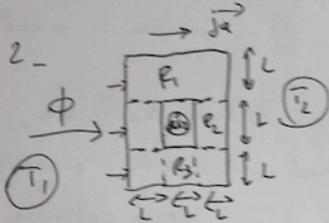


# Réponse QCT

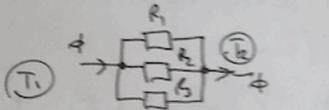
1. (a)  $\phi_1 < \phi_2 < \phi_3$



On décompose la brique en 3 résistances  $R_1, R_2, R_3$  (1 brique carée)

On a  $R_1 = R_3$  m matériau avec m dimension

Ces 3 résistances sont équivalentes à une association en parallèle entre  $T_1$  et  $T_2$  : le flux  $\phi$  global entrant se divise en 3 flux traversant  $R_1, R_2, R_3$ .



Donc  $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{2}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2R_2 + R_1}{R_1 R_2}$

avec  $T_1 - T_2 = R_{eq} \phi \rightarrow \phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{eq}} = (T_1 - T_2) \frac{(R_1 + 2R_2)}{R_1 R_2}$   
 puissance réponse (a)

Vérifions la valeur de  $R_1$  et  $R_2$  :

$\rightarrow R_1$  :  $L \times L$  pour une longueur  $3L$  dans le béton  $\rightarrow R_1 = \frac{3L}{\lambda b L^2} = \frac{3}{\lambda b L}$

$\rightarrow R_2$  :  $L \times L$  avec béton/air/béton  $\rightarrow$  soit 3 résistances en série longueur  $\rightarrow L$   $\rightarrow R_2 = \frac{L}{\lambda b L^2} + \frac{L}{\lambda_a L^2} + \frac{L}{\lambda b L^2}$

$R_2 = \frac{2}{\lambda b L} + \frac{1}{\lambda_a L} = \frac{1}{L} \left( \frac{2}{\lambda b} + \frac{1}{\lambda_a} \right)$

3 -  $\tau_{chauffe} = \frac{L^2}{D} = \frac{9 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-4}} = 4,5 \times 10^2 s \approx 450 s = 7,5 \text{ min}$

$f = 6000 \text{ tours/min} = \frac{6000}{60} \text{ Hz} = 100 \text{ Hz}$  un moteur pour chauffer globalement

$T_{periode} = \frac{1}{f} = 10^{-2} s = 10 \text{ ms}$   $\rightarrow$   $T_{cycle} \ll \tau_{diffusion}$  (chauffe) La perturbation de température n'a pas le temps de diffuser  $\rightarrow$  évolution adiabatique

## Sujet Centrale TSI 2019

### II Dimensionnement du chauffage d'une voiture de TGV

#### II.A - Équation de la diffusion thermique dans une paroi solide

Q37. On a :

$$\delta Q_{in} = \underbrace{j(x,t) \cdot S \cdot dt}_{\text{entrant en } x} - \underbrace{j(x+dx,t) \cdot S \cdot dt}_{\text{sortant en } x+dx} \iff \delta Q_{in} = -\frac{\partial j}{\partial x} S \cdot dx \cdot dt$$

Q38. La variation d'énergie interne s'écrit :

$$dU = \rho(S \cdot dx) c (T(x+dx, t) - T(x, t)) \iff dU = \rho \cdot S \cdot dx \cdot c \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

Q39. D'après le premier principe de la thermodynamique :  $dU = \delta W + \delta Q_{in}$  et, comme il n'y a pas de déformation du solide  $\delta W = 0$  donc finalement :

$$\rho \cdot c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}$$

Q40. La loi de Fourier s'exprime  $\vec{j} = -\lambda \text{grad } T$  soit ici, comme le problème est unidimensionnel :  $j(x, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$

Q41. En remplaçant dans le premier principe, il vient alors l'expression demandée :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \text{ avec } D = \frac{\lambda}{\rho \cdot c}$$

#### II.B - Régime stationnaire

Q42. En régime stationnaire,  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ . On trouve alors que  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$  soit  $\frac{\partial T}{\partial x} = a$  ou encore  $T(x) = ax + b$ . Le profil de température est alors affine. Compte tenu des conditions aux limites, on trouve :

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{e} x$$

Q43. D'après la loi de Fourier, on trouve  $j(x) = \frac{T_1 - T_2}{e}$ . Comme  $\mathcal{P}_{th} = \iint_S \vec{j} \cdot d^2\vec{S}$ , on en déduit  $\mathcal{P}_{th} = \frac{\lambda S}{e} (T_1 - T_2)$ .

