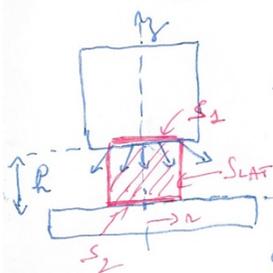


### 1. Calcul du débit

$$\vec{v} = v_0 \frac{z}{2h} \vec{u}_r - v_0 \frac{z}{h} \vec{e}_z$$



1. Vitesse normale nulle en  $z=0$  (paroi immobile)  
 $\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{e}_z (z=0) = 0$  respectée par le champ proposé  
 (ici fluide non visqueux sinon composante radiale nulle)

2. Écoulement incompressible  $\Leftrightarrow \text{div } \vec{v} = 0$   
 $\text{div } \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(vr)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{v_0}{h} - \frac{v_0}{h} = 0$

3. Pour un champ dont la divergence est nulle, son flux total est nul (div  $\Rightarrow$  flux) à travers une surface fermée!

Flux entrant en  $z=h \Rightarrow D_{V, \text{entrant}} = \iint_{S_1} \vec{v} \cdot d\vec{S}_1$  avec  $d\vec{S}_1 = dz_1 \vec{e}_z$

$$D_{V, \text{entrant}} = \iint_{S_1} \vec{v} \cdot d\vec{S}_1 (-\vec{e}_z) \leftarrow d\vec{S}_1 \text{ orientée dans le sens entrant avec } z=h \text{ sur } S_1$$

$$= \iint_{S_1} v_0 \frac{h}{h} dS_1$$

$$= v_0 S_1 = \boxed{v_0 \pi r^2}$$

pas de flux pour la surface  $S_2$  ! (car  $\vec{v}$  y est  $\perp$  à  $d\vec{S}_2$ )

$$D_{V, \text{sortant}} = \iint_{S_{\text{LAT}}} \vec{v} \cdot d\vec{S}_{\text{LAT}} \text{ avec } d\vec{S}_{\text{LAT}} = 2\pi r dz \vec{u}_r$$

La composante selon  $\vec{u}_z$  de  $\vec{v}$  n'intervient pas dans ce calcul.

$$D_{V, \text{sortant}} = \int_{z=0}^{z=h} v_0 \frac{z}{2h} \vec{u}_r \times 2\pi r dz \vec{u}_r$$

$$= v_0 \pi r^2 \frac{h}{h} = \boxed{v_0 \pi r^2}$$

$D_{V, \text{entrant}} = D_{V, \text{sortant}} \Rightarrow$  le flux de  $\vec{v}$  est conservatif.

### Ex 1 : Calcul de débit en régime stationnaire

a)  $Dv = v \cdot S \Rightarrow \boxed{v} = \frac{Dv}{S} = \frac{6 \times 10^{-3}}{60 \times 10^{-4}} = \frac{1}{10} \text{ m.s}^{-1} = \boxed{0,3 \text{ m.s}^{-1}}$

b) Écoulement incompressible homogène  $\Rightarrow \text{div } \vec{v} = 0 \Rightarrow Dv$  se conserve

$$Dv = Na \cdot Dv_a \rightarrow \boxed{Na} = \frac{Dv}{Dv_a} = \frac{6 \times 10^{-3}}{60 \times 10^{-6}} = \frac{1}{10} \cdot 10^3 = \boxed{50}$$

c) Conservation de débit  $\rightarrow Dv_a = Na' Dv_a' = Na' v_a' S_a'$

$$\boxed{Na'} = \frac{Dv_a}{v_a' S_a'} = 1,6 \times 10^7$$

$$d) \boxed{Re} = \frac{\rho L v_a'}{\eta} = \frac{2 \rho a a' v_a'}{\eta} = \boxed{4 \cdot 10^{-2}} \quad Re < 1 \text{ régime laminaire}$$

### Exercice 3 : Écoulement de Couette cylindrique

1. Le mouvement de rotation des cylindres est uniforme et donc invariant par rotation autour de l'axe (Oz). Il en est de même pour leur forme géométrique. Or en régime stationnaire, l'écoulement est entièrement imposé par les cylindres par le biais de la viscosité du fluide. En effet, la quantité de mouvement a eu le temps de diffuser dans tout le volume du fluide. Le principe de Curie (voir chapitre 12) permet alors d'affirmer que le champ des vitesses est indépendant de  $\theta$  en régime stationnaire.



