Phénomènes de transport – bloc 4 – Fluides en écoulement

Rappel du programme : Objectifs généraux de la formation

L'objectif de la partie « **Fluides en écoulement** » est d'introduire les grandeurs pertinentes caractérisant un écoulement, en cohérence avec les autres phénomènes de transport. L'expression de l'accélération comme la dérivée particulaire de la vitesse est abordée mais les équations d'Euler ou de Navier-Stokes ne sont pas au programme.
La notion de viscosité est introduite sur un exemple d'écoulement de cisaillement simple. Le nombre de Reynolds est présenté comme le rapport de deux temps caractéristiques construits par analyse dimensionnelle. Il est exploité afin d'évoquer les propriétés de similitude entre des systèmes réalisés à des échelles différentes et caractérisés par les mêmes nombres sans dimension.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.4. Fluides en écoulement	
2.4.1. Débits et lois de conservation	
Particule de fluide. Champ eulérien des vitesses.	Définir la particule de fluide comme un système mésoscopique de masse constante. Distinguer vitesse microscopique et vitesse mésoscopique. Définir une ligne de courant, un tube de courant.
Dérivée particulaire du vecteur vitesse : terme local ; terme convectif.	Associer la dérivée particulaire du vecteur vitesse à l'accélération de la particule de fluide qui passe en un point. Citer et utiliser l'expression de l'accélération avec le terme convectif sous la forme (**v.grad**) **v**.
Masse volumique μ.	Citer des ordres de grandeur des masses volumiques de l'eau et de l'air dans les conditions usuelles.
Débit massique.	Définir le débit massique et l'écrire comme le flux du vecteur μ**v** à travers une surface orientée.
Conservation de la masse.	Énoncer l'équation locale traduisant la conservation de la masse.
Écoulement stationnaire. Débit volumique.	Exploiter la conservation du débit massique le long d'un tube de courant. Définir le débit volumique et l'écrire comme le flux de **v** à travers une surface orientée.
Écoulement incompressible et homogène.	Définir un écoulement incompressible et homogène par un champ de masse volumique constant et uniforme et relier cette propriété à la conservation du volume pour un système fermé. Exploiter la conservation du débit volumique le long d'un tube de courant indéformable.
2.4.2. Actions de contact sur un fluide	
Pression.	Identifier la force de pression comme étant une action normale à la surface. Utiliser l'équivalent volumique des actions de pression - **grad** P.
Éléments de statique des fluides.	Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans les cas d'un fluide incompressible et de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait.
Viscosité dynamique.	Relier l'expression de la force surfacique de viscosité au profil de vitesse dans le cas d'un écoulement parallèle. Citer l'ordre de grandeur de la viscosité de l'eau. Exploiter la condition d'adhérence à l'interface fluide-solide.
2.4.3. Écoulement interne incompressible et homogène dans une conduite cylindrique	
Écoulements laminaire, turbulent. Vitesse débitante.	Décrire les différents régimes d'écoulement (laminaire et turbulent). Relier le débit volumique à la vitesse débitante.
Nombre de Reynolds.	Décrire qualitativement les deux modes de transfert de quantité de mouvement : convection et diffusion. Interpréter le nombre de Reynolds comme le rapport d'un temps caractéristique de diffusion de quantité de mouvement sur un temps caractéristique de convection. Évaluer le nombre de Reynolds et l'utiliser pour caractériser le régime d'écoulement.
Chute de pression dans une conduite horizontale. Résistance hydraulique.	Dans le cas d'un écoulement à bas nombre de Reynolds, établir la loi de Hagen-Poiseuille et en déduire la résistance hydraulique. Exploiter le graphe de la chute de pression en fonction du nombre de Reynolds, pour un régime d'écoulement quelconque. Exploiter un paramétrage adimensionné permettant de transposer des résultats expérimentaux ou numériques sur des systèmes similaires réalisés à des échelles différentes.
2.4.4. Écoulement externe incompressible et homogène autour d'un obstacle	
Force de traînée subie par une sphère solide en mouvement rectiligne uniforme. Coefficient de traînée C_x ; graphe de C_x en fonction du nombre de Reynolds.	Associer une gamme de nombre de Reynolds à un modèle de traînée linéaire ou un modèle quadratique.
Notion de couche limite.	Pour les écoulements à grand nombre de Reynolds décrire qualitativement la notion de couche limite.
Forces de traînée et de portance d'une aile d'avion à haut Reynolds.	Définir et orienter les forces de portance et de traînée. Exploiter les graphes de C_x et C_z en fonction de l'angle d'incidence.

I. Débits et loi de conservation

1. Description d'un fluide en écoulement

1.1 Le modèle du fluide continu : la particule de fluide

Un **fluide** est un **milieu matériel** parfaitement **déformable**, contrairement aux solides indéformables. Globalement, il présente la propriété de se mettre très facilement en mouvement dès qu'une force est exercée, et dans ce chapitre, on s'intéressera particulièrement aux **écoulements de fluide**.
On distingue par exemple les **gaz** (et plasmas) **compressibles**, et les **liquides**, **peu compressible** (compressibilité légèrement inférieure à celle d'un solide).

➔ **Les échelles d'étude**

- ***échelle macroscopique*** : sa **dimension typique L** est de l'ordre de la **dimension de l'écoulement** (cm, m…), le fluide y est décrit comme un milieu continu, mais elle ne permet pas d'étudier les détails d'un écoulement, notamment de décrire les champs de vitesse et de pression au sein du fluide.
- ***échelle microscopique*** : à cette échelle **inférieure à la distance moyenne entre particules -> libre parcours moyen lpm pour les fluides**, le fluide ne peut pas être décrit comme un milieu continu.
- ***échelle mésoscopique*** : à cette échelle intermédiaire, on décompose le milieu en **particules de fluide élémentaire**, de taille **a**. C'est la taille minimale satisfaisante pour adopter une **description continue du milieu**.

La condition **a >> lpm** (a/lpm = nombre de Knudsen) assure un **nombre suffisant de particules** pour établir un **équilibre thermodynamique local** (suffisamment de chocs). Pour chaque particule de fluide, centrée en M, on peut définir **localement** les **grandeurs thermodynamiques intensives** pression, température, masse volumique, et la **grandeur mécanique vitesse**, qui présentent des fluctuations négligeables autour de leurs valeurs moyennes.

La condition **a << L** permet de décrire l'évolution de ces grandeurs au sein du fluide : **champs de vitesse, pression, masse volumique**…

➔ **La particule de fluide dans l'approximation des milieux continus**

Compétence : définir la particule de fluide comme un système mésoscopique de masse constante

*Au sein d'un fluide, on définit une **particule de fluide** comme l'ensemble des particules contenues à un instant donné dans un volume, correspondant à l'échelle mésoscopique. Par définition, la **masse d'une particule de fluide** reste **constante** (système fermé).*

La taille caractéristique de cette particule est grande par rapport au lpm, puisque c'est un système mésoscopique. On y adopte donc une **description continue des variables intensives**, **fonction de de la position et du temps**.

