

Sujet CCINP Ingénierie et modélisation PSI 2018

II.1 – Régime transitoire dans la zone P1 : $-L_1 < z < -L_c/2$

Q10.	Le sujet est maladroit avec la notation Δz au lieu de dz. Considérons comme système une tranche de câble de section S et de longueur Δz. La section du câble est $S = \pi R^2$ donc - le flux entrant en z est : $\phi_{entrant}(z, t) = j(z, t) \pi R^2 = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}(z, t) \pi R^2$ - le flux sortant en $z+dz$ est : $\phi_{sortant}(z + dz, t) = j(z + dz, t) \pi R^2 = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}(z + dz, t) \pi R^2$ - le flux sortant latéralement est : $d\phi_{lat}(z, t) = h(T(z, t) - T_e) dS' = h(T(z, t) - T_e) 2\pi R \Delta z$
Q11.	La résistance d'une tranche est $\Delta R = \frac{\Delta z}{\gamma S} = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta z}{\pi R^2}$ donc la puissance joule dissipée dans la tranche Δz est $\delta P = \Delta R I^2 = \frac{I^2}{\gamma} \frac{\Delta z}{\pi R^2}$. L'énergie dissipée par effet Joule est $\delta^2 W = \Delta R I^2 \Delta t = \frac{I^2}{\gamma} \frac{\Delta z}{\pi R^2} \Delta t$
Q12.	Considérons comme système une tranche de câble de section S et de longueur dz. A pression constante, $d^{(2)}H = \delta^{(2)}W_e + \delta^{(2)}Q_{reçue}$ (car on a deux infiniment petits en dt et dz). La barre étant une phase condensée : $d^2 H = d \left(\underbrace{\rho S dz c T(z, t)}_{enthalpie} \right) = \underbrace{\frac{I^2}{\gamma} \frac{dz}{\pi R^2}}_{P_j} dt + (\phi_{entrant}(z, t) - \phi_{sortant}(z + dz, t) - \phi_{lat}(z, t)) dt$ Comme z est constante, $dT = \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} dt$. Le bilan énergétique donne $\rho c S dz \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} dt = \frac{I^2}{\gamma} \frac{dz}{\pi R^2} dt + \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial z}(z, t) \pi R^2 + \lambda \frac{\partial T}{\partial z}(z + dz, t) \pi R^2 - h(T(z, t) - T_e) 2\pi R dz \right) dt$ Soit

$\rho c \pi R^2 dz \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z, t) \pi R^2 dz - h(T(z, t) - T_e) 2\pi R dz + \frac{I^2}{\gamma} \frac{dz}{\pi R^2}$
$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z, t) - \frac{2h}{\rho c R} (T(z, t) - T_e) + \frac{I^2}{\rho c (\pi R^2)^2 \gamma}$
$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z, t) - b(T(z, t) - T_e) + d \quad \text{où} \quad a = \frac{\lambda}{\rho c}, b = \frac{2h}{\rho c R}, d = \frac{I^2}{\rho c (\pi R^2)^2 \gamma}$

