

III. Écoulement interne incompressible et homogène dans une conduite cylindrique

1. Les régimes d'écoulement laminaire turbulent

Ressources

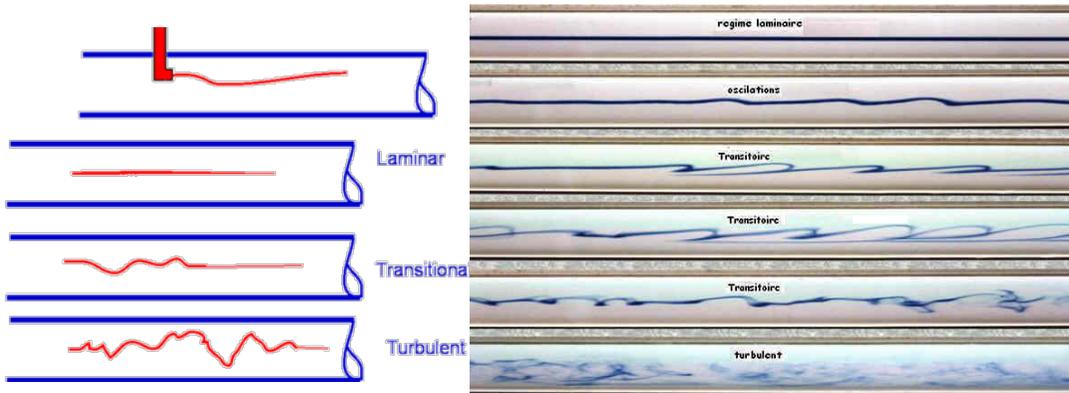
<http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/la-physique-animee/forces-de-viscosite-pour-un-fluide-equation-de-navier-stokes>

<https://www.youtube.com/watch?v=P43hIF1uoVk>

projet Lutétium <https://www.youtube.com/watch?v=eD7LdS6bfOQ>

Compétence : décrire les différents régimes d'écoulement (laminaire et turbulent)

Dans le **régime** dit **laminaire**, correspondant à des **vitesse faibles**, les couches de fluides ne se mélangent pas, et glissent les unes sur les autres : l'**écoulement** est **régulier**. Lorsqu'on augmente la vitesse de l'écoulement, l'écoulement laminaire devient **irrégulier et instable**, avec mélange des couches de fluide puis formation de tourbillons... Cet **écoulement cahotique** à des **grandes vitesses** est alors qualifié de **turbulent**, caractérisé par un **fort désordre** et de **fortes et brusques variations spatio-temporelles**. On peut très simplement visualiser un écoulement turbulent lorsqu'on ouvre un robinet d'eau : aux faibles débits, la forme du jet est régulière et invariante au cours du temps alors qu'aux débits importants, la forme du jet devient irrégulière, fluctuante : l'eau devient trouble, le milieu est



opaque... (voir ressources vidéo).

2. Nombre de Reynolds

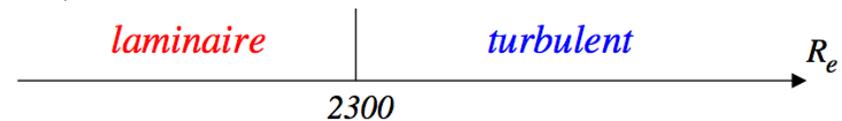
En 1883, Reynolds constate expérimentalement qu'il existe **une loi d'échelle** pour **prévoir** le caractère laminaire ou turbulent d'un écoulement : si l'on double le diamètre d'une canalisation, il faut doubler la vitesse pour obtenir un écoulement similaire. Il construit alors un **nombre sans dimension** appelé **nombre de Reynolds** pour mettre en évidence les **similarités** entre conditions expérimentales.

→ **Première approche** : construction du nombre de Reynolds par analyse dimensionnelle

On considère les **paramètres d'influence** d'un écoulement suivants : sa **vitesse mésoscopique U**, la **dimension** typique de l'**écoulement L** (par exemple le diamètre d'une canalisation), **η** la **viscosité dynamique** du fluide en écoulement, et **μ** sa **masse volumique**.

→ Construire le **nombre de Reynolds R_e** sans dimension qui compare la convection à la diffusion de quantité de mouvement

Dans cette expression, on peut déjà interpréter qualitativement les grandeurs qui influencent le régime d'écoulement : une vitesse et/ou une masse volumique élevées imposent un **fort nombre de Reynolds** : **régime turbulent** (instable), alors qu'une forte viscosité impose un **faible R_e** : **régime laminaire** (stable). On identifie ici la **compétition** entre deux phénomènes : le **transport diffusif par viscosité** piloté par **η** , et le **transport convectif** piloté par la vitesse et la masse volumique.