Plus précisément, on choisit une particule de fluide, de volume dV, centrée en un point M à l'instant t, et on lui associe une **masse volumique $\boldsymbol{\mu(M,t)}$,** en kg.m^{-3} :

$\boxed{\boldsymbol{\mu(M,t)} = \frac{dm}{dV}}$ où dm représente la masse de la particule de fluide

Compétence : citer des ordres de grandeur des masse volumiques de l'eau et de l'air dans les conditions usuelles

Dans les conditions usuelles
$\mu(eau)$ = 1000 kg.m^{-3} = 1 g.mL^{-1}
$\mu(air)$ = 1,2 kg.m^{-3} = 1,2 g.L^{-1}

Remarque : la masse d'une particule de fluide est constante, mais son volume peut évoluer au cours du temps.

1.2 Vitesse de la particule de fluide dans le champ eulérien

Imaginons l'observation de l'écoulement d'une rivière : dans la **description eulérienne**, on place un **observateur en chaque point lié au référentiel fixe** : on peut imaginer un quadrillage de ponts au-dessus de la rivière pour placer ces observateurs. Pour visualiser l'écoulement, jetons alors des petits flotteurs en amont de des observateurs. Un observateur en un point fixe verra donc passer ces flotteurs « solidaires » du fluide, mais différentes à chaque instant, et déterminera la vitesse du fluide au cours du temps (à cet endroit).

Dans ce point de vue, le vecteur vitesse $\vec{v}(M,t)$ ne concerne donc pas la même particule au cours du temps, mais les différentes particules qui passent successivement au point M : c'est le **point de vue eulérien de description de la vitesse**. On ne suit plus les particules au cours de leurs mouvements comme dans une étude classique de mécanique du point.
On préfère mesurer la vitesse du vent en un point donné, sans connaître la provenance de la particule de fluide, point de vue lagrangien.

Remarque : cette approche se prête bien à la **traduction des conditions aux limites en des points fixes**.

A différents instants, on s'intéresse donc **localement** à la **vitesse d'une particule de fluide**, en un point M donné. Il faut réaliser la moyenne statistique des vitesses individuelles des N entités qui composent la particule de fluide, contenues dans le volume dV, centré en M, à t :

$$\boxed{\vec{v}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{t}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\sum_{i=1}^{N}\vec{v_i}}$$

Il s'agit d'une **description eulérienne** du fluide : on ne suit pas chaque particule le long de sa trajectoire pour définir la vitesse, mais **le mouvement du fluide** est **défini** par la **vitesse en un point donné M du milieu**, et **à un instant t**. On parle alors de **champ de vitesse eulérien** (de pression, etc).

Compétence : distinguer vitesse microscopique et vitesse mésoscopique

Alors que les vitesses microscopiques des particules individuelles sont distribuées aléatoirement par l'agitation thermique, la **vitesse mésoscopique** correspond à **l'écoulement d'ensemble du fluide**, comme par exemple la vitesse moyenne de migration des électrons de conduction soumis à un champ électrique.

→ Un enfant souffle dans une paille. Estimer les ordres de grandeurs des vitesses mésoscopique et microscopique de l'écoulement.

➔ Ligne de courant et tube de courant

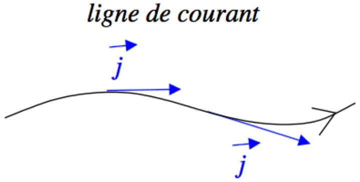
Compétence : définir les notions de ligne de courant et de tube de courant

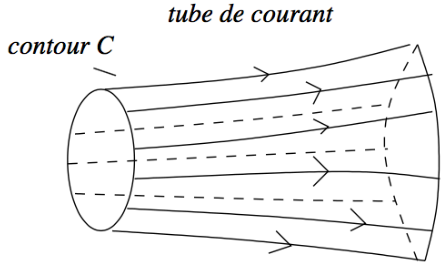
Les **lignes de courant** sont les **lignes tangentes** au **vecteur vitesse**, en tout point, et **orientées par ce vecteur**.

Il s'agit donc des lignes de champ du champ eulérien des vitesses.

L'**ensemble des lignes de courant** s'appuyant sur un contour C engendre une **surface fermée** appelée **tube de courant.**

On y reconnaitra une surface d'entrée et de sortie, et une surface latérale.





Ressource
http://ressources.unisciel.fr/mecaflux/co/AC1-C3_LigneTubeCourant.html

Remarque : dans la pratique une **canalisation** constitue naturellement un **tube de courant**

➔ Ecoulement stationnaire et champ de vitesse stationnaire

*Un écoulement est **stationnaire** si l'ensemble de ses **champs eulériens** $\vec{v}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{t})$... est **indépendant du temps**.*

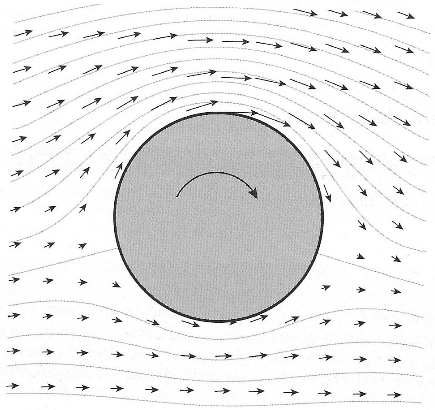
La vitesse de la particule de fluide qui passe au point M est toujours la même au cours du temps.

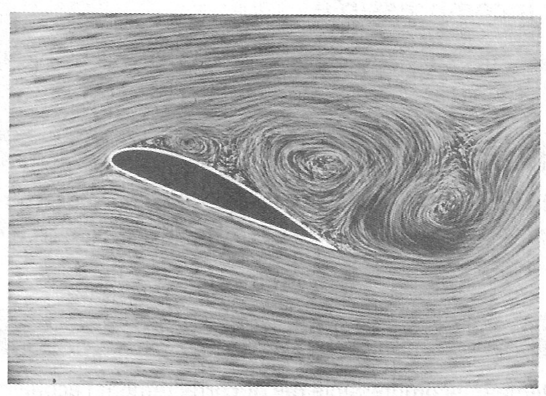
Le champ eulérien est alors pleinement efficace pour caractériser un écoulement stationnaire.

Pour un **écoulement stationnaire, la ligne de courant s'identifie à la trajectoire d'une particule de fluide**.

