

4 ■ Résolution dans un cas non stationnaire

4.1. Diffusion thermique dans une barre calorifugée

On se propose de déterminer l'évolution spatio-temporelle de la température $T(x, t)$ dans une barre cylindrique homogène de longueur L et section S , dont toutes les parois sont calorifugées (Fig. 10).

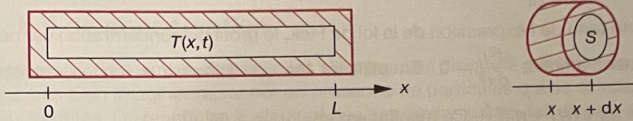


Figure 10

Le problème se ramène à la construction d'une solution satisfaisant à l'ensemble des conditions suivantes.

• Équation locale

Il s'agit de l'équation de la chaleur à une dimension spatiale, dans un milieu homogène de diffusivité κ :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (23)$$

• Conditions aux limites

La barre est supposée calorifugée, donc on peut écrire que le flux thermique conductif est nul à travers les plans d'abscisses $x = 0$ et $x = L$. L'équation locale de Fourier (2) permet d'écrire la nullité du gradient de température aux extrémités (pour $t > 0$) :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = 0 \end{cases} \quad (24)$$

• Conditions initiales

À l'instant pris comme origine des temps, on suppose connu le profil de température sur l'intervalle $[0, L]$. Notons-le $T_0(x)$:

$$T(x, 0) = T_0(x).$$

Un exemple de profil initial est donné sur la figure 11.

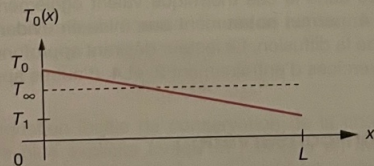


Figure 11

Le régime transitoire d'un phénomène de diffusion thermique s'étudie à partir de l'équation locale de diffusion, des conditions aux limites et des conditions initiales.

Cette partie fait appel aux connaissances acquises en électronique, concernant les séries de Fourier.

Être attentif à la méthodologie plus qu'aux résultats.

On peut par exemple supposer que la barre était parcourue antérieurement de part en part par un flux thermique stationnaire.

Nous proposons de déterminer la solution générale de ce problème, en mettant en œuvre l'outil de la décomposition en série de Fourier en électronique.

4.2. Solution stationnaire

Qualitativement, on devine que les échanges thermiques au sein de la barre vont conduire à une homogénéisation de la température dans celle-ci. On peut déterminer la valeur finale T_∞ par un bilan enthalpique. En effet, l'échange thermique global entre la barre et l'extérieur étant nul du fait de la présence d'isolant thermique, l'enthalpie totale reste constante.

Ainsi, en considérant que chaque élément $[x, x + dx]$ voit sa température passer de $T_0(x)$ à T_∞ , on peut écrire avec les notations usuelles, du fait de l'extensivité de l'enthalpie :

$$\int_0^L \mu S c_p (T_\infty - T_0(x)) dx = 0.$$

T_∞ apparaît ainsi comme la température moyenne dans l'état initial :

$$T_\infty = \frac{1}{L} \int_0^L T_0(x) dx.$$

Le choix de l'enthalpie pour raisonner correspond à une évolution isobare : le premier principe s'écrit alors $\Delta H = Q_p = 0$.

Résultat confirmant le raisonnement intuitif.

Exercice d'application

Température finale

On suppose que le profil initial de température obéit à une loi affine (voir Fig. 11).

- Déterminer la température finale.
- En raisonnant sur des éléments de longueurs symétriques par rapport au milieu de la tige, retrouver l'expression de la température finale.

a) La température moyenne du profil initial prend simplement la valeur $T_\infty = \frac{T_0 + T_1}{2}$.

- b) Deux éléments placés symétriquement par rapport au plan d'abscisse $L/2$ ont des températures initiales elles-mêmes symétriques par rapport à T_∞ : $T_\infty \pm \Delta T$. Le transfert thermique entre ces deux seuls éléments conduirait, s'il avait lieu, à une température finale égale à T_∞ . L'échange thermique avec le reste du système serait alors nul.