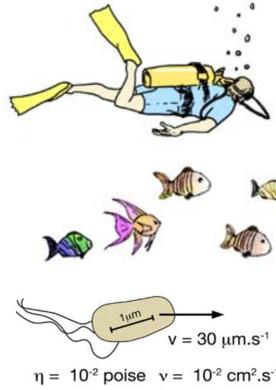
On pourra retenir **$R_e < 1$** : régime laminaire, **$R_e > 3000$** régime turbulent, transition pour **$R_e \approx 2300$**

Compétence : évaluer le nombre de Reynolds et l'utiliser pour caractériser le régime d'écoulement

Natation à faible nombre de Reynolds

<http://www.cmap.polytechnique.fr/~alouges/nage.php>

→ Evaluer le nombre de Reynolds pour ces nageurs !



→ Pour un écoulement d'eau dans une canalisation de rayon $R = 5 \text{ cm}$, $\eta = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$. A partir de quelle vitesse débitante l'écoulement est turbulent ($Re = 3000$) ? Quel est le débit correspondant ? Conclure.

→ **Interprétation du nombre de Reynolds selon les temps caractéristiques de diffusion et convection**

Compétence : interpréter le nombre de Reynolds comme le rapport d'un temps caractéristique de diffusion de quantité de mouvement sur un temps caractéristique de convection

Pour un transport par convection à la vitesse U , on obtient facilement le temps caractéristique de convection τ_{conv} à partir de la taille caractéristique de l'écoulement L : $\tau_{conv} = \frac{L}{U}$

Pour un transport par diffusion, on peut directement raisonner par analogie avec la diffusion de particules par exemple :

Pour plus de précision, intéressons-nous à un écoulement de Couette plan selon (Ox) , et appliquons le PFD dans un champ de pression uniforme (pour simplifier la

situation) en projection sur (Ox) , à une particule de fluide de volume élémentaire dV et de masse dm :

$$dm \frac{\partial v}{\partial t} = dF_{viscosité,x} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dV$$

$$\rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\eta}{\mu} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0$$

Cette expression est à rapprocher de l'équation de diffusion de particules :

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} = 0$$

Par analyse en ordre de grandeurs de cette équation aux dérivées partielles de la vitesse, on identifie le temps typique de diffusion : $\tau_{diff} = \frac{L^2}{D} = \frac{\mu L^2}{\eta}$

On peut alors construire le nombre de Reynolds comme le rapport de ces temps caractéristiques :

$$Re = \frac{\tau_{diff}}{\tau_{conv}} = \frac{\mu U L}{\eta}$$

$$\tau_{diff} \ll \tau_{conv} \Leftrightarrow Re \ll 1$$

-> la diffusion domine la convection, écoulement laminaire

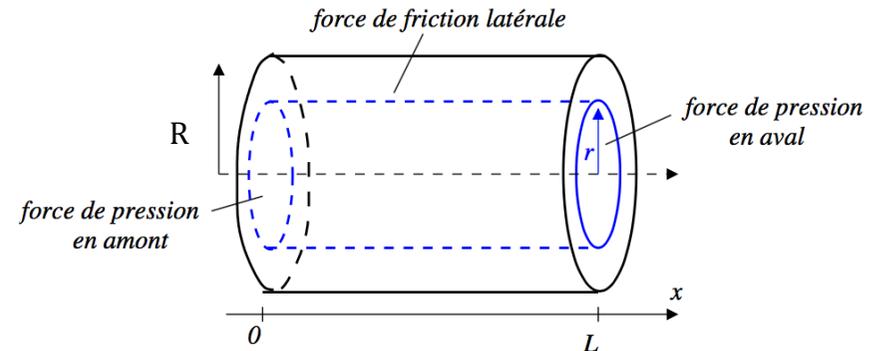
$$\tau_{diff} \gg \tau_{conv} \Leftrightarrow Re \gg 1$$

-> la convection domine la diffusion, écoulement turbulent

3. Chute de pression dans une conduite horizontale

3.1 Description du problème

On s'intéresse à l'écoulement d'un **fluide incompressible et homogène** au sein d'une **canalisation cylindrique** de rayon R , représentée sur le schéma ci-dessous.