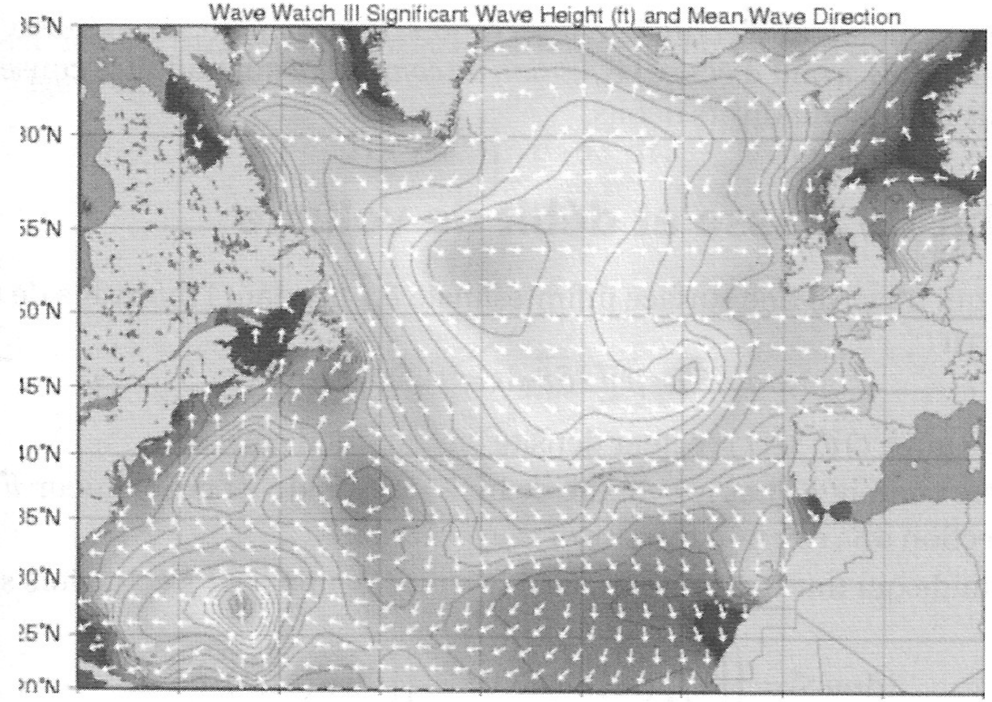
Il est alors possible de visualiser les lignes de courant à l'aide de colorants, de bulles ou particules diffusantes… injectés dans l'écoulement.

Ci-dessous un exemple de lignes de courant pour un écoulement stationnaire autour d'un cylindre en rotation, ou obtenues autour d'une aille d'avion à fort angle d'attaque.





Remarque : il existe cependant des variations de vitesse, car la vitesse n'est pas uniforme, et donc une **accélération non nulle de la particule de fluide**.

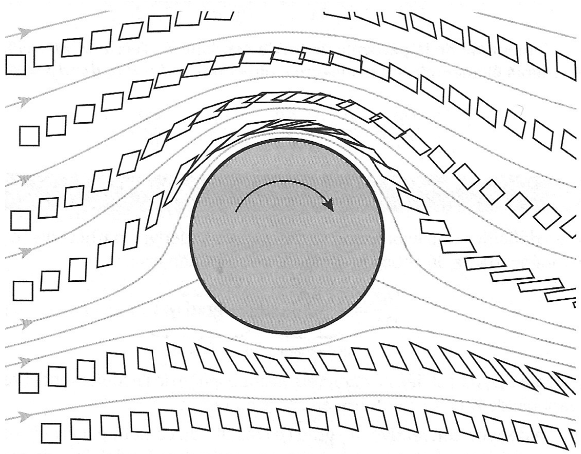


Ci-dessus, un **écoulement de marée en régime non-stationnaire** autour d'un obstacle : trajectoires et lignes de courant n'ont pas de lien immédiat.

1.3 <u>Dérivée particulaire</u>

➔ **Dérivée particulaire d'un scalaire : la masse volumique pour exemple**

<u>*Simulation numérique*</u> de l'évolution des particules de fluide au cours du temps dans l'écoulement permanent autour d'un cylindre en rotation



Dans cette évolution, la particule de fluide se déplace en translation, mais est aussi animée d'une rotation sur elle-même, et son volume est potentiellement modifié.
La variation de masse volumique de la particule (de masse constante) qui en résulte n'est pas bien décrite par la dérivée partielle purement eulérienne qui ne tient pas compte du déplacement dans un champ non uniforme.

Suivons une particule de fluide se trouvant au point M(t) en t, de coordonnées (x,y,z). A t + dt, elle se retrouve en M(t+dt), de coordonnées (x+dx,y+dy,z+dz).

La **dérivée particulaire de la masse volumique, notée** $\frac{D\mu}{Dt}$, est alors son taux d'accroissement obtenue en suivant la particule de fluide entre M(t+dt) et M(t), et s'exprime par :

$$\boxed{\frac{D\mu}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \mu}{\partial t}}_{\text{dérivée locale}} + \underbrace{\vec{v}.\overrightarrow{grad}(\mu)}_{\text{dérivée convectice}}}$$

La **dérivée locale** est liée au caractère **instationnaire de l'écoulement**, **en un point fixe au cours du temps** (« purement eulérien »).

La **dérivée convective** est liée au caractère **non uniforme de l'écoulement**, avec un déplacement dans des régions de masse volumique non uniforme.

Démonstration

➔ Dérivée particulaire de la vitesse

Le taux d'accroissement de la vitesse représente physiquement l'accélération de la particule de fluide qui passe au point M en t, au sens de la mécanique du point.
La notion de dérivée particulaire se généralise à tout champ vectoriel en l'appliquant sur chaque composante, et en particulier au champ des vitesses :

$$\boxed{\frac{D\vec{v}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{accélération\ locale} + \underbrace{\vec{v}.\overrightarrow{grad}(\vec{v})}_{accélération\ convectice}}$$

En effet

2. Transport de masse dans les écoulements

2.1 Débit massique et vecteur densité de courant

L'**écoulement** d'un fluide est un phénomène de **transport de masse**, les particules du milieu transportant leur propre matière. La masse de fluide s'écoulant dans une canalisation est une grandeur essentielle.

Nous allons donc définir le **débit massique D_m** d'un écoulement : **flux de masse par unité de temps -> en $kg.s^{-1}$**
et le **vecteur densité de courant massique** qui transporte cette grandeur**-> en $kg.m^{-2}.s^{-1}$**

Compétence : définir le débit massique et l'écrire comme le flux du vecteur densité de courant massique à travers une surface orientée

Prenons le cas d'un écoulement à travers une section orientée.

→ Réaliser un schéma clair de la situation, et évaluer la masse élémentaire d^2m qui traverse cette section entre t et t+dt. On notera μ la masse volumique du fluide.

