

DS de Physique 27 novembre 2024
PSI - Lycée du Parc des Loges – Durée 4H

Difficulté supérieure

Première partie – Température dans le tunnel de Fréjus

Pour les applications numériques, on utilisera 3 chiffres significatifs.

Le tunnel routier du Fréjus relie la vallée de l'Arc, en France, au val de Suse, en Italie. Long d'environ 13 km, le tunnel passe sous le col du Fréjus dans les Alpes cottiennes. La pointe Fréjus culmine à une altitude de 2934 m.

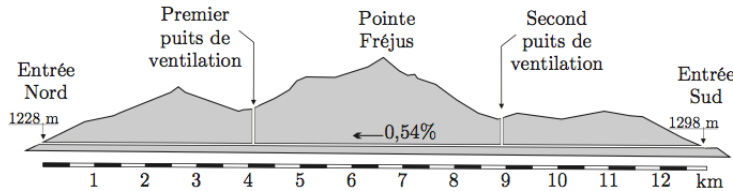


FIGURE 1 – Tunnel de Fréjus

La roche environnante dans le tunnel a une température constante tout au long de l'année d'environ 30° C. Dans un premier temps nous étudierons les évolutions saisonnières de la température dans le sol. Puis nous tenterons d'expliquer cette température élevée par un modèle géophysique.

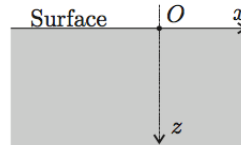


FIGURE 2 – Sol

I.A. — Évolutions saisonnières de la température dans le sol

On se place au sommet de la pointe Fréjus à une altitude de 2934 m. On assimile la roche à un milieu semi-infini de conductivité thermique κ , de masse volumique ρ_s et de capacité thermique massique c_s . Sa surface est plane et horizontale et est soumise à la variation de température extérieure $T(z=0,t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t)$ avec $\theta_0 = 0^\circ \text{ C}$. (Voir figure 2).

❑ 1 — Calculer la moyenne temporelle de la température extérieure en $z = 0$. Calculer la température maximale et minimale. Proposer une valeur numérique pour T_0 pour les évolutions annuelles de température.

❑ 2 — Le flux thermique élémentaire, défini comme la quantité d'énergie traversant une surface élémentaire dS pendant dt , est noté $d\phi_Q$. Rappeler la définition du vecteur $\vec{j}_Q$, densité de flux thermique. Quelle est sa dimension ?

❑ 3 — Rappeler la loi de Fourier, ainsi que ses conditions d'application. En déduire les dimensions de la conductivité thermique κ .

❑ 4 — On étudie une tranche mésoscopique de sol comprise entre z et $z + dz$ de surface S . Quelle est l'énergie thermique δQ reçue par cette tranche entre t et $t + dt$?

❑ 5 — Pourquoi étudie-t-on une tranche « mésoscopique » ?

❑ 6 — Établir l'expression de sa variation d'énergie interne dU en fonction de $\frac{\partial j_Q}{\partial z}$ et S puis en fonction de ρ_s , c_s , S et $\frac{\partial T}{\partial t}$.

❑ 7 — En déduire l'équation de la chaleur à une dimension $\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2}$ dans laquelle on précisera l'expression et la dimension du coefficient D de diffusion thermique.

On cherche des solutions de la forme $T(z,t) = \theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - kz)}$ vérifiant la condition aux limites $T(z=0,t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t)$.

❑ 8 — Interpréter cette forme de solution. Déterminer la relation de dispersion correspondante. En déduire l'expression de k qu'on mettra sous la forme $k = k' + ik''$ avec $k' > 0$. Quelle est la signification physique de k' et k'' . Déterminer l'expression correspondante de la solution réelle $T(z,t)$.

❑ 9 — Calculer la profondeur z_e à partir de laquelle les oscillations annuelles de température ne s'écartent pas de θ_0 de plus de 1%. Que peut-on dire de la température dans le tunnel routier de Fréjus ? Pour les roches granitiques constituant le Fréjus on donne $\rho_s = 2,65 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $c_s = 8,50 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $\kappa = 3,00 \text{ si}$.

❑ 10 — Que peut-on dire des variations quotidiennes de la température à la profondeur z_e ? En terme de filtrage fréquentiel, comment se comporte le sol ?

I.B. — Température d'origine géophysique

La température moyenne de 30° C relevée dans le tunnel de Fréjus peut être expliquée par un modèle géothermique simple de la croûte terrestre. On considère qu'au niveau des Alpes, l'épaisseur de la croûte terrestre continentale est $L_c = 45,0 \text{ km}$. Les roches granitiques qui constituent une partie des Alpes contiennent des éléments radioactifs comme l'uranium, le thorium et le potassium. La chaleur produite par ces éléments radioactifs est directement proportionnelle à leur concentration.