II.2 – Résolution numérique dans la zone P1

Q13.	Le développement de Taylor à l'ordre 2 donne : $f(x + \varepsilon) = f(x) + \varepsilon f'(x) + \frac{\varepsilon^2}{2} f''(x) + o(\varepsilon^2) \quad \text{avec} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} o(\varepsilon^2) = 0$ $f(x - \varepsilon) = f(x) - \varepsilon f'(x) + \frac{\varepsilon^2}{2} f''(x) + o(\varepsilon^2) \quad \text{avec} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} o(\varepsilon^2) = 0$
Q14.	On en déduit $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \varepsilon) + f(x - \varepsilon) - 2f(x)}{\varepsilon^2} \right) = f''(x)$
Q15.	En discrétisant, $z_k = z, z_{k+1} = z + \varepsilon, z_{k-1} = z - \varepsilon$ avec $\Delta z = \varepsilon$ $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z_k, t) = \frac{T(z_{k+1}, t) - 2T(z_k, t) + T(z_{k-1}, t))}{(\Delta z)^2}$
Q16.	En utilisant la méthode d'Euler, $\frac{\partial T}{\partial t}(z_k, t_p) = \frac{T(z_k, t_{p+1}) - T(z_k, t_p)}{\Delta t}$
Q17.	En reportant dans l'équation, $\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z, t) - b(T(z, t) - T_e) + d$ $\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z, t) - b(T(z, t) - T_e) + d \Rightarrow$ $\frac{T(z_k, t_{p+1}) - T(z_k, t_p)}{\Delta t} = a \frac{T(z_{k+1}, t_p) - 2T(z_k, t_p) + T(z_{k-1}, t_p))}{(\Delta z)^2} + bT(z_k, t_p) + e$ $T(z_k, t_{p+1}) = T(z_k, t_p) + \Delta t \left(\frac{a}{(\Delta z)^2} (T(z_{k+1}, t_p) - 2T(z_k, t_p) + T(z_{k-1}, t_p)) + bT(z_k, t_p) + e \right)$
Q18.	for k in range(0, N+1) T[0, k] = T0 Ou T[0, :]
Q19.	T[p+1, k] = T[p, k] + dt * (a * (T[p, k+1] - 2 * T[p, k] + T[p, k-1]) / (dz**2) - b * T[p, k] + e)
Q20.	for i in range(1, M+1) T[i, 0] = T0 Ou T[0, 1:]
Q21.	En faisant le bilan énergétique pour une tranche entre $-L_c/2 - dz$ et $-L_c/2$, on obtient

	$\rho c \pi R^2 dz \frac{\partial T(-L_c/2, t)}{\partial t} dt = \left(\phi \left(-\frac{L_c}{2} - dz, t \right) - \phi \left(-\frac{L_c}{2}, t \right) - \phi_{lat} \right) dt$ $= \frac{I^2}{\gamma} \frac{dz}{\pi R^2} dt + \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \left(-\frac{L_c}{2} - dz, t \right) \pi R^2 + j \pi R^2 - h \left(T \left(-\frac{L_c}{2} - dz, t \right) - T_e \right) 2 \pi R dz \right) dt$ Soit $\frac{\partial T(-L_c/2, t)}{\partial t} = -\frac{\lambda}{\rho c dz} \frac{\partial T}{\partial z} \left(-\frac{L_c}{2} - dz, t \right) + \frac{j}{\rho c dz} - \frac{2h}{\rho c R} \left(T \left(-\frac{L_c}{2} - dz, t \right) - T_e \right)$ $\frac{\partial T(-L_c/2, t)}{\partial t} = -\frac{a}{dz} \frac{\partial T}{\partial z} \left(-\frac{L_c}{2} - dz, t \right) + \frac{j}{\rho c dz} - b \left(T \left(-\frac{L_c}{2} - dz, t \right) - T_e \right)$ En discrétisant, $\frac{T(-L_c/2, t_{p+1}) - T(-L_c/2, t_p)}{\Delta t}$ $= -\frac{a}{\Delta z} \left(\frac{T(-L_c/2 - \Delta z, t_p) - T(-L_c/2, t_p)}{\Delta z} \right) + \frac{j}{\rho c \Delta z} - b \left(T(-L_c/2, t_p) - T_e \right)$ $T(-L_c/2, t_{p+1}) = T(-L_c/2, t_p)$ $+ \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(-a \left(\frac{T(-L_c/2 - \Delta z, t_p) - T(-L_c/2, t_p)}{\Delta z} \right) + \frac{j}{\rho c} - b \Delta z \times T(-L_c/2, t_p) + e \Delta z \right)$ Erreur dans le sujet $e = bT_e + d$ alors qu'ici $e = bT_e$ En Python, <pre>Tab[p+1,N]=Tab[p,N]+dt*(-a* (Tab[p,N]- Tab[p,N-1]) +b*dz*Tab[p,N]+e*dz +g)/dz</pre> Par identification, $g = \frac{j}{\rho c}$
Q22.	On peut considérer que le régime stationnaire est atteint car les courbes $t=1000s$ et $1200 s$ sont quasiment confondues.