Le **débit massique D_m** au travers de la surface S est défini par la masse dm qui la traverse pendant dt : $\boxed{D_m = \frac{dm}{dt}}$

→ Pour cet écoulement, monter que le débit massique (ou flux massique) s'exprime par : $\boxed{D_m = \frac{dm}{dt} = \iint_S \mu\vec{v}.d\vec{S} = \iint_S \overrightarrow{J_m}.d\vec{S}}$

Le **débit massique** est le **flux du vecteur densité de courant massique :** $\boxed{\overrightarrow{J_m} = \mu\vec{v}}$

On retrouve une analogie formelle avec le transport par diffusion thermique et particulaire : le rôle des vecteurs densité de courant $\overrightarrow{J_Q}$ et $\overrightarrow{J_N}$ est ici tenu par le vecteur densité de courant de masse $\overrightarrow{J_m}$ pour le transport de masse.

Grandeur G transportée	Vecteur densité de flux	Expression de $\delta^2 G$
Nombre N de particules	$\vec{j_N}$	$\delta^2 N = \vec{j_N} \cdot \vec{dS}\, dt$
Chaleur Q	$\vec{j_Q}$	$\delta^2 Q = \vec{j_Q} \cdot \vec{dS}\, dt$
Volume V	$\vec{v}$	$\delta^2 V = \vec{v} \cdot \vec{dS}\, dt$
Masse m	$\vec{j_m}$	$\delta^2 m = \vec{j_m} \cdot \vec{dS}\, dt$

Cependant, la **source des transports diffusifs** est, à chaque fois, associée à l'**inhomogénéité d'une grandeur physique hors-équilibre**, alors qu'ici le vecteur $\overrightarrow{J_m}$ est un **transport convectif,** dont la **« source »** est **le champ des vitesses** dans le fluide**.**

Pour le cas pratique, très courant, des écoulements où la **vitesse est uniforme sur la surface** :

vitesse uniforme sur S -> $\boldsymbol{D_m = \mu v S}$

2.2 *Equation locale de conservation de la masse*

➔ **Exemple unidirectionnel (en géométrie cartésienne)**

Compétence : écrire les équations bilans, globale ou **locale**, traduisant la conservation de la masse

On considère un modèle unidirectionnel avec $\vec{v}(x,t) = v_x(x,t)\,\overrightarrow{u_x}$.

→ Réaliser un bilan de masse local appliqué au volume élémentaire dV, compris entre x et x+dx, le vecteur densité de courant ne dépendant que de x, et monter que l'équation locale de conservation de la masse est :

$\boxed{\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0}$

➔ **Généralisation tridimensionnelle** $\boxed{div\,\overrightarrow{J_m} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0 \quad avec \quad \overrightarrow{J_m} = \mu\,\vec{v}}$

3. Propriétés des différents types d'écoulement

3.1 *Ecoulement stationnaire (permanent)*

➔ **Caractère conservatif du vecteur densité de courant massique**

En régime permanent, les grandeurs ne dépendent pas explicitement du temps, ainsi l'équation locale de conservation devient avec $\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$:

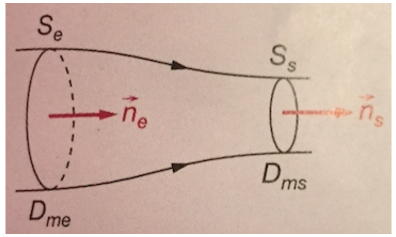
$\boxed{div\,\overrightarrow{J_m} = 0}$ équivalent à $\boxed{\oiint \overrightarrow{J_m} \cdot \overrightarrow{dS} = 0}$

*Le flux de masse entrant, ou **débit massique entrant**, **équilibre exactement** le flux de masse sortant, ou **débit massique sortant**, le **vecteur densité de courant** est dit à **flux conservatif**.*

➔ **Conséquence : conservation du débit massique**

Compétences :
- écrire les équations, **globale** ou locale, traduisant la conservation de la masse
- exploiter la conservation du débit massique

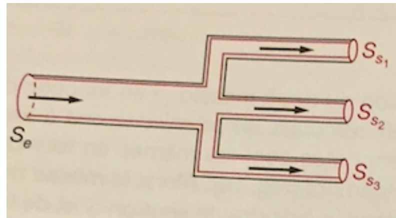
Prenons le cas d'un tube de courant, comme une canalisation, représenté sur la figure ci-contre. Le débit total entrant est égal au débit total sortant en régime permanent. Le débit sur la surface latérale du tube est nul par définition : le vecteur surface y est orthogonal au vecteur densité de courant. Le débit total entrant se réduit ici à D_{me} qui est égal au débit total sortant D_{ms}.



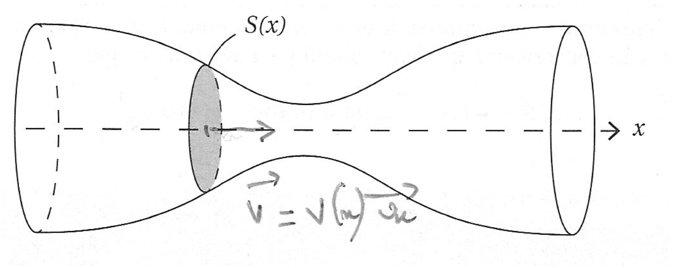
*En régime **stationnaire**, le **débit massique se conserve** le long **d'un tube de courant**.*

Un autre cas pratique de **bilan global en régime stationnaire** est celui des dispositifs avec plusieurs entrées/sorties : la somme des débits entrants est alors égale à la somme des débits sortants : $\sum_i \boldsymbol{D_{me,i}} = \sum_j \boldsymbol{D_{ms,j}}$

On retrouve l'analogue de la loi des nœuds en électrocinétique.



Prenons le cas d'un **écoulement d'air stationnaire dans une tuyère** de section variable S(x). Si la section S(x) varie lentement avec x, il est légitime de supposer une vitesse unidirectionnelle, perpendiculaire à la section droite et un écoulement unidimensionnel/ $\vec{v} = v(x)\overrightarrow{u_x}$ (la composante radiale étant négligeable).



La conservation du débit massique dans la tuyère, qui est naturellement un tube de champ, fournit la relation :

$$\boxed{D_m = \mu(x)S(x)v(x) = cte}$$

3.2 *Ecoulement incompressible et homogène*

➔ Champ d'application du modèle de fluide incompressible

L'écoulement incompressible est un modèle.
Il est très bien adapté aux cas d'un **fluide incompressible** et **indilatable** : coefficient de compressibilité isotherme $\chi_T = -\frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial P})_T$ et coefficient de dilatation isobare $\alpha = -\frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial T})_P$ négligeables, alors **la variation de volume dV de la particule de fluide est négligeable** par l'équation d'état : $dV = \alpha V\, dT - \chi_T V\, dP$.
Sa masse volumique est donc constante.