Dans les modèles couramment utilisés cette concentration décroît exponentiellement avec la profondeur, de sorte que la puissance volumique dégagée peut s'écrire $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 e^{-\frac{z}{H}}$ avec $H = 10,0 \text{ km}$. On prendra $\mathcal{P}_0 = 2,50 \mu\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$. La croûte terrestre repose sur le manteau terrestre, à la fois plus dense et plus chaud que la croûte. On admet enfin qu'au niveau de l'interface $\mathcal{I}_{c/m}$ entre la croûte et le manteau ce dernier génère un flux surfacique constant $\vec{j}_m = -j_m \hat{e}_z$ avec $j_m = 35,0 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$.

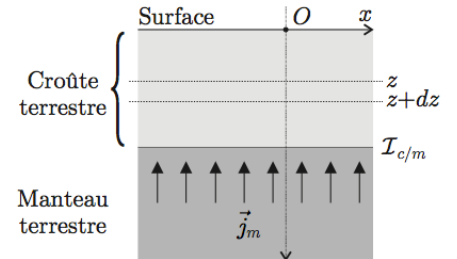


FIGURE 3 – Modèle géophysique

❑ 11 — Effectuer, en régime stationnaire, le bilan thermique dans une tranche de croûte terrestre de surface S , comprise entre z et $z + dz$.

❑ 12 — En déduire la température $T(z)$ en fonction de : H , L_c , $\mathcal{P}$, j_m , κ et $\theta_0 = 0^\circ \text{ C}$ la température moyenne de surface en $z = 0$.

❑ 13 — Exprimer le flux thermique total $\vec{j}_S = j_S \hat{e}_z$ au niveau de la surface en $z = 0$.

❑ 14 — Comparer les deux termes proportionnels à z et simplifier l'expression de $T(z)$. Calculer la température au centre du tunnel de Fréjus ($z = 1,70 \text{ km}$) puis j_S .

I.C. — Prise en compte du relief

On suppose maintenant que la température à la surface plane $z = 0$ possède une dépendance spatiale en x que l'on modélise par la relation $T(x, z = 0) = T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$. Pour étudier l'effet du relief sur la température dans le tunnel de Fréjus on prendra $\lambda = 10,0$ km.

□ **15** — On suppose pour cette question qu'il n'y a pas de source d'énergie thermique dans la roche. Donner sans démonstration l'équation différentielle satisfaite par $T(x, z)$ en régime stationnaire. En utilisant la méthode de séparation des variables, déterminer la solution $T(x, z)$ qui respecte la condition aux limites $T(x, z = 0)$ et qui demeure finie lorsque $z \rightarrow +\infty$. Justifier la prise en compte des effets de la variation spatiale de la température.

□ **16** — Toujours pour une surface plane d'équation $z = 0$, en utilisant la linéarité de l'équation satisfaite par la température, déterminer $T(x, z)$ en considérant les sources internes d'énergie thermique.

□ **17** — On considère ici que la topographie de la surface peut être représentée par l'équation $h(x) = h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$. La température de la surface $T_s = T(x, z = h)$ sera prise égale à celle de l'air ambiant et sera modélisée par $T_s = \theta_0 + \beta z$. En effectuant un développement limité en z à l'ordre 1, exprimer la température $T(x, z = 0)$ en fonction de h , $T(x, z = h)$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}$.

Déterminer $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}$ en fonction notamment du flux d'énergie thermique à la surface j_S . En déduire que l'on peut écrire

$$T(x, z) = \theta_0 + c_1 z + c_2 (1 - e^{-z/H}) + c_3 h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-z/\delta}$$

où l'on précisera l'expression des constantes c_1 , c_2 , c_3 et δ en fonction des données du problème.

Deuxième partie – De la cuisson d'un oeuf

Cette partie a pour objet l'étude d'un cuiseur à œufs.



Figure 4 Vue de profil, vue de dessus, vue de dessus sans la cloche (laissant voir la grille)

Cet appareil cuit des œufs (au nombre de 1 à 7) grâce à la vapeur d'eau qui se forme par ébullition de l'eau placée dans le fond du cuiseur.

Les œufs à cuire selon différents degrés de cuisson (coque, mollet, dur) sont placés sur une grille percée de 7 trous circulaires et de 6 trous périphériques permettant la circulation de la vapeur d'eau dans l'enceinte de cuisson.

Des orifices sont percés au sommet de la cloche métallique pour permettre à la vapeur de s'échapper.

La puissance électrique consommée par l'appareil est : $\mathcal{P} = 350 \text{ W}$. On considèrera que cette puissance est intégralement consommée par la résistance chauffante.