#### Conseils méthodologiques

Plus précisément, s'agissant d'un phénomène diffusif caractérisé par un coefficient de diffusion  $\nu = \eta/\rho$  (viscosité cinématique, voir chapitre 10) et se produisant sur une distance caractéristique  $R_2 - R_1$ , la durée typique  $\tau$  du régime transitoire est donnée par :

$$R_2 - R_1 = \sqrt{\nu \tau} \quad \text{d'où} \quad \tau = \frac{(R_2 - R_1)^2}{\nu}$$

### Remarque

L'absence de dépendance en  $z$  revient par ailleurs à négliger les effets de bord, ce qui est légitime si les cylindres sont suffisamment longs par rapport à  $R_1$  et  $R_2$  et si l'on se place à distance de leurs extrémités.

2. Le modèle de l'écoulement incompressible convient à l'écoulement des fluides peu compressibles que sont les liquides ainsi qu'à l'écoulement des fluides compressibles, à condition qu'ils soient de vitesses faibles devant la vitesse du son dans le fluide considéré.

3. ▶ Traduisons le caractère incompressible de l'écoulement en utilisant le formulaire fourni :

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(v_z)}{\partial z}.$$

Avec  $v_z = 0$  et  $v_\theta$  ne dépendant que de  $r$ , la relation précédente se simplifie en :

$$0 = \frac{1}{r} \frac{d(r v_r)}{dr} \quad \text{soit} \quad r v_r = A \quad \text{avec } A \text{ constante.}$$

▶ Écrivons les conditions aux limites sur les cylindres : s'agissant de parois indéformables, le fluide ne pénètre pas au-delà de  $r = R_2$  et ne rentre pas non plus en deçà de  $r = R_1$ . De façon équivalente, le débit volumique élémentaire à travers tout élément de surface s'appuyant sur l'un des cylindres est nul. Il en résulte que la composante normale du champ des vitesses s'y annule, soit :

$$v_r(R_1) = v_r(R_2) = 0.$$

▶ On en déduit que  $A/R_1 = A/R_2 = 0$ , soit  $A = 0$ . Ainsi,  $v_r = 0$  : le champ des vitesses est purement orthoradial.

4. ▶ Le cylindre  $i$  ( $i = 1, 2$ ) étant en rotation à vitesse angulaire  $\Omega_i$ , la vitesse d'un point quelconque du cylindre est  $v_i = R_i \Omega_i$ . Puisque le fluide « accroche » aux cylindres, la vitesse d'un élément du fluide au contact d'un point du cylindre coïncide avec celle de ce point, soit :

$$\begin{cases} v_\theta(R_1) = \alpha R_1 + \beta/R_1 = R_1 \Omega_1 \\ v_\theta(R_2) = \alpha R_2 + \beta/R_2 = R_2 \Omega_2 \end{cases}.$$



### Attention !

Notons que les constantes  $\alpha$  et  $\beta$ , qui sont les inconnues de ce système de deux équations, sont dimensionnées :  $\alpha$  est homogène à une vitesse angulaire ( $s^{-1}$ ) et  $\beta$  à une longueur au carré sur un temps. Vérifier (au brouillon) sur le résultat final que  $\alpha$  et  $\beta$  ont la bonne dimension permettra d'éviter tout résultat grossièrement faux car inhomogène.

▶ Les combinaisons linéaires  $R_1(4.) - R_2(4.)$  et  $R_2(4.) - R_1(4.)$  fournissent respectivement :

$$\alpha = \frac{R_2^2 \Omega_2 - R_1^2 \Omega_1}{R_2^2 - R_1^2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{(R_1 R_2)^2 (\Omega_1 - \Omega_2)}{R_2^2 - R_1^2}.$$

5. ▶ Si les deux cylindres tournent à la même vitesse angulaire, les expressions de  $\alpha$  et  $\beta$  se simplifient en :

$$\alpha = \Omega \quad \text{et} \quad \beta = 0.$$

Le champ des vitesses est donc :

$$\vec{v} = r \Omega \vec{u}_\theta.$$

▶ On reconnaît le champ des vitesses d'un solide en rotation à vitesse angulaire  $\Omega$  autour de l'axe ( $Oz$ ) : on parle de « rotation solide ».