En pratique, pour les **fluides**, le caractère **incompressible** est aisément **vérifié**.

Avec χ_T = 10^{-10} Pa^{-1} -> dV/V = 10^{-3} pour une variation de pression dP = 100 bar = 10^7 Pa (élévation de pression correspondante à une profondeur de 1000 m de fond pour de l'eau).

Pour les **gaz**, l'écoulement est approximativement **incompressible** si la **vitesse de l'écoulement** U est **faible devant la vitesse de la célérité des ondes acoustiques** :

Ecoulement incompressible pour un gaz <-> **U << c_{son} la vitesse du son dans le fluide**
Soit un **nombre de Mach M = U/c_{son} << 1**

➔ Propriétés de l'écoulement incompressible et homogène

Compétences :
- définir un écoulement incompressible et homogène par un champ de masse volumique constant et uniforme
- relier cette propriété à la conservation du volume pour un système fermé

*Un écoulement **incompressible et homogène** est caractérisé par un **champ de masse volumique constant** et **uniforme**.*

On dit aussi qu'un écoulement est **incompressible si** le **volume** la **particule de fluide** est **conservé** au cours du mouvement. En effet, la conservation de la masse pour une particule de fluide (système fermé), et de la masse volumique impose celle du volume.

➔ Caractère conservatif du vecteur vitesse pour un écoulement incompressible et homogène

La masse volumique se conserve le long de l'écoulement soit :

$$\frac{D\mu}{Dt} = 0$$

Par ailleurs, l'équation locale de conservation de la masse s'écrit :

$$div\,\overrightarrow{J_m} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = div\,(\mu\vec{v}) + \frac{\partial \mu}{\partial t} = \mu\, div\,\vec{v} + \underbrace{\vec{v}.\overrightarrow{grad}\,(\mu) + \frac{\partial \mu}{\partial t}}_{\frac{D\mu}{Dt}} = 0$$

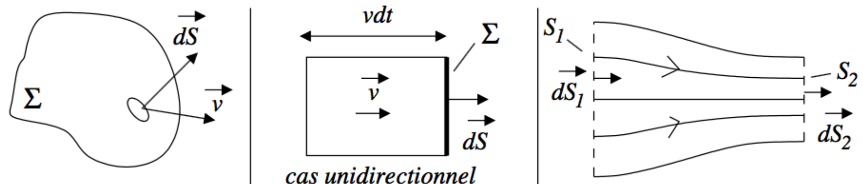
Soit $\quad div\,\vec{v} = -\frac{1}{\mu}\frac{D\mu}{Dt}$

Pour un écoulement stationnaire -> $div\,\vec{v} = \vec{0}$ -> le vecteur vitesse est à flux conservatif

Remarque : considérons une particule de fluide de **volume V** et de **masse m = μV**
L'équation précédente s'écrit : $div\,\vec{v} = -\frac{1}{\mu}\frac{D\mu}{Dt} = -\frac{D(ln\mu)}{Dt} = \frac{D(lnV)}{Dt} = \frac{1}{V}\frac{DV}{Dt}$
La divergence du vecteur vitesse définit l'accroissement relatif de la particule de fluide au cours du temps (on parle du taux d'expansion volumique).

➔ Débit volumique

Compétence : définir le débit volumique et l'écrire comme le flux de la vitesse à travers une surface orientée



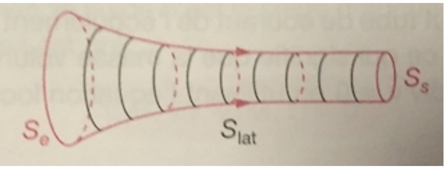
débit volumique — *cas unidirectionnel débit volumique* — *tube de courant indéformable*

On définit le **débit volumique D_V** comme le **flux du vecteur vitesse** à travers une surface orientée : $\boxed{D_V = \iint_S \vec{v}.d\vec{S}}$ -> unité en **m^3.s^{-1}**
Il représente le volume de fluide qui traverse cette surface par unité de temps.

Remarques
- pour un **écoulement incompressible et homogène,** on obtient une relation entre débits massique et volumique : $\boxed{\mathbf{D_m = \mu D_V}}$
- généralement, on définit la **vitesse débitante**, ou **vitesse moyenne** $\overline{v}$ par la relation : $\boxed{\mathbf{D_V = S\,\overline{v}}}$

➔ Conservation du débit volumique pour un écoulement incompressible et homogène

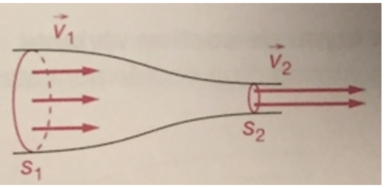
Compétence : justifier la conservation du débit volumique le long d'un tube de tube de courant indéformable



En exploitant la conservation du flux du vecteur vitesse le long du tube de courant (surface fermée ci-contre), on trouve rapidement que $\mathbf{D_{Ve} = D_{Vs}}$, car le flux latéral est nul.

*Dans un écoulement incompressible homogène, le **débit volumique se conserve entre l'entrée et la sortie d'un tube de courant** (par exemple, il ne change pas dans une canalisation). En particulier**, lorsque les lignes de courant s'écartent, la vitesse débitante du fluide diminue.***

Prenons l'exemple de de la figure ci-contre : $S_1\overline{v_1} = S_2\overline{v_2}$ donc lorsque la surface d'écoulement diminue, la vitesse augmente. D'autre part, les débits volumiques entrants et sortants sont égaux dans le cas de plusieurs entrées/sorties.



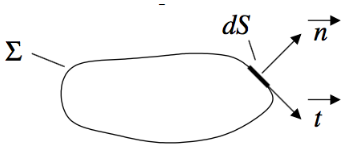
II. *Actions de contact dans un fluide*

1. Description générale des actions mécaniques de contact

Après avoir décrit et modélisé les écoulements de fluide, nous poursuivons notre étude du transport en mécanique des fluides, en explicitant les forces à l'origine des champs de vitesse engendrés. Contrairement à la statique des fluides, étudiée en première année, dès qu'un **fluide** est **mis en mouvement**, on peut plus uniquement décrire les actions de contact dans un fluide (fluide/fluide et fluide/paroi) par des forces de pression. Il est nécessaire d'introduire des forces supplémentaires de viscosité.

Délimitons un volume V de fluide par une enveloppe fictive Σ. Le fluide extérieur, ou un support, exerce des **actions de contact à courte portée** sur les particules de fluide, contenues à l'intérieur du volume V.
On **modélise ces actions** par une **force surfacique**.