Sujet E3A PSI 2023

Partie III - Stockage des déchets radioactifs

Q33. La loi de Fourier donne la relation suivante :

$$\vec{j}_{\text{cond}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

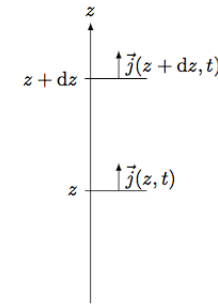
où :

- $\vec{j}_{\text{cond}}$ est la densité volumique de flux thermique exprimée en $W \cdot m^{-2}$.
- λ est la conductivité thermique du matériau exprimée en $W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}$.
- T est la température en K .

Physiquement, cette loi traduit le fait que le flux thermique est orienté dans le sens opposé au gradient de température, la conduction thermique se fait donc des zones chaudes vers les zones froides.

1. Ici, $\mathcal{P} = 4 \times 1300 \text{ MW}$ d'après le document 1.

Q34. On considère une tranche d'argile d'épaisseur dz :



Le premier principe appliqué à cette tranche entre t et $t + dt$ donne (la tranche n'est soumise à aucun travail et est immobile macroscopiquement) :

$$dU = \delta Q$$

où :

- $dU = U(t + dt) - U(t) = S \rho_a dz (u(z, t + dt) - u(z, t))$ où $u(z, t)$ est l'énergie interne massique de l'argile. On le considère comme une phase condensée incompressible donc : $u(z, t) = c_a T(z, t)$ ainsi, à l'ordre 1 en dt , on obtient :

$$dU = S c_a \rho_a dz dt \frac{\partial T}{\partial t}(z, t)$$

- $\delta Q = \vec{j}(z, t) \cdot \vec{u}_z S dt - \vec{j}(z + dz, t) \cdot \vec{u}_z S dt$ soit, à l'ordre 1 en dz :

$$\delta Q = -\frac{\partial j_z}{\partial z}(z, t) S dz dt$$

Or, d'après la loi de Fourier, $j_z(z, t) = -\lambda_a \frac{\partial T}{\partial z}(z, t)$ donc :

$$\delta Q = S \lambda_a dz dt \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z, t)$$

Le premier principe devient donc :

$$S c_a \rho_a dz dt \frac{\partial T}{\partial t} = S \lambda_a dz dt \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_a}{c_a \rho_a} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

On pose ainsi : $D_a = \frac{\lambda_a}{c_a \rho_a}$ diffusivité thermique exprimée en $m^2 \cdot s^{-1}$.

Dans le cas stationnaire, l'équation devient :

$$\frac{d^2 T}{dz^2} = 0$$

Q35. En $z = -L$, le flux thermique est continu et provient directement des déchets. Chaque colis libère une puissance $\mathcal{P}_0$ et les N colis diffusent une puissance à travers la surface S vers le haut et vers le bas, par définition du flux thermique :

$$j_z(-L^-, t) S = N \frac{\mathcal{P}_0}{2}$$

De plus, d'après la loi de Fourier : $j_z(-L^+, t) = -\lambda_a \frac{\partial T}{\partial z}(-L^+, t)$. La continuité du flux assure :

$$\frac{\partial T}{\partial z}(-L, t) = -\frac{N \mathcal{P}_0}{2 \lambda_a S}$$

En $z = 0$, on admet que le contact thermique est parfait, ainsi : $T(0^-, t) = T(0^+, t) = T_{\text{ext}}$.

