Première Partie – Température dans le tunnel de Fréjus

Mines Ponts 2016 PC –

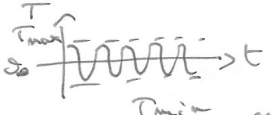
I.A – Evolut saisonnière de la température

1 – $\boxed{\langle T(z=0,t)\rangle} = \langle \vartheta_0 + T_0 \cos \omega t \rangle_T = \boxed{\vartheta_0}$

car $\langle \cos \omega t \rangle_T = 0$ → f° T-périodique

$T_{max} = \vartheta_0 + T_0$

$T_{min} = \vartheta_0 - T_0$



T_0 de l'ordre de 5 à 10°C car max → variat annuelles !

(à cette altitude il ne fait jamais "trop chaud" !)

en moy. sur l'an

2 – Par déf. $\boxed{d\phi_Q = \vec{j_Q} \cdot \vec{dS}}$ avec $\vec{dS}$ vecteur élémentaire de la surface d'échange

↳ puissance thermique en $J.s^{-1} = W$

$\vec{dS} = dS\,\vec{n}$

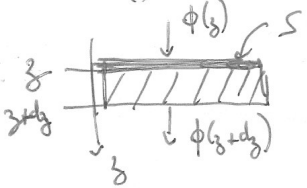
$[\vec{j_Q}] = W.m^{-2}$

3 – loi de Fourier pour un milieu Rongeère, linéaire isotrope

$\boxed{\vec{j_Q} = -K \overrightarrow{\text{grad}}\, T}$ $\quad [K] = \dfrac{[\vec{j_Q}]}{[\overrightarrow{\text{grad}}\, T]} = \dfrac{W.m^{-2}}{K.m^{-1}}$

$\boxed{[K] = W.m^{-1}.K^{-1}}$

4)



$\phi(z) = \vec{j_Q} \cdot \vec{S} = j_Q(z)\,S$ → flux entrant compté (+)

$\phi(z+dz) = j_Q(z+dz)\,S$ → flux sortant compté (−)

Bilan thermique $\quad \delta Q = [-\phi(z+dz,t) + \phi(z,t)]\,S\,dt$

$\boxed{\delta Q = -\dfrac{\partial \phi}{\partial z}\,dz\,dt}$

5 – On étude une tranche "mésoscopique" car à cette échelle le milieu est continu (contrairement à l'échelle microscopique) et les grdeurs physiques d'état sont assimilables à leurs moyennes "robustes", ainsi on peut définir un équilibre local à cette échelle.

6 – Appliquons le 1er principe de la Thermod. à cette tranche d'épaisseur dz, de volume cst, dont l'énergie mécanique ne varie pas: absence de déplacement avec volume fixe donc $dE_c = 0$ et $dE_p = 0$ pas de variat de l'ener pot. de pesanteur

$dU + dE_m = dU = \delta Q + \delta W$ avec $\delta W_p = -P\,dV = 0$ pas ex. pression car V cst

donc $\boxed{dU = \delta Q}$

avec $dU = C\,dT = c_s\,dm\,dT$ avec $dm = \rho_s dV = \rho_s S\,dz$

et $dT = T(z,t+dt) - T(z,t) = \dfrac{\partial T}{\partial t}\,dt$

$\boxed{dU = \rho_s c_s\,dV\,\dfrac{\partial T}{\partial t}\,dt}$ c_s : capacité thermique de la tranche

Le bilan global fournit l'identité :

$\rho_s c_s\,dV\,\dfrac{\partial T}{\partial t}\,dt = -\dfrac{\partial \phi}{\partial z}\,dz\,dt$

avec $\phi = \iint_S \vec{j_Q} \cdot \vec{dS}$ et $\vec{j_Q} = -K \overrightarrow{\text{grad}}\, T = -K \dfrac{\partial T}{\partial z}\,\vec{u_z}$

car $T(r,t) = T(z,t)$ invariance par translat selon x, y.

donc $\phi = \iint_S j_Q(z)\,dS = j_Q(z)\,S$ (j_Q uniforme sur S)

donc $\dfrac{\partial \phi}{\partial z} = S\,\dfrac{\partial j}{\partial z}$

donc $\rho_s c_s\,dV\,\dfrac{\partial T}{\partial t}\,dt = -\dfrac{\partial j_Q}{\partial z}\,dV\,dt$ ($dV = dz\,S$)

$$\boxed{\rho_s c_s \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial j_Q}{\partial z}}$$