Compétence : identifier la force de pression comme étant une action normale à la surface



La **résultante des forces exercées par l'extérieur** sur l'élément de surface dS peut être décomposée en deux termes :

- une **composante normale** : la **force de pression** d'expression élémentaire

$$\boxed{\overrightarrow{dF_n} = -P(M,t)\, dS\, \vec{n}}$$

Cette force résulte des chocs des particules de fluide sur la paroi. Le signe « - » assure que cette force est dirigée vers l'intérieur.

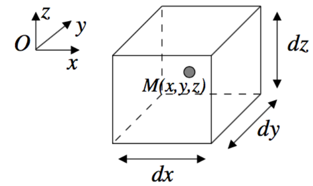
- une **composante tangentielle** : la **force de viscosité** ou **force de cisaillement** modélisant le **frottement des couches de fluide** les unes sur les autres.

2. Expression volumique des forces de pression

Compétence : utiliser l'équivalent volumique des actions de pression $-\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\,\boldsymbol{P}$
En l'absence d'écoulement, la force de contact est purement normale.

Pour exprimer l'équivalent volumique des forces de pression, on considère une particule de fluide de volume dV, comprise entre x et x+dx, y et y+dy, z et z+dz.

→ Exprimer la composante $\overrightarrow{dF_x}$ selon (Ox) de la résultante des forces de pression P(x,y,z), exercée sur cet élément de volume.



En généralisant selon les trois directions, on en déduit l'expression de la résultante : $d\vec{F} = \overrightarrow{dF_x} + \overrightarrow{dF_y} + \overrightarrow{dF_z} = -\left(\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\overrightarrow{u_x} + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{u_y} + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_z}\right) dV$

$$d\vec{F} = -\overrightarrow{grad}P\, dV = \overrightarrow{F_V}\, dV$$

La **force volumique équivalente** $\overrightarrow{\boldsymbol{F_V}} = \frac{\boldsymbol{d\vec{F}}}{\boldsymbol{dV}}$ s'exprime donc par $\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{F_V}} = -\overrightarrow{grad}P}$

On retrouve directement cette relation en utilisant la formule d'Archimède :

$$\vec{F} = \oiint P\, d\vec{S} = \iiint_V -\overrightarrow{grad}P\, dV = \iiint_V \overrightarrow{F_V}\, dV$$

3. Eléments de statique des fluides

3.1 Cas d'un fluide incompressible

Compétence : exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas d'un fluide incompressible
C'est certainement le cas le plus simple, concrètement il s'applique aux liquides incompressibles et homogènes. La **masse volumique** est alors constante et uniforme, notamment **indépendante de la pression**, dans la limite de pressions raisonnables.

→ Réaliser un schéma de la situation : volume d'eau avec surface libre au contact de l'air, la pression dans l'air P_{atm}. Exploiter le PFD appliqué à un élément de volume dV pour établir le profil de pression au sein du fluide.

La pression augmente donc avec la profondeur (« poids de la colonne d'eau »).
Plus simplement, on peut retiendra la relation faisant intervenir la différence de pression entre deux points du liquide séparés par une hauteur h :

$$\boxed{\Delta P = \mu_0 g h}$$

Si l'on s'enfonce de 10 mètres -> $\Delta P \cong 10^3 * 10 * 10 = 10^5$ Pa = 1 bar
Rappel : 1 Pa (pascal) = 1 N.m^{-2}
Contrairement à un gaz, la pression dans un liquide varie significativement sur quelques mètres, à cause d'une masse volumique bien plus élevée.

3.2 *Cas d'un fluide compressible : équilibre isotherme de l'atmosphère*

Compétence : exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait

➔ **Position du problème : hypothèses du cadre de l'étude**

- on s'intéresse au cas d'un **fluide compressible** : un gaz considéré comme un **gaz parfait**. L'équilibre thermodynamique local appliqué à un élément de volume élémentaire dV et de quantité de matière dn, en mol, et de masse dm s'écrit :
P dV = dn RT = (dm/M) RT -> $\boxed{\boldsymbol{\mu} = \frac{dm}{dV} = \frac{PM}{RT}}$
Avec M la masse molaire moyenne pour l'air, constitué de 80% de N_2 (29 g.mol^{-1}) et de 20% de O_2 (32 g.mol^{-1}), soit ici M ≈ 29 g.mol^{-1}.
La différence essentielle avec le fluide incompressible précédent est la **variation de masse volumique avec l'altitude**.

- on fait l'hypothèse d'un **champ de pesanteur uniforme** g(z) = g, sachant que $g(z) = \frac{{R_T}^2}{(R_T+z)^2}$ -> cette hypothèse est tout à fait réaliste tant qu'on se limte à des couches atmosphériques z ≈ 10 km << R_T = 6400 km le rayon terrestre

- on suppose une atmosphère à **l'équilibre thermique -> T = T_0 température constante** : cette hypothèse est plus contraignante, par exemple elle diminue de 0,6 °C tous les 100 m dans la troposphère

➔ **Détermination du champ de pression**

→ Réaliser un schéma clair de la situation, et y placer votre repérage. Exploiter le PFD appliqué à un élément de volume dV pour établir le profil de pression au sein du fluide. On notera P_0 la pression au sol en z = 0.

→ Evaluer numériquement la distance caractéristique H de variation de la pression pour T = 300 K.

La **pression** dans l'air **diminue exponentiellement avec l'altitude**.
Au delà de 3 H, par exemple, la pression n'est plus que de 5%. Dans ce modèle, si on assimile donc 3H à l'épaisseur de l'atmosphère, on trouve une **épaisseur de quelques dizaines de kilomètres**.

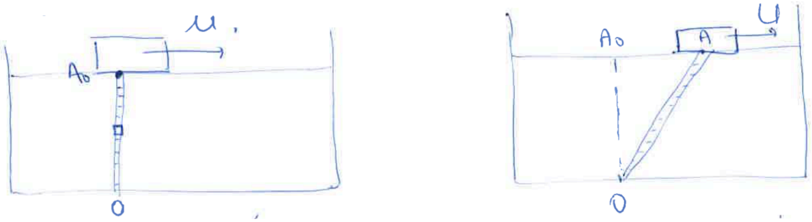
→ Estimer la variation relative de pression à l'échelle d'une pièce, ou d'un bâtiment, notée h ≈ 10 m << H. Conclure.

Remarque
On identifie un facteur de Boltzmann dans la dépendance exponentielle de la pression avec l'altitude. Celui-ci met en évidence la **compétition « ordre/désordre »** entre deux termes : **l'énergie cinétique d'agitation thermique** kT (ou RT/M), qui disperse les molécules du gaz selon l'altitude, et **l'énergie potentielle de gravitation**, facteur d'ordre qui a tendance à regrouper les molécules au niveau du sol.