La quantité d'eau placée dans le cuiseur est mesurée à l'aide d'un gobelet gradué selon le nombre d'œufs à cuire et le type de cuisson désirée (voir figure 6). Le fond est bombé à cause de la présence d'une pique sous la base du gobelet permettant le percage du sommet de l'œuf lors de la cuisson afin d'éviter la rupture de la coquille.

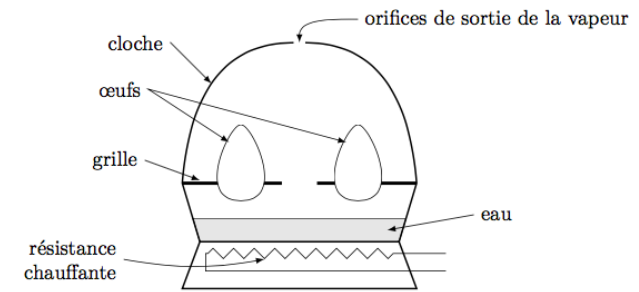


Figure 5 Schéma général du cuiseur

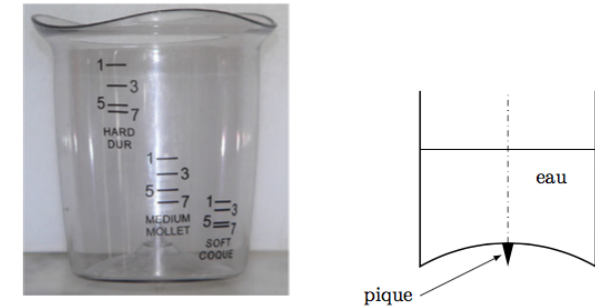


Figure 6 Photo et schéma du gobelet

Fonctionnement du cuiseur

Le volume d'eau nécessaire à la cuisson d'un seul œuf dur est de 120 mL. Les œufs à la température initiale $T_0 = 20^\circ\text{C}$ sont placés dans le cuiseur et la masse d'eau m_0 contenue dans le gobelet (à la même température initiale T_0) est versée sous les œufs. Cette eau est portée à ébullition sous $p = 1 \text{ bar}$, puis évaporée. Le cuiseur s'arrête quand toute l'eau s'est évaporée.

Notons c la capacité thermique massique de l'eau liquide, T_{eb} sa température d'ébullition dans les conditions de l'expérience, $h \approx 1200 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ le coefficient de transfert conducto-convectif (eau $\leftrightarrow$ œuf) et $m(t)$ la masse d'eau contenue dans le cuiseur à l'instant t .

Soient Δt_1 la durée de chauffage de l'eau de T_0 à T_{eb} et Δt_2 la durée de la cuisson des œufs, qui correspond à l'évaporation totale de l'eau. Pendant cette deuxième phase, on supposera que la vapeur d'eau est à la température T_{eb} sous la pression $p = 1 \text{ bar}$.

II.A – Chauffage de l'eau

II.A.1) Soit m_c la valeur en eau du cuiseur (on rappelle que la valeur en eau d'un objet est la masse d'eau ayant même capacité thermique que cet objet). En supposant la transformation adiabatique pendant le chauffage, exprimer Δt_1 en fonction des données.

II.A.2) On place dans le cuiseur une masse d'eau $m_0 = 125 \text{ g}$. On mesure alors une durée de chauffage $\Delta t_0 = 150 \text{ s}$ avant de parvenir à l'ébullition. En déduire la valeur en eau du cuiseur.

II.B – Détermination de la durée de cuisson Δt_2

II.B.1) Mécanisme de la cuisson des œufs

Un œuf est composé de trois parties :

- une coquille très mince ;
- le blanc d'œuf constituant les deux tiers de l'œuf. C'est un liquide composé à environ 90% d'eau et 10% de protéines, sels minéraux et vitamines ;
- le jaune d'œuf est composé à moitié d'eau, de 15% de protéines et de 30% de lipides.

Lors de la cuisson (type œuf dur) les protéines se déroulent partiellement et se lient pour former un réseau qui piège l'eau : c'est un gel. Les œufs caoutchouteux sont ceux qui ont perdu trop d'eau ; c'est aussi la sur-cuisson du jaune qui le fait devenir sableux. Quand un œuf est cuit à 100°C , la masse diminue progressivement à mesure que l'eau est éliminée du gel formé. Quand un œuf est cuit à une température peu

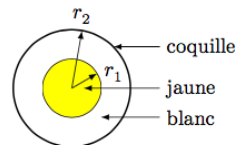


Figure 7 Structure interne d'un œuf

supérieure à la température de coagulation de ses protéines, il coagule en conservant son eau, gage de moelleux. Le jaune d'œuf commence à épaissir à 65 °C. Il coagule totalement à une température de 85 °C.

Justifier l'existence de la pique sous le fond du gobelet.