Ainsi, le bilan enthalpique, qui prévoit un échange thermique nul entre la tige et l'extérieur, peut être obtenu en considérant une partition du système en éléments symétriques par rapport au milieu. On interprète ainsi le résultat simplement.

4.3. Recherche des modes

Afin d'éviter de manipuler en cours de résolution des valeurs négatives de température, nous pouvons rechercher l'évolution de l'écart de température par rapport à l'équilibre :

$$\theta(x, t) = T(x, t) - T_\infty.$$

Les équations définissant le problème restent les mêmes, notamment l'équation aux dérivées partielles (23). Cherchons une solution de cette équation sous la forme du produit d'une fonction du temps par une fonction de la variable x :

$$\theta(x, t) = X(x) \cdot \Gamma(t).$$

En notant par ' la dérivée première et par '' la dérivée seconde d'une fonction d'une variable, on aboutit à l'équation $X''\Gamma - \frac{1}{\kappa}X\Gamma' = 0$. Pour les valeurs non nulles de $\theta(x, t)$, on aboutit à l'égalité (25) entre deux fonctions d'une seule variable x ou t :

$$\frac{X''}{X}(x) = \frac{1}{\kappa} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(t). \quad (25)$$

Les variables x et t évoluant indépendamment, l'égalité (25) ne peut être vérifiée que si chaque membre est constant, notons $-K$ cette valeur commune.

a) Évolution spatiale

Différents cas doivent être envisagés, selon le signe de la constante K .

- Si K est nulle, la solution générale $X(x)$ est affine. L'utilisation des conditions aux limites (24), qui imposent $X'(0) = X'(L) = 0$, conduit à une fonction $X(x)$ constante. Hormis pour décrire le profil de température final, une telle solution n'a pas d'intérêt.

- Si $K < 0$, la solution générale est combinaison linéaire d'exponentielles :

$$X(x) = A \exp(-\sqrt{-K}x) + B \exp(\sqrt{-K}x).$$

Annuler la dérivée en $x = 0$ et $x = L$ conduit à la solution triviale nulle.

- Seul demeure le cas positif : $K > 0$.

La solution générale correspondante est trigonométrique :

$$X(x) = \alpha \cos(\sqrt{K}x) + \beta \sin(\sqrt{K}x).$$

Les conditions aux limites (24), et notamment la valeur en $x = 0$, permettent alors d'affirmer que $\beta = 0$. En outre, l'utilisation de la condition en $x = L$ impose que $\sin(\sqrt{K}L) = 0$.

On aboutit à une relation faisant apparaître des nombres entiers (on parle de quantification). Ce résultat est analogue à celui obtenu dans le cas d'une corde vibrante : il existe un entier n tel que $\sqrt{K} = \frac{n\pi}{L}$.

L'expression de X , associée à une valeur de n , devient ainsi :

$$X_n(x) = \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

b) Évolution temporelle

Puisque les deux membres de (25) font intervenir la même constante K , on obtient l'équation différentielle satisfaite par $\Gamma(t)$, pour le mode de rang n :

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(t) = -n^2 \frac{\kappa\pi^2}{L^2}.$$

Méthode de séparation des variables.

On examine les différentes familles de solutions mathématiques.

Il s'agit de la même acception que celle utilisée dans le cours sur la structure de l'atome, en première année. De façon plus générale, mettre une onde dans une cavité conduit à une quantification.

La détermination de la constante d'intégration α_n sera effectuée lors de la prise en compte des conditions initiales.

La rapide décroissance de cette constante de temps avec n permet d'affirmer que le mode fondamental s'atténue beaucoup moins rapidement que les modes harmoniques. Au bout d'un temps suffisamment long, seule demeure l'évolution associée à ce mode, on le dit dominant. Historiquement, cette évolution devenant sinusoïdale après un bref régime transitoire avait alerté Joseph Fourier, le mettant sur la voie d'une recherche de solutions faisant jouer un rôle central aux signaux harmoniques.

Capacité exigible

Exploiter la linéarité de l'équation de diffusion.