### Remarque

Remarquons que l'écoulement est alors tourbillonnaire, de vecteur-tourbillon  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$ , soit  $\operatorname{rot} \vec{v} = 2 \vec{\Omega}$ .

6. ▶ Dans le cas où  $\Omega_2 = 0$ , les expressions de  $\alpha$  et  $\beta$  deviennent :

$$\alpha = \frac{-R_1^2 \Omega_1}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{\Omega_1}{1 - (R_2/R_1)^2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{(R_1 R_2)^2 \Omega_1}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{R_2^2 \Omega_1}{(R_2/R_1)^2 - 1}.$$

▶ En faisant enfin tendre mathématiquement  $R_2$  vers l'infini, c'est-à-dire en considérant physiquement que  $R_2/R_1 \gg 1$ , il vient :

$$\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \beta = R_1^2 \Omega_1 \quad \text{d'où} \quad \vec{v} = \frac{R_1}{r} R_1 \Omega_1 \vec{u}_\theta.$$

▶ On constate que le cylindre intérieur entraîne le fluide, de telle sorte que la vitesse du fluide coïncide avec celle du cylindre en  $r = R_1$  (effet des conditions aux limites visqueuses étudiées au chapitre 10). Cependant, l'efficacité de cet effet d'entraînement décroît avec la distance à l'axe. En particulier, à l'infini, le fluide n'est pas affecté.

## Exercice 5 - Ecoulement sous des skis (oral CCINP)

1. En négligeant les effets de bord, c'est-à-dire en supposant les skis quasi-infinis (ce qui est légitime puisque  $L$  et  $\ell$  sont grands devant  $e$ ) et en ne regardant pas trop près des extrémités, l'écoulement en régime stationnaire est l'écoulement de Couette plan décrit dans l'exercice 1. Il en résulte que :

$$v(z) = \frac{z}{e} V.$$

2. La planche est soumise :

- à son poids (vertical) ;
- aux forces de pression (normales à la planche donc verticales) de résultante  $\vec{F}_p$  ;
- aux forces de viscosité (tangentes donc horizontales) dues à l'eau liquide de résultante  $\vec{F}_v$ .

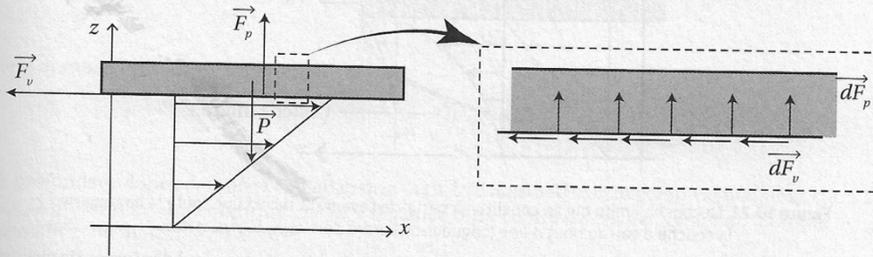


Figure 10.20. Bilan des forces appliquées au skieur.

La loi de la quantité de mouvement appliquée à la planche de masse  $m$  dans le référentiel de la piste s'écrit :

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = m \vec{g} + \vec{F}_p + \vec{F}_v.$$

Projetons cette loi sur l'horizontale :

$$m \frac{dV}{dt} = F_v.$$

Il en résulte qu'effectivement, sous l'effet de la viscosité de l'eau liquide sur laquelle elle glisse (la viscosité de l'air étant négligeable devant celle de l'eau, on peut négliger la contribution des forces de viscosité dues à l'air), la vitesse de la planche varie.

Cherchons la résultante des forces de viscosité s'appliquant sur la surface de contact eau-planche notée  $S$ . D'après l'approche mésoscopique de la viscosité, sur chaque élément de surface  $dS$  de cette surface, le fluide exerce une force :

$$dF_v = -\eta \frac{dv}{dz} dS = -\eta \frac{V}{e} dS,$$

où le signe « - » est dû au principe des actions réciproques.