Suite à la **viscosité du fluide** qui agit au niveau du **contact fluide/paroi latérale** de la conduite, un **gradient de pression** doit être appliqué afin de permettre l'écoulement : une **pression plus élevée** est **imposée en amont** de l'écoulement. Le but de notre modélisation sera de préciser cette **chute de pression le long de l'écoulement** en fonction des caractéristiques de la conduite.

Ressource: <http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/la-physique-animee/la-physique-animee-une-serie-de-videos-de-physique>

3.2 Expression du champ de vitesse et profil de vitesse

Nous nous plaçons d'abord dans le cas d'un **écoulement laminaire** et régulier, qui autorise une modélisation plus simple qu'un écoulement turbulent.

En raisonnant sur les symétries du système étudié : **symétrie par rotation** autour de l'axe et **écoulement unidirectionnel** selon (Ox), on attend un champ de vitesse en **régime stationnaire** de la forme : $\vec{v} = v_x(r, x) \vec{u}_x$ en coordonnées cylindriques adaptées à la situation, et le champ de pression $P(M, t) = P(r, x)$.

L'écoulement est incompressible et homogène donc $\text{div } \vec{v} = 0$: le **débit volumique se conserve à travers la canalisation** qui constitue un tube de champ. La **vitesse est donc constante le long du tuyau de section constante** : elle ne dépend pas de x. On retrouve ce résultat en exprimant la divergence en coordonnées cylindriques :

$$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

Il nous reste donc à préciser la dépendance selon r pour établir le profil de vitesse.

On se place **en régime stationnaire où l'accélération d'une particule de fluide est nulle** (même vitesse au cours du temps).

Vérification : expression de la dérivée partielle de la vitesse

→ Exprimer les forces élémentaires de pression et de viscosité selon (Ox) qui s'exerce sur une particule de fluide comprise entre x et x+dx, et entre 0 et r.

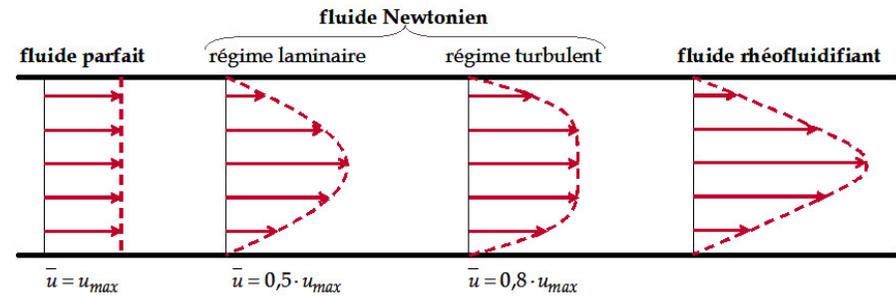
On néglige la pesanteur du fluide car les lignes de courant sont horizontales pour une conduite -> alors $P(r, x) = P(x)$

→ Exploiter le caractère stationnaire de l'écoulement pour obtenir une première équation différentielle reliant les champs de pression et de vitesse pour ensuite obtenir le profil de vitesse :

$$v_x(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2) \quad \text{avec } \Delta P = P(x=0) - P(x=L) \text{ la chute de pression}$$

Résoudre en faisant apparaître $dP/dx = \text{cste}$ et tracer son évolution

Le champ de vitesse présente donc un **profil parabolique**, avec vitesse maximale au centre, et nulle au contact de la paroi latérale (ci-contre en haut).
En revanche **en régime turbulent**, le profil tend vers l'allure ci-dessous : le champ est quasi-uniforme, sauf au voisinage des parois. Précisons que ce profil est établi après un moyennage temporel pour filtrer les effets de la turbulence.



3.3 Écoulement à bas nombre de Reynolds : débit volumique et résistance hydraulique selon la loi de Hagen-Poiseuille

Compétence : dans le cas d'un écoulement à bas nombre de Reynolds établir la loi de Hagen-Poiseuille et en déduire la résistance hydraulique

→ **Loi de Hagen-Poiseuille**

→ Établir la loi de Hagen-Poiseuille qui **relie le débit volumique D_V à la chute de pression ΔP** pour un écoulement laminaire, incompressible et homogène, dans

une conduite : $D_V = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\eta L}$

Retrouvons cette loi en ordre de grandeurs !!!

