x)$  est solution du problème d'après la question 2.

Il suffit (pour un physicien?) de vérifier que le terme général de la série vérifie l'équation de diffusion, ce qui est le cas.

$$7) \Phi(l, t) = \iint_S j_c \cdot d\vec{S} = -D \cdot \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{x=l} \cdot S$$

$$\text{d'où } \Phi(l, t) = \frac{D \cdot S \cdot C_0}{1} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right) \right).$$

$$8) N(t) = \int_0^t \Phi(l, t') \cdot dt' = \frac{D \cdot S \cdot C_0}{1} \left( t + 2 \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \cdot \exp\left(-\frac{t'}{\tau_n}\right) \cdot dt' \right) =$$

$$\frac{D \cdot S \cdot C_0}{1} \left( t - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \left[ \tau_n \cdot \exp\left(-\frac{t'}{\tau_n}\right) \right]_0^t \right) \\ = \frac{D \cdot S \cdot C_0}{1} \left( t - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \cdot \frac{\tau_1}{n^2} \left( \exp\left(-\frac{n^2 t}{\tau_1}\right) - 1 \right) \right).$$

9) Pour  $t \gg \tau_1$ , on a :  $N(t) = \frac{D \cdot S \cdot C_0}{1} \left( t - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \cdot \frac{\tau_1}{n^2} (-1)^n \right)$  avec  $\cos(n\pi) = (-1)^n$ ,

### Sujet 3 – Transport éolien du sable

#### III. LE TRANSPORT ÉOLIEN DU SABLE : LE MODÈLE D'ANDERSON

18. Expression du bilan de conservation de masse pendant la durée  $\delta t$  sur le système ouvert formé par la tranche de largeur  $L$  comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + \delta x$  :

- la masse de la tranche est  $\delta M = \rho h(x, t)L\delta x$  ;
- la masse arrivant pendant la durée  $\delta t$  à travers la section d'abscisse  $x$  a pour expression  $\delta m_e = Q(x, t)L\delta t$  ;
- de même, la masse quittant la tranche pendant la durée  $\delta t$  à travers la section d'abscisse  $x + \delta x$  a pour expression  $\delta m_s = Q(x + \delta x, t)L\delta t$  ;

Le bilan de masse s'écrit :  $\delta(\delta M) = \delta m_e - \delta m_s$ , soit :

$$\frac{\partial \delta M}{\partial t} \delta t = \rho L \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} \delta t \delta x = Q(x, t)L\delta t - Q(x + \delta x, t)L\delta t = -L \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \delta x \delta t$$

soit après simplification par  $L\delta x\delta t$  :

$$\rho \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x}$$

19. Le flux des grains en saltation étant constant et uniforme, il n'intervient pas dans le bilan de matière précédent :

$$\rho \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial Q_r(x, t)}{\partial x}$$

On peut écrire :

$$\frac{\partial Q_r}{\partial x} = m(N_e(x, t) - N_e(x - \ell_r, t))$$

Donc :

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \frac{m}{\rho} (N_e(x - \ell_r, t) - N_e(x, t))$$

20. D'après le schéma de la figure 6.a,  $d\mu = v dt \cdot dS \cdot \cos(\pi/2 - \alpha) = v \sin \alpha \cdot dS dt$ . Alors  $dN = nv \sin \alpha \cdot dS dt = N_0 \cdot dS dt$ . Par conséquent, par unité de surface et de temps, pour un sol horizontal :

$$N_0 = nv \sin \alpha$$

Si le sol est incliné, le même calcul est valable en remplaçant l'angle  $\alpha$  par  $\alpha + \theta$  (contrairement au schéma de la figure 6.b, l'angle d'incidence par rapport à l'horizontale est toujours  $\alpha$ ) :  $N_s(\theta) = nv \sin(\alpha + \theta)$ . On forme le rapport  $N_s(\theta)/N_0$  :

$$\frac{N_s(\theta)}{N_0} = \frac{\sin(\alpha + \theta)}{\sin \alpha} = \frac{\sin(\alpha) \cos(\theta) + \cos(\alpha) \sin(\theta)}{\sin \alpha} = \cos(\theta) + \frac{\sin(\theta)}{\tan(\alpha)} = \cos(\theta) \left( 1 + \frac{\tan(\theta)}{\tan(\alpha)} \right)$$

Ce qui permet d'exprimer  $N_s(\theta)$  en fonction de  $N_0$  comme l'indique l'énoncé :

$$N_s(\theta) = N_0 \cos(\theta) \left( 1 + \frac{\tan(\theta)}{\tan(\alpha)} \right)$$

21. La pente de la surface repérée par l'angle  $\theta$  par rapport à l'horizontale vérifie :

$$\tan(\theta) = \frac{\partial h}{\partial x}$$

22. En utilisant l'hypothèse du modèle d'Anderson,  $N_e(x, t) = n_0 N_s(x, t)$ , l'équation de la question 19 devient :

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \frac{m}{\rho} (N_e(x - \ell_r, t) - N_e(x, t)) = - \frac{mn_0}{\rho} (N_s(x, t) - N_s(x - \ell_r, t)) = - \frac{mn_0}{\rho} [N_s(u, t)]_{x - \ell_r}^x$$