La résultante des forces de viscosité est la somme des forces s'appliquant sur tous les éléments de surface constituant la surface de contact, soit :

$$F_v = \iint_{(S)} -\eta \frac{V}{e} dS = -\eta \frac{V}{e} \iint_{(S)} dS = -\eta \frac{V}{e} L\ell.$$

En définitive, la loi de la quantité de mouvement appliquée à la planche donne :

$$m \frac{dV}{dt} = -\eta \frac{V}{e} L\ell \quad \text{soit} \quad \frac{dV}{dt} + \frac{V}{\tau} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{me}{\eta L\ell} = 2 \text{ s.}$$

3. Ce temps caractéristique des variations de  $V(t)$  est à comparer au temps de diffusion de la quantité de mouvement  $\tau_d$  qui représente la durée typique de mise en mouvement de l'ensemble de la couche d'épaisseur  $e$  par le skieur. D'après l'étude conduite à l'exercice 1, on peut écrire :

$$\tau_d = \frac{e^2 \rho}{\eta} = 25 \mu\text{s}.$$

Ainsi, le profil des vitesses linéaire de type Couette plan s'adapte très rapidement aux évolutions de  $V(t)$ . De surcroît, le temps de passage du skieur en un point donné est de l'ordre de  $\tau_p = L/V \approx 0,4 \text{ s} \gg \tau_d$ . Ainsi, seul un petit bout de ski situé à l'avant sert à constituer le champ des vitesses : pour la plus grande partie du ski, le profil des vitesses de Couette plan est déjà constitué.

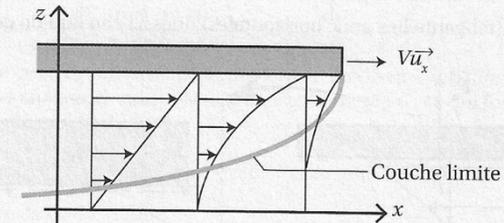


Figure 10.21. La couche limite qui se constitue à partir de l'avant du ski occupe toute la hauteur de la couche d'eau au bout d'une longueur de l'ordre de  $V\tau_d = Ve^2\rho/\eta \ll L$ .

Il est donc légitime de supposer que le régime stationnaire est établi pour le calcul des forces de viscosité.

4. Le skieur reçoit de la part du fluide une puissance des forces de viscosité :

$$\mathcal{P} = \vec{F}_v \cdot \vec{V} = -F_v V = -\frac{\eta L\ell}{e} V^2.$$

Le fluide reçoit donc une puissance opposée :

$$-\mathcal{P} = \frac{\eta L\ell}{e} V^2.$$

La puissance dissipée par viscosité est suffisante pour liquéfier la glace si lorsque le skieur avance de  $dx = V dt$  pendant une durée  $dt$ , l'énergie dissipée (soit  $-\mathcal{P} dt$ ) est suffisante pour liquéfier la couche de glace correspondante de volume  $\delta V = e\ell dx$ .

D'après le premier principe enthalpique,  $dH = \delta Q$ . Ainsi, la condition de liquéfaction de la glace s'écrit :

$$\delta Q \geq dH_{\text{fusion}} = \rho \delta V \ell_{\text{fus}} \quad \text{soit} \quad \frac{\eta L\ell}{e} V \underbrace{V dt}_{=dx} \geq \rho e\ell dx \ell_{\text{fus}} \quad \text{soit} \quad V \geq \frac{\rho e^2 \ell_{\text{fus}}}{\eta L} = 4 \text{ m.s}^{-1},$$

ce qui valide le fait que pour  $V = 5 \text{ m.s}^{-1}$ , on suppose la couche liquide.

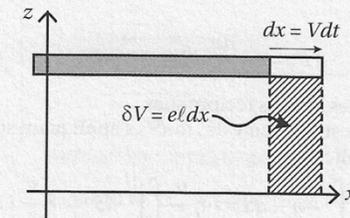


Figure 10.22. Le volume hachuré est le volume à liquéfier lorsque le ski avance de  $dx = V dt$ .