Q36. En reprenant l'équation obtenue en régime stationnaire, on peut intégrer une première fois entre $-L$ et z :

$$\frac{dT}{dz}(z) = \frac{dT}{dz}(-L) = -\frac{NP_0}{2\lambda_a S}$$

On intègre alors entre 0 et z :

$$T(z) - T(0) = -\frac{NP_0}{2\lambda_0 S} z \quad \text{soit} \quad \boxed{T(z) = T_{\text{ext}} - \frac{NP_0}{2\lambda_a S} z}$$

$$\text{Ainsi : } T(-L) = T_{\text{ext}} + \frac{NP_0}{2\lambda_a S} L$$

Q37. On cherche S tel que $T(-L) = T_{\text{max}}$:

$$S = \frac{NP_0}{2\lambda_a (T_{\text{max}} - T_{\text{ext}})} L$$

Ainsi, numériquement : $S = 138 \text{ km}^2$.

Q38. En attendant 30 ans, on diminue la quantité d'atomes radioactifs dans les échantillons. En ODG, on attend une demi-vie, on divise donc par deux le nombre d'atomes radioactifs environ, ce qui permet de diviser par deux la puissance émise et ainsi la surface nécessaire à l'enfouissement.

Q39. Il y a $N_t + 1$ points donc :

$$\boxed{h = \frac{\Delta t}{N_t}}$$

Q40. En raisonnant en ordres de grandeur sur l'équation de diffusion, on obtient :

$$\frac{\Delta T}{\tau} = D_a \frac{\Delta T}{L^2} \quad \text{ainsi} \quad \boxed{\tau = \frac{L^2 \rho_a c_a}{\lambda_a}}$$

Ainsi, l'application numérique donne : $\tau = 2,0 \cdot 10^{11} \text{ s} = 6,3 \cdot 10^3 \text{ an}$

Q41. Par définition de la dérivée :

$$\frac{\partial T}{\partial z}(z, t) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{T(z + \frac{k}{2}, t) - T(z - \frac{k}{2}, t)}{k}$$

Soit, à l'ordre 1 en k :

$$\frac{\partial T}{\partial z}(z, t) \approx \frac{T(z + \frac{k}{2}, t) - T(z - \frac{k}{2}, t)}{k}$$

De même, pour la dérivée seconde :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z, t) \approx \frac{\frac{\partial T}{\partial z}(z + \frac{k}{2}, t) - \frac{\partial T}{\partial z}(z - \frac{k}{2}, t)}{k} \approx \frac{\frac{T(z + k, t) - T(z, t)}{k} - \frac{T(z, t) - T(z - k, t)}{k}}{k}$$

Soit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z, t) \approx \frac{T(z + k, t) - 2T(z, t) + T(z - k, t)}{k^2}$$

Enfin, d'après l'approximation numérique donnée dans l'énoncé : $\tilde{T}_n^i = T(z_n, t_i)$, on en déduit donc :

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z_n, t_i) = \frac{\tilde{T}_{n+1}^i - 2\tilde{T}_n^i + \tilde{T}_{n-1}^i}{k^2}}$$

Q42. *Fonction assert hors-programme*

La ligne 12 permet d'assurer la stabilité du schéma numérique. Si la grandeur r venait à ne pas vérifier la condition imposée, le code renverrait un *bug*.

La ligne 15 permet d'imposer la valeur $T_{\text{ext}} + \frac{NP_0}{2\lambda_a S} L$ en $z = -L$ à l'instant initial. La ligne 20 permet de faire de même aux instants ultérieurs. Ces lignes correspondent à la gestion de la condition aux limites en flux thermique.

Q43. Le code de la ligne 19 complété est le suivant :

_____T[t+1][x]=T[t][x]+D_a*h/k**2*(T[t][x+1]-2*T[t][x]+T[t][x-1])

Q44. *Deuxième partie de question à revoir... ? Ce qui est dit ici n'est pas très fou fou...*

Entre des trois premiers instants, le gradient de température évolue davantage qu'entre τ et 3τ . La convergence vers le régime permanent est ainsi d'autant plus lente que le système en est proche.

Une critique possible est que la personne qui a rédigé le code n'a pas précisé les unités des grandeurs utilisées en commentaires.