7- Avec $j_Q = - K \frac{\partial T}{\partial z}$, l'équat précédente permet d'établir l'équat de la chaleur :

$$\rho_s c_s \frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \longleftrightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{\rho_s c_s} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}$$

avec $\boxed{D = \frac{K}{\rho_s c_s}}$

Dimension de D

$$[D] = \left[\frac{\frac{\partial T}{\partial t}}{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}} \right] = \frac{K \cdot s^{-1}}{K \cdot m^{-2}}$$

$$\boxed{[D] = m^2 \cdot s^{-1}}$$

8- On cherche des solut en régime forcé sinusoïdal. L'équat de diff. étant linéaire, la solut à une excitat sinusoïdale à la pulsat ω sera aussi sinusoïdale à la m pulsat.

Ainsi $T(z,t)$ sera composé d'une composante continue ϑ_0 auquel on superpose une oscillat à la pulsat ω avec une phase $\underline{\varphi}(z) = - \underline{k} z$, qui décrit l'éventuelle propagat de l'onde.

(ici pas réellement de propagat car l'onde sera amortie).

En notat complexe, $\frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow \times i\omega$ et $\frac{\partial}{\partial z} \longleftrightarrow \times - i\underline{k}$

$$\frac{\partial \underline{T}}{\partial z} = i\omega \underline{T} = -D\underline{k}^2 \underline{T} = D \frac{\partial^2 \underline{T}}{\partial z}$$

↙ δ dimension caractéristique ⇒ épaisseur de peau

d'où $\boxed{\underline{k}^2 = - \frac{\omega}{D} i}$ on posera $\delta^2 = \frac{2D}{\omega}$ $(\delta \in \mathbb{R} > 0)$

Soit $\underline{k}^2 = - \frac{2i}{\delta^2} = \frac{2 e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\delta^2}$

$$\underline{k} = \pm \frac{\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\delta} = \pm \frac{1}{\delta} (1 - i)$$

On retiendra la solut ① pour avoir une onde qui ne diverge pas en $z \to +\infty$!

$$\underline{k} = + \frac{1}{\delta} (1 - i)$$

$$\boxed{\underline{k} = k' + i k''} \quad \text{avec} \quad \boxed{\begin{aligned} k' &= 1/\delta = \sqrt{\frac{\omega}{2D}} \\ k'' &= - 1/\delta \end{aligned}} \quad \underline{k''} < 0 !$$

→ La partie réelle de l'indice correspond au déphasage de l'onde qui pénètre dans le milieu pour $z > 0$.

→ La partie imaginaire à l'absorption effective de l'onde qui produit son amortissement lors de sa pénétrat $z > 0$.

$$\underline{T}(z,t) = \vartheta_0 + T_0 e^{i(\omega t - k' z)} \times e^{k'' z}$$

↓ amortissement expo.

$$\boxed{T(z,t) = \mathrm{Re}(\underline{T}) = \vartheta_0 + T_0 \cos(\omega t - k' z) e^{k'' z}} \qquad e^{-z/\delta}$$

9- Ecart de 1% par rapport à ϑ_0

$$\vartheta_0 - T_0 e^{-z/\delta} = 0{,}99\, \vartheta_0 \quad \to \quad \boxed{z_e = \delta \ln\left(\frac{100\, T_0}{\vartheta_0}\right)}$$

$$T_0 e^{-z/\delta} = \vartheta_0 / 100$$

AN $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}} = 1{,}156$ m

avec $T = 365\,j$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1{,}99 \cdot 10^{-7}$ rd.s^{-1}

avec $T_0 = 10 + 273 = 283$

$\vartheta_0 = 273$

$\to \boxed{z_e = 5{,}37 \text{ m}}$

$z_e \ll$ altitude 2334 m

Les variat annuelles de Température extérieures n'affectent pas la température du Tunnel de Fréjus (cote à cette échelle).

10- Pour la variat quotidienne $\omega = 7{,}27.10^{-5}\ \text{rd.s}^{-1}$

$\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}} = 6{,}1.10^{-2}\ \text{m} \simeq 6{,}1\ \text{cm}$!!