Contrairement au cas de la corde vibrante pincée à ses extrémités, le profil ne s'annule pas aux abscisses 0 et L ; mais la nullité du flux thermique impose un gradient de température nul.

Mémoriser la méthode et non les résultats.

Les modes font apparaître des fonctions cosinusoidales de la variable x , qui sont des fonctions paires.

L'étude dans le cas du mode fondamental ($n = 1$) fait ressortir une constante de temps thermique $\tau = \frac{L^2}{\kappa\pi^2}$ et on constate que chaque solution de rang n présente une constante de temps $\tau_n = \frac{\tau}{n^2}$. À une constante d'intégration près γ_n ,

$$\Gamma_n(t) = \gamma_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\kappa t\right).$$

c) Solution complète

Il est possible, grâce à la linéarité de l'équation de la chaleur, de superposer les solutions associées à chaque mode. On peut ainsi proposer une solution générale sous la forme (26) :

$$\theta(x, t) = \sum_n \Theta_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\kappa t\right). \quad (26)$$

On peut observer, à la figure 12, quelques profils de température pour les modes de rangs 1 et 2. Ces tracés sont effectués à un instant donné.

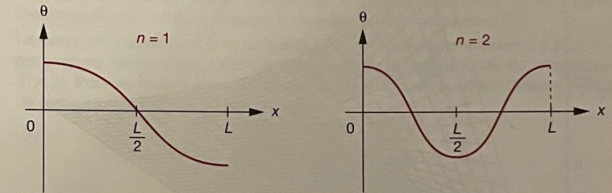


Figure 12

4.4. Conditions initiales

La valeur des coefficients Θ_n doit être obtenue par les conditions initiales : il s'agit ici de retrouver le profil de température $\theta_0(x) = T_0(x) - T_\infty$.

$$\theta_0(x) = \sum_n \Theta_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (27)$$

On retrouve naturellement l'écriture d'une série de Fourier. Comme dans le cas des ondes dans une cavité, on se doit d'étendre la définition de la fonction $\theta_0(x)$ de façon à la rendre paire et périodique de période spatiale $2L$ (Fig. 13).

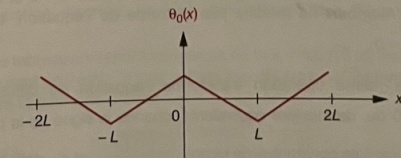


Figure 13

La détermination des coefficients Θ_n découle alors de l'étude des séries de Fourier :

$$\Theta_n = \frac{2}{2L} \int_{-L}^L \theta_0(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L \theta_0(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \quad (28)$$

La figure 14 propose la représentation en 3 dimensions de l'évolution du profil de température, en partant de la situation représentée figure 11.

- On constate bien une uniformisation de la température.
- L'évolution devient rapidement sinusoïdale spatialement : le mode fondamental domine dès que les modes harmoniques se sont suffisamment atténués.

La comparaison de la solution obtenue ici, avec celle correspondant à une corde vibrante, permet de dégager une propriété fondamentale. Alors que le **renversement du sens du temps** n'a aucune conséquence dans le cas de l'onde (l'équation de propagation fait intervenir une dérivée seconde temporelle), la diffusion thermique n'est absolument pas réversible ! On n'observe pas de passage spontané d'un profil thermique uniforme à une distribution inhomogène de température dans la barre calorifugée.