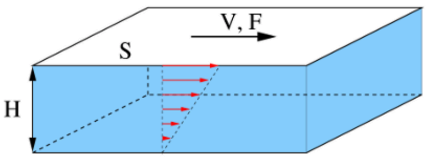
4. *Viscosité dynamique d'un fluide*

4.1 Nécessité d'une composante tangentielle des forces de contact

➔ **Mises en évidence expérimentale**



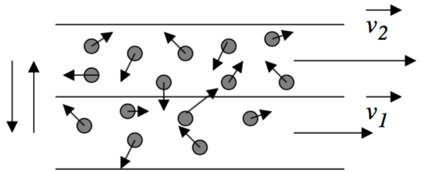
Nous proposons une première expérience avec un fluide visqueux : on étale du miel sur une surface, et on dépose une feuille d'aluminium sur cette couche de fluide qu'on tire parallèlement à la surface. On recommence l'expérience avec un fluide peu visqueux comme l'eau. On constate une force bien supérieure en présence de miel pour **mettre ce fluide visqueux en mouvement**, qui est **tangentielle à la surface de contact** fluide/aluminium : il s'agit donc d'une **force de cisaillement** appliquée tangentiellement à la surface.
Analysons plus en détail cette situation avec une deuxième expérience : dans un cristallisoir, rempli de glycérine, fluide très visqueux, on injecte une colonne de glycérine colorée à l'aide d'une seringue. Un palet est disposé à la surface du fluide et on le déplace avec une vitesse U, tangentiellement à la surface.



Le palet mobile met en mouvement la couche supérieure de fluide à sa surface, qui entraine à son tour une couche inférieure, ce **transfert de quantité de mouvement** (déplacement) des couches de fluide se répète de proche en proche sur chaque couche de fluide, jusqu'à atteindre le fond du cristallisoir. On peut faire **l'analogie avec les cartes d'un jeu lorsque l'on pousse la carte supérieure.**
Une force normale à la surface, comme la résultante des forces de pression, ne peut provoquer ce mouvement tangentiel (travail nul).

D'autre part, c'est **l'inhomogénéité** initiale **de vitesse au sein du fluide** qui provoque l'apparition de cette **force dite de cisaillement**. En effet, il existe clairement un **champ de vitesse inhomogène** et un **gradient de vitesse** selon la verticale au début de l'expérience : fluide en déplacement à la surface mobile et fluide immobile au fond du cristallisoir. Les **zones les plus rapides** ont tendance à **entraîner les plus lentes**.
Résultat du **cisaillement**, un gradient vertical (selon y) du champ de vitesse est lié à une contrainte horizontale (selon x).
Cette force de cisaillement traduit aussi un **transport de quantité de mouvement au sein du fluide** qui se met en déplacement de proche en proche : il y a « **diffusion de quantité de mouvement** ».

➔ **Interprétation microscopique qualitative**



les molécules sont échangées du fait de la diffusion

Regardons deux couches de fluide au niveau microscopique. Dans chaque couche, une particule de fluide est animée d'une vitesse mésoscopique et d'une vitesse microscopique de moyenne nulle.

Pour deux couches adjacentes de vitesses mésoscopiques différentes (ci-contre), les molécules en moyenne plus rapides de la couche supérieure diffusent et traversent la frontière entre les deux couches. De ce fait, elles transportent avec elles une quantité de mouvement supplémentaire qu'elles transfèrent à la couche inférieure. La couche inférieure voit sa quantité de mouvement augmenter globalement.
Les **forces de viscosité traduisent** bien un **transport diffusif de quantité de mouvement**.

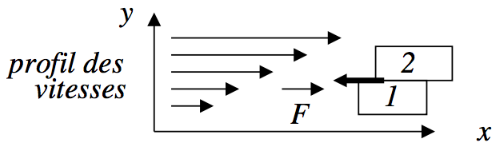
4.2 Définition de la viscosité comme force surfacique de cisaillement

➔ **Définition dans le cas d'un écoulement parallèle**

Compétence : relier l'expression de la force surfacique de viscosité au profil de vitesse dans le cas d'un écoulement parallèle

On se place dans le cadre d'un **écoulement plan unidirectionnel** décrit par un **champ de vitesse** : $\vec{v} = v_x(y)\,\overrightarrow{u_x}$

La couche de fluide supérieure plus rapide, repérée par 2, a tendance à entraîner la couche inférieure 1 moins rapide.
Cette **force tangentielle**, exercée par la couche supérieure sur la couche inférieure, est **proportionnelle à la surface de contact** commune entre les deux couches, notée dS, et **au gradient de vitesse vertical**, dans le cas des fluides dits **newtoniens** :



$$\boxed{d\vec{F} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} dS\,\overrightarrow{u_x}}$$

η est la **viscosité dynamique** du fluide newtonien. Elle dépend fortement de la température et la pression pour les gaz, plus faiblement pour les liquides.
Cette force tend à **homogénéiser le champ de vitesse**, comme tout **phénomène de diffusion**.

<u>Remarques</u>

- pour les **fluides non-newtoniens** comme le sang, un mélange eau-fécule de mais, le dentrifice…, la viscosité dynamique η dépend du taux de cisaillement $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ lui-même. Pour un fluide rhéoépaississant, comme le mélange fécule de mais + eau (ou un yaourt), quand on y enfonce doucement une cuillère, la force à appliquée est faible, alors que si l'on communique une forte vitesse à la cuillère, celle-ci rebondit à la surface, il faut une force beaucoup plus importante pour y faire pénétrer la cuillère. La force sera aussi différente quand on veut retirer la cuillère du fluide, à forte ou faible vitesse. Pour un fluide à seuil, comme le dentifrice, une contrainte minimale est nécessaire pour le mettre en écoulement (pas d'écoulement spontané sous l'effet de son poids…)
- on peut aussi définir la viscosité cinématique ν : $\nu = \frac{\eta}{\mu}$

Compétence : exprimer la dimension du coefficient de viscosité dynamique

→ Montrer que la dimension de η correspond à une unité en **Pa.s = Pl -> le poiseuille**

➔ Ordres de grandeur

Compétence : citer l'ordre de grandeur de la viscosité de l'eau

Le poiseuille Pl est une unité « assez forte » : la glycérine très visqueuse possède une viscosité de l'ordre de l'unité. Le tableau ci-dessous indique des viscosités à 25°C.

Corps pur	Eau	Air	Glycérine
Viscosité	$\eta = 1{,}0.10^{-3}$ Pl	$\eta = 1{,}8.10^{-5}$ Pl	$\eta = 1{,}4$ Pl

Rajoutons une huile de lubrifiant pour roulement mécanique, un produit industriel et visqueux, notamment employé pour sa qualité de contact avec les surfaces métalliques : η (huile pour moteur multigrade SAE 15W40 à 40°C) = 0,1 Pl

➔ Condition aux limites : condition d'adhérence

Compétence : citer la condition d'adhérence à l'interface fluide/solide

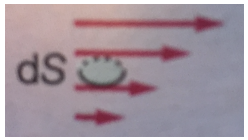
Au contact d'un solide, la continuité de la composante tangentielle de la vitesse est imposée par la viscosité : le fluide adhère en effet à la paroi par viscosité, il ne peut pas y glisser. La continuité de la composante est imposée par la non-pénétration du fluide dans le solide.