Les variat à plus haute fréq. que la variat annuelle se propagent encore ⊖ profondément → "filtre passe-bas"

(Tunnel insensible aux variat quotidiennes encore ⊕)

B- Température d'origine géophysique

11- Bilan thermique en régime stationnaire pour une tranche dz de la croûte terrestre

$dU = 0 = \delta Q_{diff} + \delta Q_{créé}$

avec $\delta Q_{créé} = \mathcal{P}\, dt\, dV = \mathcal{P}_0 e^{-z/H}\, dt\, S dz$

↳ puissance volumique

$\delta Q_{diff} = -\frac{d\Phi}{dz} dz\, dt = -\frac{dj_Q}{dz} S dz\, dt$

$0 = -\frac{dj_Q}{dz} S dz\, dt + \mathcal{P}_0 e^{-z/H} S dz\, dt$

$\boxed{dj_Q = \mathcal{P}_0 e^{-z/H} dz} \rightarrow j_Q = -\mathcal{P}_0 H e^{-z/H} + K$

12- Détermination de la cste : continuité du flux en $z = L_c$ ($J_{c/m}$)

$j_Q(z = L_c) = -j_m$

$j_Q(L_c) = -j_m = -\mathcal{P}_0 H e^{-L_c/H} + K$

$K = -j_m + \mathcal{P}_0 H e^{-L_c/H}$

$\boxed{j_Q = H\mathcal{P}_0\left[-e^{-z/H} + e^{-L_c/H}\right] - j_m}$

Loi de Fourier

$j_Q(z) = -k \frac{dT}{dz}$

$\frac{dT}{dz} = \frac{H\mathcal{P}_0}{k}\left(e^{-z/H} - e^{-L_c/H}\right) + \frac{j_m}{k}$

$T(z) = \left(-\frac{H\mathcal{P}_0}{k} e^{-L_c/H} + \frac{j_m}{k}\right) z - \frac{H^2\mathcal{P}_0}{k} e^{-z/H} + K'$

cond° aux limites : $T(z=0) = \vartheta_0$

$T(z=0) = -\frac{H^2\mathcal{P}_0}{k} + K' = \vartheta_0 \rightarrow K' = \vartheta_0 + \frac{H^2\mathcal{P}_0}{k}$

$\boxed{T(z) = \left(-\frac{H\mathcal{P}_0}{k} e^{-L_c/H} + \frac{j_m}{k}\right) z + \frac{H^2\mathcal{P}_0}{k}\left(1 - e^{-z/H}\right) + \vartheta_0}$

13- En $z = 0$ $\quad \vec{j_s} = j_s \vec{e_z}$

avec $\boxed{j_s = j_Q(z=0) = H\mathcal{P}_0\left(e^{-L_c/H} - 1\right) - j_m}$

14- Comparons les 2 termes proportionnels à z :

j_m et $H\mathcal{P}_0 e^{-L_c/H}$

$\begin{cases} H\mathcal{P}_0 e^{-L_c/H} = 1{,}11.10^{-5}\ \text{W.m}^{-2} \\ j_m = 0{,}035\ \text{W.m}^{-2} \end{cases}$ → le flux transmis par le manteau terrestre domine largement le flux créé par radioactivité !!

$T(z) \simeq \frac{j_m}{k} z + \frac{H^2\mathcal{P}_0}{k}\left(1 - e^{-z/H}\right) + \vartheta_0$

Au centre du Tunnel $z_0 = 1{,}7\ \text{km}$, on obtient $\boxed{T(z) = 32{,}8°\text{C}}$

$j_s \simeq -H\mathcal{P}_0 - j_m = -0{,}060\ \text{W.m}^{-2}$ → le sol émet de l'énergie thermique

Rqe) 1 partie supplémentaire de ce sujet initial à regarder...

I. c) Prise en compte du relief.

15) Si on ne prend pas en compte la source d'énergie thermique dans la roche, l'équation de la chaleur 2D est

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\Delta T = D\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = 0 \quad \text{en régime stationnaire}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Supposons que T est à variables séparables : $T(x,z) = \beta(x)\,\gamma(z) + cte$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \beta''(x)\gamma(z) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \beta(x)\gamma''(z)$$

$$\beta''(x)\gamma(z) = -\beta(x)\gamma''(z) \Rightarrow \underbrace{\frac{\beta''}{\beta}}_{\text{fonction de } x} = \underbrace{-\frac{\gamma''}{\gamma}}_{\text{fonction de } z} = cte$$