Dans le volume étudié, on peut dire que le champ  $\vec{j}(x)$  est uniforme.

Q44. On définit la résistance thermique en écrivant  $\Delta T = R_{th} \mathcal{P}_{th}$  par conséquent  $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$ .

Q45. De la même manière, on trouve  $\mathcal{P}_{cc} = h \cdot S (T_{2,p} - T_{2,f})$ .

Q46. On définit alors  $R_{cc} = \frac{1}{h \cdot S}$ .

Q47. L'air est immobile à l'intérieur et isole bien (peu de convection) alors qu'il y a une vitesse importante de l'autre côté (à l'extérieur) et une moins bonne isolation. Le coefficient conducto-convectif est donc plus important à l'extérieur qu'à l'intérieur ( $h_i < h_e$ ).

Q48. Le premier principe industriel s'écrit  $D_m(\Delta e_c + \Delta e_p + \Delta h) = \mathcal{P}_i + \mathcal{P}_{th}$ . Ici,  $\Delta e_p = 0$  (il n'y a pas de différence d'altitude entre l'intérieur et l'extérieur) et  $\mathcal{P}_i = 0$  car on ne considère qu'un échange thermique. En outre, en l'absence de tuyère, on considère généralement  $\Delta e_c$  comme négligeable. Il reste alors, en utilisant la loi de Joule :

$$\mathcal{P}_{th} = D_m c_p (T_{int} - T_{ext})$$

sortie    entrée

Q49. Le cas le plus défavorable est le cas où la voiture est vide, car les passagers se comportent comme une source de chaleur et vont ainsi contribuer à maintenir la température intérieure.

Q50. Il convient de déterminer les pertes thermiques. On va considérer que le flux de chaleur se partage entre les vitres, les parois latérales, le sol et le plafond. On néglige le fait que la chaleur a tendance à monter et que les pertes par le toit risquent ainsi d'être plus importantes. On considérera ainsi que le système est équivalent à l'association parallèle de résistances thermiques :

$$\frac{1}{R_{tot}} = \frac{12}{R_{vitre}} + \frac{1}{R_{sol}} + \frac{1}{R_{toit}} + \frac{2}{R_{p.lat}}$$

Déterminons les différentes résistances thermiques (associations séries de résistance thermique pour chaque matériau) : Pour une vitre :

$$R_{vitre} = \frac{1}{L_V H_V} \left( \frac{1}{h_e} + \frac{e_{ve}}{\lambda_v} + \frac{e_{air}}{\lambda_{air}} + \frac{e_{vi}}{\lambda_v} + \frac{1}{h_i} \right)$$

On trouve  $R_{vitre} \approx 3,40 \times 10^{-1} \text{ K W}^{-1}$ .

Pour le sol, on aura la même chose que pour le toit, à savoir :

$$R_{toit} = \frac{1}{Ll} \left( \frac{e_{st}}{\lambda_{st}} + \frac{e_{lv}}{\lambda_{lv}} + \frac{e_{Al}}{\lambda_{Al}} \right)$$

Numériquement :  $R_{sol} = R_{toit} \approx 7,59 \times 10^{-3} \text{ K W}^{-1}$ .

Enfin pour une paroi latérale, on écrit (en n'oubliant pas de retrancher la surface de 6 fenêtres) :

$$R_{p.lat.} = \frac{1}{Lh - 6L_V H_V} \left( \frac{e_{st}}{\lambda_{st}} + \frac{e_{lv}}{\lambda_{lv}} + \frac{e_{Al}}{\lambda_{Al}} \right)$$

Et on trouve :  $R_{p.lat.} \approx 1,28 \times 10^{-2} \text{ K W}^{-1}$ .

Finalement, il vient donc pour la résistance équivalente à l'ensemble de la voiture  $R_{tot} \approx 2,20 \times 10^{-3} \text{ K W}^{-1}$ .

Q51. Pour que la température intérieure reste constante, il faut alors que la puissance de chauffe compense exactement les pertes thermiques. Ceci s'écrit alors :  $\mathcal{P}_{ch} = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_{tot}}$  soit numériquement  $\mathcal{P}_{ch} \approx 10,9 \text{ kW}$ .

Q52. 50 passagers représentent une puissance thermique moyenne de 3000 W, la puissance de chauffe nécessaire n'est alors plus que de  $\mathcal{P}'_{ch} = 7,9 \text{ kW}$ .