II.B.2) Modélisation et établissement de l'équation de la chaleur

Pour déterminer le temps de cuisson, il est nécessaire de résoudre l'équation de la chaleur en régime dépendant du temps. On modélise un œuf comme un ensemble de deux sphères concentriques de rayons r_1 et r_2 limitant le jaune et le blanc (figure 7).

Afin de simplifier l'étude, on va négliger l'influence de la coquille et considérer l'intérieur de l'œuf comme homogène et ayant les propriétés thermodynamiques de l'eau : masse volumique μ , capacité thermique massique c et conductivité thermique λ .

a) Établir l'équation de la chaleur en coordonnées sphériques, en faisant un bilan énergétique sur une couche sphérique de rayon r et d'épaisseur dr .

b) On introduit les variables réduites : $\rho = r/r_2$ et $\tau = t/\theta$. Exprimer θ en fonction de μ , c , r_2 et λ pour que l'équation de la chaleur s'écrive :

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial T(\rho, \tau)}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial T(\rho, \tau)}{\partial \tau} \quad (\text{II.1})$$

Commenter la dépendance de θ par rapport à r_2 .

II.B.3) Résolution de l'équation de la chaleur

a) Afin de résoudre cette équation *en régime dépendant du temps*, on pose dans un premier temps

$$T(\rho, \tau) = T_{\text{eb}} + f(\rho)g(\tau)$$

En utilisant l'équation de la chaleur, montrer que la composante temporelle $g(\tau)$ vérifie l'équation

$$\frac{1}{g(\tau)} \frac{dg(\tau)}{d\tau} = -A^2$$

où A est une constante réelle positive, inconnue à ce stade de la résolution.

Donner l'expression de $g(\tau)$ à une constante multiplicative près et justifier le signe $-$ figurant devant A^2 .

b) Pour trouver la composante spatiale de $T(\rho, \tau)$, on pose $f(\rho) = \frac{F(\rho)}{\rho}$. Montrer alors que $F(\rho)$ est solution de l'équation

$$\frac{d^2 F(\rho)}{d\rho^2} + A^2 F(\rho) = 0$$

En déduire l'expression de $f(\rho)$.

c) Montrer alors que la solution générale de l'équation II.1 peut s'écrire sous la forme

$$T(\rho, \tau) = T_{\text{eb}} + \sum_i \frac{\beta_i \sin(A_i \rho)}{\rho} \exp(-A_i^2 \tau) \quad (\text{II.2})$$

Quelles sont les différentes conditions qui permettent théoriquement de calculer les coefficients β_i et A_i ?

II.B.4) Détermination des constantes dans l'approximation de Fourier

Dans le cadre de l'approximation de Fourier, on ne conserve dans l'expression II.2 que le terme associé à la constante de temps la plus longue, donc celui correspondant au coefficient A_i le plus petit (qui sera noté A dans la suite), car les autres termes sont rapidement amortis au cours du temps :

$$T(\rho, \tau) \approx T_{\text{eb}} + \frac{\beta \sin(A\rho)}{\rho} \exp(-A^2 \tau)$$

a) On suppose que les échanges thermiques au niveau de la coquille sont donnés par la loi de Newton $\vec{j}_{\text{th}} = h(T(\rho = 1, \tau) - T_{\text{eb}})\vec{u}_r$. En écrivant deux expressions permettant d'exprimer le flux thermique entrant dans l'œuf, montrer que A est solution de l'équation

$$\frac{A}{1 - r_2 h / \lambda} = \tan A$$

b) Pour un œuf moyen, on a $r_2 = 2,5$ cm. Montrer que dans ces conditions, on peut prendre $A \approx \pi$ comme première solution de l'équation précédente dans $\mathbb{R}^{++}$. Évaluer l'erreur commise.

c) Exprimer alors $T(\rho, \tau)$ avec la valeur de A précédente. Quelle conséquence peut-on en tirer sur la température à la surface de l'œuf ? Montrer que cela revient à considérer une des grandeurs caractéristiques du problème comme infinie.

d) Calculer β en exprimant la température au centre de l'œuf à $t = 0$.

II.B.5) Calcul de la durée de cuisson Δt_2 pour un œuf dur

a) Exprimer en fonction de θ et des autres données du problème la durée de cuisson Δt_2 à l'état dur d'un œuf de rayon r_2 , pour lequel la température au centre doit atteindre $T_c = 80$ °C.

b) Calculer Δt_2 pour un œuf de rayon $r_2 = 2,5$ cm. Commenter le résultat obtenu.

Données sur l'eau

masse volumique : 1000 kg·m⁻³

conductivité thermique : 0,6 W·m⁻¹·K⁻¹

produit ionique : $K_e = 10^{-14}$

capacité thermique massique : 4180 J·kg⁻¹·K⁻¹

chaleur latente massique de vaporisation : 2,26 × 10⁶ J·kg⁻¹

température d'ébullition sous 1 bar : 100 °C