$\beta'' = cte\,\beta$ et $\gamma'' + cte\,\gamma = 0$

On veut une solution oscillante en x et exponentielle en z, donc $cte < 0$

On note $cte = -k^2$

$$\beta''(x) + k^2\beta(x) = 0 \qquad \gamma''(z) - k^2\gamma(z) = 0$$

$$\beta(x) = A\cos kx + B\sin kx \qquad \gamma(z) = Ce^{-kz} + De^{kz}$$

A, B, C, D constantes

Les conditions aux limites permettent d'avoir $D = 0$ et $B = 0$

$$T(x,z) = K\cos kx\, e^{-kz} + cte,\ K \text{ constante}$$

$$T(x, z=0) = T_1\cos kx + T_S \Rightarrow K = T_1 \text{ et } cte = T_S$$

$$T(x,z) = T_1\cos(kx)e^{-kz} + T_S$$

La présence de la montagne fait que l'invariance par translation x supposée dans les parties précédentes n'est pas une hypothèse correcte. Ici la montagne est encore absente, mais la température de surface est cohérente avec le relief.

16) En présence des sources internes d'énergie thermiques on avait

$$\frac{dj_Q}{dz} = P_0 e^{-\frac{z}{H}}$$

à 2D on obtient $\quad div(\vec{j}_Q) = P_0 e^{-\frac{z}{H}}$

$$-K\Delta T = P_0 e^{-\frac{z}{H}}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{P_0}{K} e^{-\frac{z}{H}}$$

On cherche une solution sous la forme $T(x,z) = T_1\cos(kx)e^{-kz} + \beta(z) + T_S$

$\beta(z)$ s'identifie à la solution étudiée au I.B : elle vérifie

$$\beta''(z) = -\frac{P_0}{K} e^{-\frac{z}{H}}$$

Au final, $T(x,z) = T_1\cos kx\, e^{-kz} + \frac{j_m}{K} z + \frac{H^2 P_0}{K}\left(1 - e^{-\frac{z}{H}}\right) + T_S$

17) $T(x, z=h) = T(x,z=0) + h\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0}$

$$\Rightarrow T(x,z=0) = T(x,z=h) - h\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0}$$

En surface on a $j_S = -K\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0}$

d'où $T(x,z=0) = T(x,z=h) + \frac{j_S}{K}h$

$$= T_S + \frac{j_S}{K}h_0\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$= \Theta_0 + \beta z + \underbrace{\frac{j_S h_0}{K}}_{T_1}\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$T(x,z) = \Theta_0 + \underbrace{\left(\beta + \frac{j_m}{K}\right)}_{C_1} z + \underbrace{\frac{H^2 P_0}{K}\left(1 - e^{-z/H}\right)}_{C_2} + \underbrace{\frac{j_S}{K}h_0\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)}_{C_3} e^{-kz} \qquad k = \frac{1}{\delta} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

Rem : l'ajout de βz ne perturbe pas car sa dérivée seconde est nulle.

A. Chauffage de l'eau

1) La transformat° étant adiabatique pour le système fermé {cuiseur + eau}, il n'y a pas de pertes : la puissance délivrée par la résistance ne sert qu'à chauffer le cuiseur (de $T_0 \to T_{eb}$). En appliquant le 1er principe de la thermod., il vient

$$\underbrace{(m_c + m_0) \times c \times (T_{eb} - T_0)}_{\Delta U} = Q = P\Delta t_1$$

donc
$$\boxed{\Delta t_1 = \frac{(m_c + m_0)\, c\, (T_{eb} - T_0)}{P}}$$

2)
$$\boxed{m_c = \frac{P\,\Delta t_1}{c\,(T_{eb} - T_0)} - m_0 = 32\,g}$$

représente la masse équivalente du cuiseur en eau.

$T_{eb} = 100°C = 373\,K$; $T_0 = 20°C$
$\Delta t_1 = \Delta t_0 = 150\,s$
$P = 350\,W$. $c = 4180\ J.kg^{-1}.K^{-1}$
$m_0 = 0{,}120\ kg$ ($V = 120\ mL$, $m_0 \simeq 120\,g$)

B. Détermination de la durée de cuisson Δt_2

1) Mécanisme de la cuisson des œufs

La pique au fond du gobelet permet d'éviter la rupture de la coquille.
L'explication est la suivante :

La raison de l'existence de la pique n'est malheureusement pas à chercher dans l'énoncé, qui omet de citer dans la description de l'œuf la présence d'une poche d'air : sous l'effet de la chaleur lors de la cuisson, elle tend à se dilater à volume constant, la coquille étant indéformable, ce qui entraîne une augmentation de pression qui peut conduire à la rupture de la coquille. La pique sert à percer la coquille au niveau de la poche à air, pour permettre à celle-ci de se vider au fur et à mesure de l'augmentation de température.