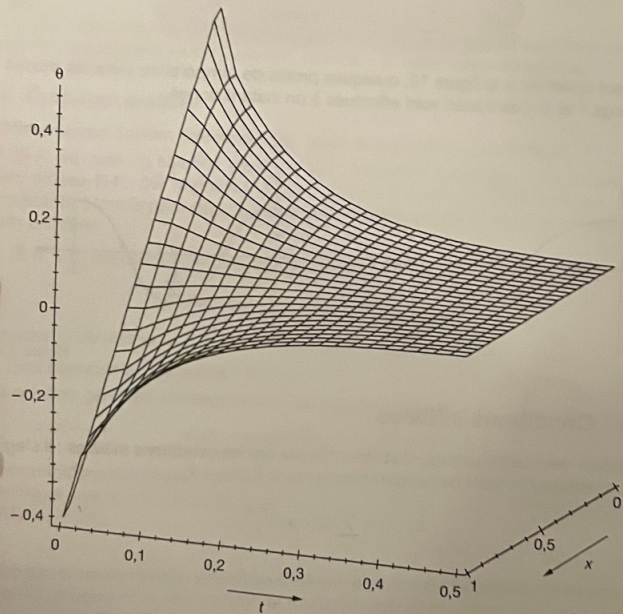


Figure 14

Plus précisément, effectuer les changements de variable $x' = -x$ et $t' = -t$ dans l'équation de d'Alembert ne modifie pas la forme de l'équation, qui demeure $\frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t'^2} = 0$.

En revanche, la même opération transforme l'équation de diffusion (23) en $\frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t'} = 0$ ou, de manière équivalente, change le signe de la constante de diffusivité : $\kappa' = -\kappa$. Les constantes de temps $\tau = \frac{L^2}{\kappa \pi^2}$ et τ_n , définies ci-dessus, deviennent négatives et le système ne tend plus vers un état stationnaire.

La dérivée **première** temporelle de l'équation de diffusion est la traduction mathématique de l'**irréversibilité** du transfert.

C'est l'écart θ à la valeur d'équilibre qui est représenté.



Capacité exigible
Relier l'équation de diffusion à l'irréversibilité temporelle du phénomène.

Capacité exigible
Mettre en évidence un temps caractéristique d'évolution de la température. Justifier l'ARQS. Établir l'analogie avec un circuit électrique RC.

5 Aspect expérimental : mesure d'une conductivité thermique

5.1. Dispositif expérimental

On utilise une barre métallique homogène de longueur L et section S , dont les parois latérales sont calorifugées (Fig. 15).

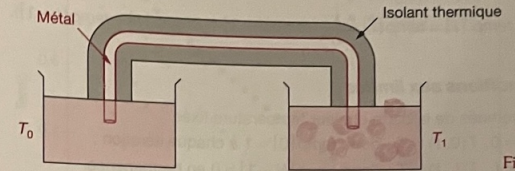


Figure 15

Ses extrémités sont plongées dans deux bains liquides, dont les températures sont dans un premier temps maintenues à températures fixes T_0 et T_1 (bain thermostaté pour ce qui concerne T_0 et mélange eau-glace pour T_1).

La barre est initialement à la température T_1 , on souhaite simuler à l'aide d'un programme informatique, l'évolution au cours du temps du profil de température $T(x, t)$. Pour les raisons exposées dans l'étude précédente, on s'intéresse à l'écart de température, ramené à l'écart maximal :

$$\theta(x, t) = \frac{T(x, t) - T_1}{T_0 - T_1}$$

θ est une grandeur adimensionnée, comprise entre 0 et 1.

5.2. Simulation du régime transitoire

On procède à une discrétisation du problème :

- spatiale, la tige est divisée en N intervalles équidistants d , le profil de température étant alors décrit à un instant donné par un tableau t de N valeurs ;
- temporelle, l'évolution du profil est envisagée à des instants discrets séparés d'une durée τ .

On utilise dans la suite l'indice i pour la subdivision spatiale et l'indice n pour le découpage temporel.

a) Équation récurrente

Il convient de remplacer l'équation continue de diffusion :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

par une équation discrète, comme dans l'étude des filtres numériques en électronique.

Si $temp$ est le tableau contenant les valeurs de $\theta(x_i = id, t)$ à un instant $t_n = n\tau$ (i est un indice courant de 0 à $N-1$), on obtient le profil $temp'$ à l'instant $t_{n+1} = (n+1)\tau$ en appliquant la méthode d'Euler :

$$temp'[i] = temp[i] + \tau \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$$\text{où } \frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

Pour exprimer cette dérivée seconde spatiale, qui est en fait un laplacien, on utilise à nouveau la méthode d'Euler, pour laquelle :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{temp[i+1] - temp[i]}{d}$$

Il s'agit tout à fait du même sens du mot réversible que celui donné dans l'étude du second principe : la diffusion thermique est un phénomène source d'irréversibilité.