## Résultat de problème - Refroidissement d'un point de soudure

Q25. -> Pour décrire le changement d'état et quantifier les échanges thermiques correspondants, il faut connaître l'enthalpie molaire de fusion du matériau 1 (l)  $\rightleftharpoons$  (s) en  $J \cdot kg^{-1}$  et la masse volumique du matériau 1.  $\rho_1 = 8500 \text{ kg} \cdot m^{-3}$  (état solide)

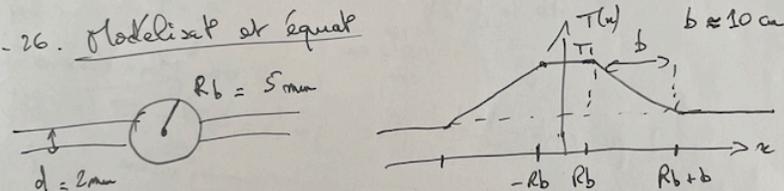
-> Pour quantifier les transferts thermiques avec le milieu ext. -> h coef. conducto-convectif R en  $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$

- la diffusion thermique au sein des 2 fils ->  $\lambda_2$  en  $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$

-> Pour évaluer, les effets de diffusion thermique en régime variable  
 $D_{th \ 1,2} = \frac{\lambda_{1,2}}{\rho_{1,2} c_{p,2}}$  ainsi les capacités thermiques  $c_{p,2}$  en  $J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$   
 $\lambda_{1,2}$  et  $\rho_{1,2}$

Il faut bien sûr connaître les paramètres géométriques.

Q26. Modéliser et équival



Hypothèses du modèle pendant la solidification

-  $T_{int}$  (point de soudure) uniforme -> le chgt d'état impose une  $T_{ext}$  de la soudure à l'éq. liq  $\rightleftharpoons$  solide

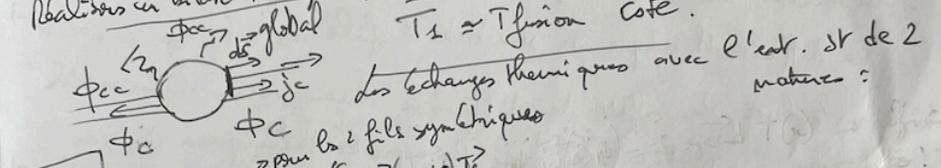
= le profil de température au voisinage dans les fils conducteurs est celui d'un régime stationnaire (linéaire avec  $x \rightarrow \Delta T = 0$ ) de diff. thermique

donc  $\Delta t \gg \tau_{diff} = \frac{b^2}{D_2}$  -> nous vérifierons cette hypothèse de l'AddS

- on considère un problème de transport unidimensionnel parfaitement adapté à la conduction dans les fils de contact (on y néglige la conducto-convexion au contact de l'air ambiant).

- du point de vue thermique, on fait l'hypothèse que les constantes physiques de la soudure ds les états solide et liquide sont très proches  $\rightarrow h(\text{liquide/air}) \approx h(\text{solide/air})$  par exemple.
- le volume de la boule de soudure change peu lors du changement d'état.

Réalisons un bilan d'énergie pour le point de soudure évoluant à la température  $T_1 \approx T_{\text{fusion}} \text{ côté.}$



Éclairage conductif  $\rightarrow \phi_c = 2 \times \int_{j_c(x=R_b)} \vec{j}_c \cdot \vec{n} ds$

Le flux sortant ce flux est égal par continuité au flux présent ds le fil, pour  $x > R_b$ :  $\vec{j}_c = -\frac{1}{2} \text{ grad } T(x)$

$\vec{j}_c = -\frac{1}{2} \frac{dT}{dx} \vec{e}_x = +\frac{1}{2} \frac{T_1 - T_{\text{ext}}}{b}$  régime station.

par continuité du flux  $\vec{j}_c(x=R_b^-) = \vec{j}_c(x=R_b^+)$

donc  $\phi_c = \frac{\pi d^2}{2b} (T_1 - T_{\text{ext}})$

Échange conductif  $\phi_{cc} = h S (T_1 - T_{\text{ext}}) = 4\pi R_b^2 h (T_1 - T_{\text{ext}})$

on fait  $S = 4\pi R_b^2 - 2\pi \left(\frac{d}{4}\right)^2 \approx 4\pi R_b^2 \left(1 - \frac{1}{8} \left(\frac{d}{R_b}\right)^2\right) \approx 4\pi R_b^2$  négligeable

Comparons ces 2 flux :

$$\frac{\phi_{cc}}{\phi_c} = \frac{2 \times 4\pi R_b^2 h (T_1 - T_{\text{ext}}) b}{\pi d^2 \frac{1}{2} (T_1 - T_{\text{ext}})} = 4 \left(\frac{R_b}{d}\right)^2 \times \frac{R_b}{\frac{1}{2}} = 2 \times \frac{25}{4} \times \frac{10 \times 0,1}{400} = \frac{50}{4} \times 10^{-2} = 0,125$$

$\phi_{cc}$  ne représente que 12,5% de  $\phi_c \rightarrow$  pour un estimateur on peut donc se contenter des échanges par conduction qui sont prépondérants.