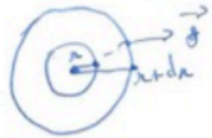
Pour une illustration :
`http://www.arte.tv/magazine/karambolage/fr/lobjet-le-eierpieker-karambolage`
et aussi (avec la présentation d'un autre dispositif)
`http://www.arte.tv/magazine/karambolage/fr/lobjet-le-toqueur-oeuf-061912-000`

En l'absence d'indication de la présence d'une poche d'air, l'énoncé pourrait laisser supposer qu'il s'agit d'un problème de vaporisation de l'eau contenue dans l'œuf, mais comme la cuisson à lieu à 100 °C, la pression de la vapeur formée est de 1 bar, et ne peut donc pas causer la rupture de la coquille.

B-2) Modélisation et établissement de l'équation de la chaleur

a) Dépendance de la température : par symétrie sphérique (invariance selon θ, φ),

$T(r, \theta, \varphi, t) = T(r, t)$ donc $\vec{j} = -\lambda\, \overrightarrow{grad}\, T = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial r} \vec{u_r}$
$\vec{j} = j_r(r,t)\, \vec{u_r}$



Exploitons le 1er principe de la thermod. pour réaliser un bilan d'énergie :

$$dU = \delta Q + \underbrace{\delta W}_{0} = \delta Q$$

(coquille de rayon r et d'épaisseur dr)

$\to$ $dU = dm\, c\, dT = \rho c\, dV \dfrac{\partial T}{\partial t} dt$ avec $dV = 4\pi r^2 dr$

$\to$ $\delta Q = -\phi(r + dr)\, dt + \phi(r)\, dt = -\dfrac{\partial \phi}{\partial r} dr\, dt$ $\to$ flux conductif

($\phi(r+dr)$: flux sortant ; $\phi(r)$: flux entrant)

avec $\phi = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = \iint_S \vec{j} \cdot dS = j \iint dS = j\, 4\pi r^2$

($j(r)$ uniforme sur une sphère de rayon r)

donc $\rho c \times 4\pi r^2 dr \dfrac{\partial T}{\partial t} dt = -\dfrac{\partial (4\pi r^2 j)}{\partial r} dr\, dt$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} r^2 = -\frac{\partial (j r^2)}{\partial r} = +\lambda \frac{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial r} r^2\right)}{\partial r}$$

$$\boxed{\frac{\lambda}{\rho c} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial T}{\partial r} r^2\right) = \frac{\partial T}{\partial t}}$$

b) On introduit les variables réduites :

$\rho = r/r_2 \to \dfrac{\partial}{\partial \rho} = r_2 \dfrac{\partial}{\partial r}$ et $\tau = t/\theta \to \dfrac{\partial}{\partial \tau} = \theta \dfrac{\partial}{\partial t}$

$$\frac{1}{\rho^2 r_2^2} \frac{\lambda}{\rho c} \times \frac{1}{r_2} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \times r_2 \rho^2\right) = \frac{1}{\theta} \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

$$\frac{\lambda \theta}{\rho c r_2^2} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial T}{\partial \rho}\right) = \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

Pour respecter l'homogénéité de l'équation pilote :

$$\frac{\delta\sigma}{\rho c R_2^2} = 1 \rightarrow \boxed{\delta = \frac{\rho c}{\sigma} R_2^2}$$

↳ distance caractéristique de la diff.

τ_{temps} caractéristique de la diffusion

On retrouve $\delta \propto R_2^2$ typique de la diffusion.

↳ la diff. n'est efficace qu'à faible distance

B. 3) Résolution de l'équation de la chaleur

$\Rightarrow T = T_{eb} + f(\rho) g(\tilde{\tau})$

a) Méthode de séparation des variables

en régime avec solution particulière T_{eb}

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = g \frac{df}{d\rho} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 g \frac{df}{d\rho}\right) = g \frac{d}{d\rho}\left(\rho^2 \frac{df}{d\rho}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tilde{\tau}} = f \frac{dg}{d\tilde{\tau}}$$

donc $$g \times \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho}\left(\rho^2 \frac{df}{d\rho}\right) = f \frac{dg}{d\tilde{\tau}}$$

donc $$\underbrace{\frac{1}{f\rho^2} \frac{d}{d\rho}\left(\rho^2 \frac{df}{d\rho}\right)}_{f^o \text{ de } \rho} = \underbrace{\frac{1}{g} \frac{dg}{d\tilde{\tau}}}_{f^o \text{ de } \tilde{\tau}}$$