*En conclusion, au **contact d'une paroi immobile**, la **vitesse** d'un écoulement visqueux **s'annule**. Au **contact d'une paroi mobile**,* $\vec{v}\,(\boldsymbol{fluide}) = \vec{v}\,(\boldsymbol{paroi})$.

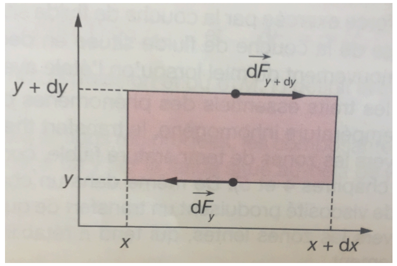
➔ Caractère dissipatif de la viscosité et modèle de l'écoulement parfait

D'un point de vue thermodynamique, la viscosité d'un fluide implique **l'irréversibilité des écoulements** : on ne verra jamais un fluide dont une couche lente ralentit et en accélère une autre plus rapide.
D'un point de vue énergétique, la viscosité transporte de l'énergie cinétique de proche en proche, qui est ensuite convertie en énergie thermique. Il s'agit donc d'un **phénomène dissipatif**.
Cependant pour des « fluides peu visqueux » comme l'air notamment, on pourra adopter le **modèle de l'écoulement parfait**, lorsqu'un écoulement dissipe une énergie négligeable. **Tout transport diffusif devra être négligeable** : **dissipations visqueuse et thermique** négligeables.

4.3 <u>Expression de la force volumique de viscosité</u>



On considère un écoulement parallèle avec un champ de vitesse $\vec{v} = v_x(y)\,\overrightarrow{u_x}$.



La particule de fluide de volume dV, comprise entre x et x+dx, y et y+dy, subit deux forces de cisaillement en y et y +dy :

$$d\vec{F} = d\vec{F}_{y+dy} + d\vec{F}_y = \eta\, dS \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}(y+dy) - \frac{\partial v_x}{\partial y}(y)\right)\overrightarrow{u_x}$$

$$= \eta\, dS \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy\,\overrightarrow{u_x}$$

$$\boxed{d\vec{F} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dV\,\overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{F_v}\, dV}$$

Plus généralement à 3 dimensions, on peut établir l'expression de la force volumique de viscosité $\overrightarrow{F_v}$:

$$\boxed{\overrightarrow{F_v} = \eta\,\Delta\vec{v}}$$

Ce qu'il faut retenir

• **Il existe trois échelles d'étude : macroscopique** (distances qui nous sont naturellement perceptibles), **microscopique** (de la taille des atomes) et **mésoscopique** (échelle intermédiaire typiquement de la taille du micromètre : petite à l'échelle macroscopique, mais grande à l'échelle microscopique).

L'échelle mésoscopique permet de définir localement les grandeurs macroscopiques intensives comme la pression $P(M, t)$, la température $T(M, t)$, la masse volumique $\mu(M, t)$, la vitesse mésoscopique $\vec{v}(M, t)$ d'un écoulement…

On obtient ainsi des **champs eulériens**, définis en tout point et à tout instant. Si les champs eulériens ne dépendent pas de la variable temporelle, l'écoulement est dit **stationnaire**.

• **Une ligne de courant** est une ligne qui, en chacun de ses points, est tangente à la vitesse de l'écoulement.

Un tube de courant est constitué d'une surface d'entrée reliée à une surface de sortie par des lignes de courant partant de ses bords.

• **Le débit massique** au travers de la surface S, noté D_m, est la masse de fluide la traversant par unité de temps, soit :

$$D_m = \frac{dm}{dt}$$

où dm est la masse de fluide traversant S pendant dt. D_m s'exprime dans le système international en kg.s^{-1}. Explicitement,

$$D_m = \iint_S \mu \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Pour un écoulement parallèle uniforme (perpendiculaire à la surface), on a l'expression simple : $D_m = \mu S v$. En régime stationnaire, le débit massique se conserve le long d'un tube de courant.

• **Le débit volumique** au travers de la surface S, noté D_V, est le volume de fluide la traversant par unité de temps. D_V s'exprime dans le système international en (m^3.s^{-1}). Explicitement, on obtient :

$$D_V = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}.$$

Sur une surface où la vitesse de l'écoulement est uniforme et normale à cette surface,

$$D_m = Sv.$$

Débits massique et volumique sont liés par : $D_m = \mu D_V$.

… pour un écoulement incompressible homogène.

• **Un écoulement est rotationnel** si certaines lignes de courant se referment sur elles-mêmes.

Un écoulement est divergent (compressible) si le débit volumique ne se conserve pas dans tout tube de courant de l'écoulement (soit div $\vec{v} \neq 0$). Alors, le volume d'une particule de fluide varie, ce qui signifie que la masse volumique du fluide change dans l'écoulement.

• Dans un fluide au repos ($\vec{v}(M, t) = \vec{0}$), la **relation de statique des fluides** donne une loi régissant l'évolution de la pression :

$$P'(z) = -\mu g$$

avec le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ (le vecteur $\vec{u}_z$ est orienté vers le haut).

• **L'équation locale de statique des fluides** s'écrit :

$$\mu\vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}\, P = \vec{0}.$$

• Dans un **fluide incompressible** de masse volumique μ, le champ de pression est :

$$P(z) = P_0 - \mu g z$$

où P_0 est la pression à la surface $z = 0$.

• Dans le modèle d'**atmosphère isotherme**, le champ de pression est donné par :

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)$$

où M est la masse molaire du gaz et T sa température.

• Dans un écoulement de vitesse $\vec{v} = v_x(z)\vec{u}_x$, la force de viscosité $d\vec{F}$ exercée par la partie du fluide au-dessus de la surface élémentaire dS sur celle au-dessous s'écrit :

$$d\vec{F} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} dS\, \vec{u}_x$$

où η est la **viscosité dynamique** du fluide appelé alors **fluide newtonien** si η ne dépend pas du taux de cisaillement $\frac{\partial v_x}{\partial z}$.

Dérivée particulaire de la vitesse

$$\boxed{\frac{D\vec{v}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{accélération\ locale} + \underbrace{\vec{v}.\overrightarrow{grad}(\vec{v})}_{accélération\ convectice}}$$

Expression volumique des forces de pression et viscosité

$$d\overrightarrow{F_P} = -\overrightarrow{grad}\ P\ dV$$

$$d\overrightarrow{F_V} = \eta\ \Delta\vec{v}\ \ dV$$