23.  $N_s(u, t)$  s'exprime ensuite en fonction des résultats des questions 20 et 21 :

$$N_s(u, t) = N_0 \cos(\theta) \left( 1 + \frac{\tan(\theta)}{\tan(\alpha)} \right) = N_0 \cos(\theta) \left( 1 + \frac{\partial h / \partial x}{\tan(\alpha)} \right) = \frac{N_0 \cos(\theta)}{\tan(\alpha)} \left( \tan(\alpha) + \frac{\partial h}{\partial x} \right)$$

En reportant, et comme seuls  $\theta$  et  $h$  dépendent de  $x$  :

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = - \frac{mn_0}{\rho} [N_s(u, t)]_{x - \ell_r}^x = - \frac{mn_0 N_0}{\rho \tan(\alpha)} \left[ \cos(\theta) \left( \tan(\alpha) + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right]_{x - \ell_r}^x$$

24. Si  $h = h_0 = cste$ ,  $\theta = 0$ , et l'équation précédente s'écrit :

$$0 = - \frac{mn_0 N_0}{\rho \tan(\alpha)} [\tan(\alpha)]_{x - \ell_r}^x = 0$$

car  $\alpha$  est constant :  $h = h_0 = cste$  est solution de l'équation précédente.

25. La nouvelle forme de l'équation de la question 23 pour  $\cos \theta \approx 1$  est :

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = - \frac{mn_0 N_0}{\rho \tan(\alpha)} \left[ \tan(\alpha) + \frac{\partial h}{\partial x} \right]_{x - \ell_r}^x = - \frac{c_0}{\tan(\alpha)} \left[ \frac{\partial h}{\partial x} \right]_{x - \ell_r}^x$$

Le rapport  $m/\rho$  a la dimension d'un volume,  $n_0$  est sans dimension, et  $N_0$ , nombre de particules par unité de temps et de surface a la dimension de l'inverse d'un produit temps x surface. Par conséquent  $[c_0] = \text{volume}/(\text{surface} \cdot \text{temps}) = \text{vitesse}$ .

**26.** La solution proposée s'écrit  $\underline{h} = h_0 + h_1 \exp[ikx + (\gamma - i\omega)t]$ . En reportant dans l'équation différentielle, on obtient :

$$(\gamma - i\omega)h_1 \exp[ikx + (\gamma - i\omega)t] = -\frac{c_0}{\tan(\alpha)} ikh_1 \exp[ikx + (\gamma - i\omega)t](1 - \exp(-ik\ell_r))$$

soit

$$\gamma - i\omega = -\frac{c_0}{\tan(\alpha)} ik(1 - \exp(-ik\ell_r)) = -\frac{c_0}{\tan(\alpha)} ik(1 - \cos(k\ell_r) + i \sin(k\ell_r))$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire on obtient les expressions de  $\gamma$  et  $\omega$  :

$$\gamma = \frac{c_0}{\tan(\alpha)} k \sin(k\ell_r) = \omega_0 u \sin u$$

$$\omega = \frac{c_0}{\tan(\alpha)} k(1 - \cos(k\ell_r)) = \omega_0 u(1 - \cos u)$$

**27.** La solution précédente est stable si  $\gamma \leq 0$ , soit si  $u \sin u \leq 0$ . Pour  $k > 0$  la condition de stabilité s'écrit  $\pi \leq k\ell_r \leq 2\pi[2\pi]$  ou encore  $(p - 1/2)\lambda \leq \ell_r \leq p\lambda$ .

En d'autres termes la solution est stable si le transfert par reptation se fait entre les creux et les bosses de la dune et vice-versa. Elle est instable si le transfert à lieu de bosse à bosse et de creux à creux.

**28.** On considère le terme de propagation.

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega\ell_r}{u} = \omega_0\ell_r(1 - \cos u)$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \ell_r \frac{d\omega}{du} = \omega_0\ell_r(1 - \cos u + u \sin u) = v_\varphi + \gamma\ell_r$$

Finalement :

$$v_g = v_\varphi + \gamma\ell_r$$

**29.** Pour un milieu non dispersif,  $c = v_\varphi = \omega/k$  est indépendant de  $\omega$ , donc  $k = \omega/c$  est proportionnel à  $\omega$ , et  $v_g = d\omega/dk = c = v_\varphi$ . Ici,  $v_g \neq v_\varphi$  : le sable semble être un milieu dispersif.

Remarque : Si  $\ell_r$  est petit devant la distance caractéristique de variation de  $\partial h/\partial x$ , on peut effectuer un développement limité du terme entre crochet :

$$\left[ \frac{\partial h}{\partial x} \right]_{x-\ell_r}^x \approx \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \ell_r$$

ce qui conduit à l'équation aux dérivées partielles en  $h(x, t)$  :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{c_0\ell_r}{\tan(\alpha)} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

qui n'admet pas de solution de dépendance spatiale harmonique qui soit temporellement stable.