Cette égalité doit être vraie $(\forall \rho, \tilde{\tau})$

La seule possibilité est $\frac{1}{g}\frac{dg}{d\tilde{\tau}} = \text{cste} = -A^2$

donc $\frac{dg}{d\tilde{\tau}} + A^2 g = 0 \rightarrow \boxed{g(\tilde{\tau}) = g(\tilde{\tau}=0)\, e^{-A^2 \tilde{\tau}}}$

Le signe $\ominus A$ permet d'exclure les solutions divergentes en $\tilde{\tau} \rightarrow +\infty$.

temporelles

b) Expression de la composante spatiale :

On pose $f(\rho) = \frac{F(\rho)}{\rho}$ (on fait $f(\rho) \propto \frac{1}{\rho}$ ce qui permettra d'avoir $\|\vec{j}\| \propto \frac{1}{R^2}$ densité de flux est sur surface sphère R^2)

$$\frac{df}{d\rho} = -\frac{F}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dF}{d\rho}$$

donc $$\frac{\rho}{F\rho^2} \frac{d}{d\rho}\left[\left(-\frac{F}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dF}{d\rho}\right)\rho^2\right] = \frac{1}{F\rho}\frac{d}{d\rho}\left(-F + \rho\frac{dF}{d\rho}\right)$$

$$= \frac{1}{F\rho}\left(-\frac{dF}{d\rho} + \frac{dF}{d\rho} + \rho\frac{d^2F}{d\rho^2}\right) = \frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\rho^2} = -A^2$$

donc $$\boxed{\frac{d^2F}{d\rho^2} + A^2 F = 0}$$

donc $F = \alpha \cos(A\rho) + \beta \sin(A\rho)$

Condit aux limites : $(\forall t)$ donc $(\forall \tilde{\tau}) \rightarrow T(r = R_2, t) = T_{eb}$ → par continuité de la T à la surface de l'sph en l'absence de flux conducto-convectif

donc $T(\rho = 1, t) = T_{eb}$

donc $f(\rho = 1) = 0$ et $F(\rho = 1) = 0$

↳ cette hypothèse est discutable car il existe un flux cc.

$$f = \frac{\alpha}{\rho}\cos A\rho + \frac{\beta}{\rho}\sin A\rho$$

Si $\rho \rightarrow 0$ en centre de l'sph $\frac{\cos A\rho}{\rho} \rightarrow +\infty$ non acceptable

alors que $\lim_{\rho \to 0}\left(\frac{\sin A\rho}{\rho}\right) = \lim_{\rho \to 0}\left(\frac{A\rho}{\rho}\right) = A$ valeur finie

DL $\rightarrow \sin A\rho \underset{\rho \to 0}{=} A\rho$

donc $\boxed{\alpha = 0}$ et $\boxed{f = \frac{\beta}{\rho}\sin A\rho}$

c) L'équation de diffusion étant linéaire, on peut utiliser une combinaison linéaire des solut $f(\rho)\,g(\tau)$ pour construire la solution générale. T_{eb} est introduite pour satisfaire les condit aux limites.

Les valeurs de A seront quantifiées : valeurs discrètes A_i car les modes propres de la solution sont imposés par les condit aux limites.

Ainsi → $\boxed{T(\rho,\tau) = T_{eb} + \sum_i \left(\beta_i \frac{\sin(A_i \rho)}{\rho} e^{-A_i^2 \tau} \right)}$

Condit aux limites vérifiées par la solut générale :

- continuité de T à la surface de l'scif en $\rho = 1 \to r_1 = r_2$
- continuité du flux thermique à la surface de l'scif
- condit initiale en $\tau = 0$ traduisant le profil initial température de l'scif à $t = 0$.

(AT)

B-4) Détermination des constantes dans l'approximation de Fourier : $T \simeq T_{eb} + \beta \frac{\sin A\rho}{\rho} e^{-A^2\tau}$ ↳ 1 seul terme A_i conservé

a) Par continuité du flux thermique à la surface :

$\iint_{S=r_2} \vec{j}_{cc}(\rho=1).\vec{dS} = \iint_{S=r_2} \vec{j}_c$ entrant $(\rho=1).\vec{dS}$

↑ conduct. convectif ↑ conductif.