Bilan global pour le point de soudure

Évolue à tout et phases condensées :

$$dV = dH = C dT - L_f dm = S d\text{écl} + \delta w$$

avec  $S d\text{écl} = -\phi_{cc} dt - \phi_c dt = -\phi_c dt$

donc  $L_f dm = \frac{\pi d^2}{2b} (T_1 - T_{\text{ext}}) dt$

2.4 - Temps de solidification :  $\Delta m$

$$\Delta t = \tau = \int dt = \frac{2b \times \rho_1 \times \frac{1}{2} \pi R_b^3 \times L_f}{\pi d^2 \frac{1}{2} (T_1 - T_{\text{ext}})}$$

$\tau = \frac{8}{3} \frac{R_b^3 \rho_1 L_f}{d^2 (T_1 - T_{\text{ext}})}$

Prendons pour  $T_{\text{ext}} \approx T_{\text{ambiante}} = 20^\circ C$   $T_1 = 138^\circ \approx 140^\circ$

$$\tau = \frac{8}{3} \times \frac{5^3 \times 10^{-3} \times 10^{-1} \times 8,5 \cdot 10^3 \times 6 \cdot 10^4}{4 \times 10^2 \times 120 \times 10^2} = \frac{5^3 \times 8,5}{12} \times 10^{-1}$$

$\tau \approx 88,5 \text{ s} \approx 90 \text{ s} \Rightarrow 1 \text{ min } 30 \text{ s}!$  ce qui paraît réaliste!

( $\approx 10 \text{ s}$  de matière avec la conduction)  $\approx 12,5\% \rightarrow \tau \approx 80 \text{ s}$

Nous pouvons maintenant vérifier certaines hypothèses comme l'ARRS pour la conductivité ds le fil conducteur

du courant électrique :

pour du cuivre  $L \approx 400 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$   $\mu \approx 5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$   
 $c \approx 380 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

$$D_{\text{cu}} = \frac{L}{\rho c} = \frac{4 \cdot 10^2}{3,8 \cdot 10^3 \times 5 \cdot 10^3} \approx 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ SI (efficace!)}$$

$$\tau_{\text{diff}} = \frac{L^2}{D_{\text{cu}}} = \frac{b^2}{1,2 \cdot 10^{-4}} = \frac{10^{-2}}{1,2 \cdot 10^{-4}} = 83 \text{ s!}$$

L'hypothèse n'est pas complètement vérifiée !!  
 $\rightarrow b$  est certainement + faible

avec  $\tau_{\text{diff}} \propto b^2$   
 et  $\Delta T_{\text{solidifict}} \propto b$   $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow b \downarrow \tau_{\text{diff}} \\ \rightarrow \oplus \text{ vite que } \Delta T \end{array} \right.$

Vérifions aussi que le transfert thermique pour le fil soit uniquement diffusif pour une longueur typique  $b$  :  
 pour avoir  $\Delta T \gg \Delta T_{\text{crit}}$

$$|\Phi_c| \propto \left| -\frac{1}{2} \text{grad } T \right| S = \frac{1}{2} \pi \frac{d^2}{4} \frac{\Delta T}{b}$$

$$|\Phi_c| \propto h \Delta T_{\text{SCAT}} = h \pi d b \Delta T$$

$$\left| \frac{\Phi_c}{\Phi_c} \right| \propto \frac{4 \pi h d b^2}{1/2 \pi d^2} = 4 \frac{h b^2}{1/2 d}$$

on prend  $h \approx 10 \text{ SI}$   
 $= 4 \times \frac{10 \times 10^{-2}}{1/2 \times 10^{-2} \times 2 \cdot 10^{-3}}$   
 $= 0,5$  avec  $b = 10 \text{ cm}$

Une fois de plus, nous réalisons que la conduction-convective n'est pas négligeable pour le fil ( $\text{Mat}_2$ ) avec cette ordre de grandeur de  $b$ .

Dans le cadre de l'ARQS, le profil de température serait alors exponentiel du type