Ex 1: Critique de l'atmosphère isotherme en équilibre

1) a) Eq. gp  $\rightarrow P V = n R T_0 \rightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{n M_e}{V} = \frac{P M_e}{R T_0}$

b) Stat. de fluides  $\vec{v}_z$  vers le haut  $\rightarrow \frac{dP}{dz} = -\rho g = -\frac{P M_e}{R T_0}$

$P(z) = A e^{-\frac{M_e g z}{R T_0}}$  avec  $P(0) = P_0$

$P(z) = P_0 e^{-\frac{z}{H}}$   $H = \frac{R T_0}{M_e g}$

c)  $M_e = 0,8 \times 28 + 0,2 \times 32 = 28,8 \text{ g. mol}^{-1} \rightarrow H = 8,5 \text{ km}$

$P(z) = \frac{P_0}{2} \rightarrow P_0 e^{-\frac{z_{50\%}}{H}} = \frac{P_0}{2}$

$z_{50\%}^{\text{iso}} = H \ln 2 = 5,9 \text{ km}$

$\hookrightarrow$  les ordres de grandeur sont corrects  
même si le modèle est simple.

2) a) loi de stat.  $\rightarrow \frac{dP}{dz} = -\frac{P M_e g}{R T} = -\frac{P M_e g}{R T_0 (1 - \alpha z)}$

$\frac{dP}{P} = -\frac{M_e g}{R T_0} \frac{1}{1 - \alpha z}$

$\ln P = \frac{M_e g}{\alpha R T_0} \ln(1 - \alpha z) + C$

avec  $P(0) = P_0 \rightarrow \ln\left(\frac{P(z)}{P_0}\right) = \frac{M_e g}{\alpha R T_0} \ln(1 - \alpha z)$

$\frac{P(z)}{P_0} = (1 - \alpha z)^{\frac{M_e g}{\alpha R T_0}} = (1 - \alpha z)^\beta$

$\beta = \frac{M_e g}{\alpha R T_0} = \frac{1}{H \alpha} = \frac{z_0}{H}$

donc  $\rho(z) = \frac{P(z) M_e}{R T(z)} = \frac{P_0 M_e}{R T_0} (1 - \alpha z)^{\beta-1}$

$\rho(z) = \rho_0 (1 - \alpha z)^{\beta-1}$

b) Il faut résoudre  $(1 - \alpha z_{50\%}^{\text{pol}})^\beta = \frac{1}{2}$

$\beta \ln(1 - \alpha z_{50\%}^{\text{pol}}) = -\ln 2$

$1 - \alpha z_{50\%}^{\text{pol}} = 2^{-\frac{1}{\beta}}$

$z_{50\%}^{\text{pol}} = z_0 (1 - 2^{-\frac{1}{\beta}}) = 5,4 \text{ km}$

$\hookrightarrow$  valeur proche du modèle isotherme  
mais inférieure  $\rightarrow$  la T  $\downarrow$  qd  $z \uparrow$   
donc agitation thermique + faible

$\hookrightarrow$  modèle isotherme surevalue l'agitation  
thermique et la pression à hte altitude.

c) La T varie linéairement avec l'altitude comme dans la  
modélisation proposée.  $T(\text{sol}) = 288,14 \text{ K} \rightarrow \approx T_0 = 288 \text{ K}$ .

$\rightarrow z_0 = \frac{288,14}{6,94} = 41,5 \text{ km} \rightarrow$  donc 33 km étonnant.

$\begin{cases} T = T_0 (1 - \alpha z) \\ T = 288,14 - 6,94 z \end{cases}$

$\rho = 1,01 \text{ kg/m}^3 \rightarrow \beta = 5,26$  à comparer à  $\beta = \frac{z_0}{H} = \frac{41,5}{8,5} = 4,9$

donc compatibilité avec modèle

polytropique ( $\beta = 4,9$   
au lieu de 5,2)

Rge) Altitude pour  $\frac{\rho_0}{2}$   $\rightarrow$  5,5 km  $\approx z_{50\%}^{\text{pol}} = 5,4 \text{ km}$