→ $\vec{j}_{cc} = h\beta \sin A\, e^{-A^2\tau}\, \vec{u_r}$ pour $\rho = 1$

$= j_{cc}\, \vec{u_r}$

$\phi_{cc} = -j_{cc} \cdot S$ car j_{cc} uniforme à la surface de l'scif ↳ $4\pi r_2^2$ et $\vec{S} = S\vec{u_r}$ (entrant) ↳ $r = r_2$

→ $\vec{j_c} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\vec{u_r} = -\frac{\lambda}{r_2}\beta\, e^{-A^2\tau} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\sin A\rho}{\rho}\right)\vec{u_r}$

$= -\frac{\lambda\beta}{r_2} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\sin A\rho}{\rho}\right) e^{-A^2\tau}\, \vec{u_r}$

en $r = r_2 \to \rho = 1$:

$\vec{j_c} = -\frac{\lambda\beta}{r_2}\left(-\frac{\sin A\rho}{\rho^2} + \frac{A\cos A\rho}{\rho}\right) e^{-A^2\tau}\vec{u_r}$

$= -\frac{\lambda\beta}{r_2}\left(-\sin A + A\cos A\right) e^{-A^2\tau}\vec{u_r}$

$= j_c\, \vec{u_r}$

$\phi_c = -j_c \cdot S$ car j_c uniforme à la surface de l'scif.

donc l'égalité des flux conduit après simplification par $e^{-A^2\tau}$; β ; S

$h \sin A = -\frac{1}{r_2}\left(-\sin A + A\cos A\right)$

$\left(h - \frac{1}{r_2}\right)\sin A = -\frac{A}{r_2}\cos A$

$\left(\frac{h r_2}{\lambda} - 1\right)\sin A = -A\cos A$

$\boxed{\tan A = \frac{A}{1 - \frac{r_2 h}{\lambda}}}$

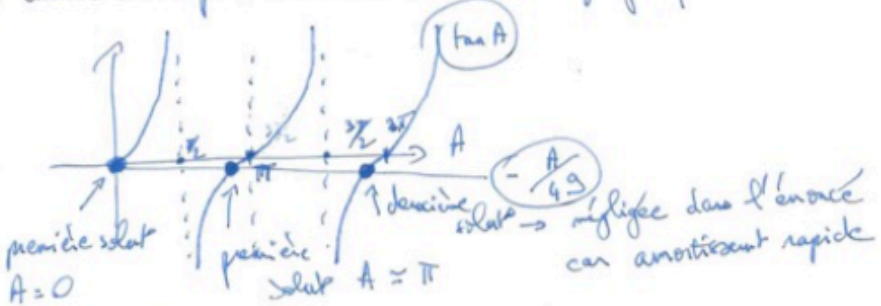
b) $r_2 = 4{,}5$ cm → $\frac{r_2 h}{\lambda} = \frac{2{,}5\times10^{-2}\times 1{,}2\times10^{3}}{0{,}6} = 50$

$\tan A = -\frac{A}{49} \ll 1 \to \tan A \simeq 0$

donc $A \simeq \pi$

On peut donc prendre $A \simeq \pi$ comme première solut correcte.

Rqe) : l'énoncé aurait pu demander une solut graphique



Plus le coef. directeur $\frac{1}{1-\frac{n_i h}{\lambda}}$ est petit avec $\frac{n_i h}{\lambda}$ grd, plus les solut st proches de $A_i = n_i \pi$

La calculette permet de trouver directement l'erreur avec la fe solve → $A = 3{,}079$ rd → $\boxed{\text{erreur de } 0{,}063 \text{ rd}}$

Sinon DL avec $A = \pi - \varepsilon$ et $\varepsilon \ll 1$ alors $\tan A = \tan(\pi - \varepsilon) \simeq -\varepsilon$

et $-\frac{A}{49} \simeq -\pi/49$ → $-\varepsilon = -\pi/49$

$$\boxed{\varepsilon = \pi/49 = 0{,}064 \text{ rd}}$$

c) Cette solut convient à la continuité de la Température

$f(\rho = 1) = 0 \rightarrow \beta \sin A = \beta \sin \pi = 0$

La température de l'oeuf st égale à la température ext. de la vapeur d'eau Teb en dehors de la couche limite ce qui correspond au cas limite $h \rightarrow +\infty$

(normalement il y a une diff. entre la température de surface et la température du milieu ambiant qui ↓ lorsque h ↑ avec l'efficacité de la convection)

d) au centre de l'oeuf en $t = 0$; on a $T(r=0, t=0) = T_0$

donc $T(r=0,t=0) = T(\rho=0,t=0) = T_0 = \beta \lim_{\rho \to 0} \left(\sin \frac{A\rho}{\rho}\right) + T_{eb}$

$= \beta A + T_{eb} \simeq \beta \pi + T_{eb}$

$$\boxed{\beta = \frac{T_0 - T_{eb}}{\pi}}$$

D'où pour le mode $n_i = 1$, le profil approché de température :

$$\boxed{T(\rho, \tau) = T_{eb} - (T_{eb} - T_0) \frac{\sin(\pi\rho)}{\pi\rho} e^{-\pi^2 \tau}}$$

↳ la T ↓ qd on pénètre à l'intérieur de l'oeuf

B.5) Calcul de la durée de cuisson pour 1 oeuf dur

a) Pour avoir un oeuf dur, la température au centre doit atteindre T_c ($r = 0$ ou $\rho = 0$)

Soit $T_c = T(r=0, t = \Delta t_r)$

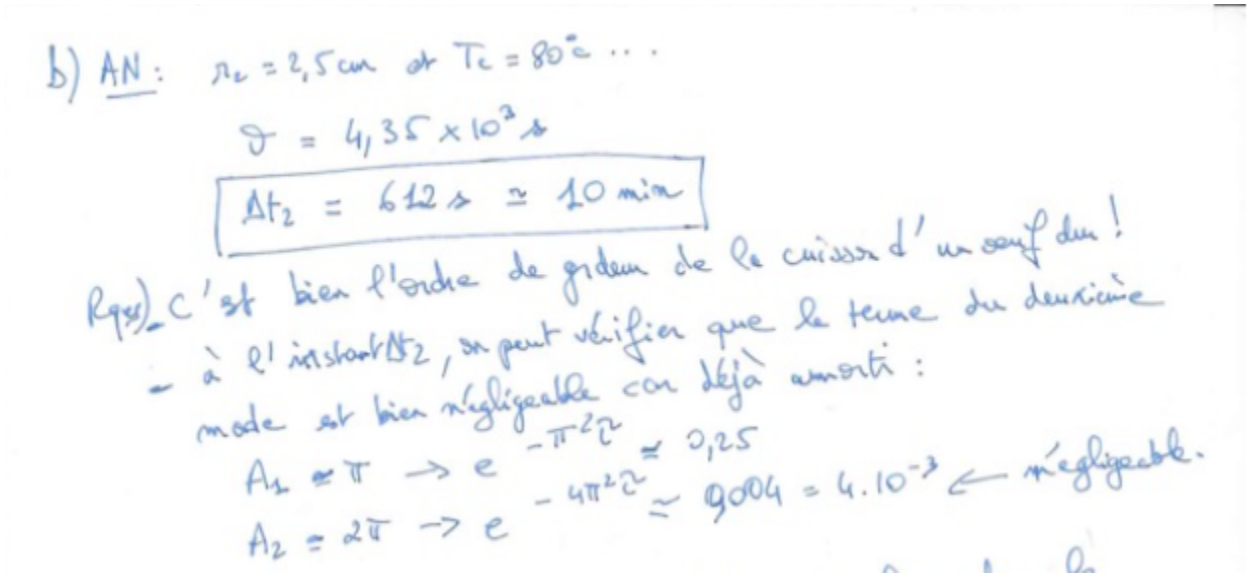
$= T\left(\rho = 0, \tau = \frac{\Delta t_r}{\theta}\right)$

$T_c = T_{eb} - (T_{eb} - T_0) \frac{\cancel{\pi\rho}}{\cancel{\pi\rho}} e^{-\pi^2 \tau}$

$-\pi^2 \tau = \ln\left(\frac{T_{eb} - T_c}{T_{eb} - T_0}\right)$

$-\pi^2 \frac{\Delta t_r}{\theta} = \ln \frac{T_{eb} - T_c}{T_{eb} - T_0}$

$$\boxed{\Delta t_r = \frac{\theta}{\pi^2} \ln\left(\frac{T_{eb} - T_0}{T_{eb} - T_c}\right) \quad \text{et } \theta = \frac{\mu c r_2^2}{\lambda}}$$



Le problème possède encore une petite suite !! voir sujet original