- bilan global des forces pressantes : $F_{\text{pression}} \sim \Delta P S_{\text{section}} = \Delta P \pi R^2$
- bilan global des forces de viscosité :

$$F_{\text{viscosité}} \sim \eta \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right| S_{\text{LAT}} \sim \eta \frac{U}{R} 2\pi R L = 2\pi \eta U L = 2\pi \eta \frac{D_V}{R^2} L$$

Réalisons l'égalité des forces à l'équilibre : $F_{\text{pression}} \sim F_{\text{viscosité}}$

$$\Delta P \pi R^2 \sim 2\pi \eta \frac{D_V}{R^2} L$$

Donc

$$D_V \sim \frac{R^4}{\eta} \frac{\Delta P}{L}$$

→ Calculer la surpression (en bar) à appliquer en amont d'un écoulement d'huile $\eta \approx 1$ Pl, pour une conduite de 1 cm de diamètre, et pour un débit volumique visé de $0,1 \text{ L}\cdot\text{s}^{-1}$ pour une longueur de conduite $L = 1 \text{ m}$.

Vérifier le caractère laminaire de l'écoulement après avoir estimé la vitesse débitante ($\mu = 900 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ pour l'huile).

→ Résistance hydraulique

Le **débit volumique** et la **différence de pression** étant **proportionnels**, on peut définir la notion de résistance hydraulique par analogie avec l'électrocinétique :

électrocinétique	écoulement laminaire
intensité I	débit volumique D_v
différence de potentiel ΔV	différence de pression ΔP
Résistance électrique $R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{L}{\sigma S}$	Résistance hydraulique $R_{hyd} = \frac{\Delta P}{D_v} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$

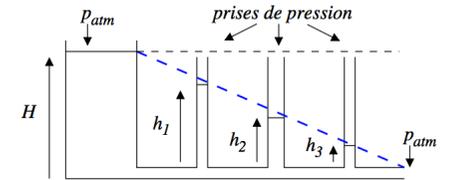
Remarque : la différence de dépendance concernant le rayon R s'explique par une vitesse non uniforme dans le cas de l'écoulement hydraulique.

3.4 Cas général : coefficient de perte de charge selon le régime d'écoulement

→ Chute de pression et coefficient de perte de charge en régime laminaire

La loi de Hagen-Poiseuille montre que la pression chute linéairement avec la longueur du tube : $\Delta P = \frac{8\eta D_V}{\pi R^4} L$

Cette chute de pression, ou perte de charge, serait nulle en l'absence de viscosité.



Nous allons alors chercher à ré-exprimer cette chute de pression en fonction de **nombres sans dimension caractéristiques de l'écoulement**.

On remarque d'abord que le travail des forces de pression $\delta W = -P dV$ montre que la **pression est homogène à une énergie volumique**. Nous allons donc chercher à comparer la chute de pression à l'énergie cinétique volumique de l'écoulement s'effectuant à la vitesse débitante U :

A partir de l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} m U^2$ « classique », on construit donc **l'énergie cinétique volumique** : $E_{c,v} = \frac{1}{2} \mu U^2$

On définit alors un premier nombre sans dimension le **coefficient de perte de charge Λ** , ou **coefficient de friction f** (selon la rugosité de la conduite), pour exprimer la relation entre la perte de charge et cette énergie cinétique :

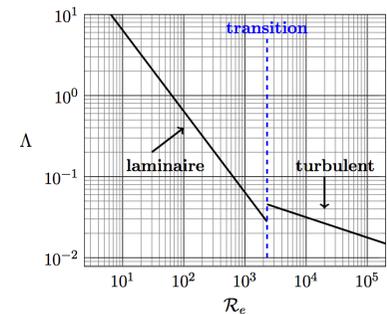
$$\Delta P = \Lambda \left(\frac{L}{D} \right) \frac{1}{2} \mu U^2$$

Il intervient dans cette expression le **nombre sans dimension L/D** , qui est le rapport de la longueur de la conduite par son diamètre. La **chute de pression** est ainsi bien définie : **proportionnelle à la longueur** de la conduite.

→ Montrer que dans le cas du régime laminaire, le coefficient de perte de charge s'exprime « simplement »

$$\text{par : } \Lambda = \frac{64}{Re}$$

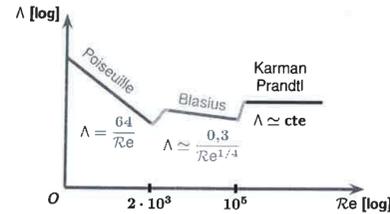
On représente alors la courbe de ce coefficient en fonction du nombre de Reynolds. En représentation log-log, on identifie une pente de -1 pour le régime laminaire, décrit par la loi de Hagen-Poiseuille.



→ **Chute de pression et coefficient de perte de charge en régime turbulent**

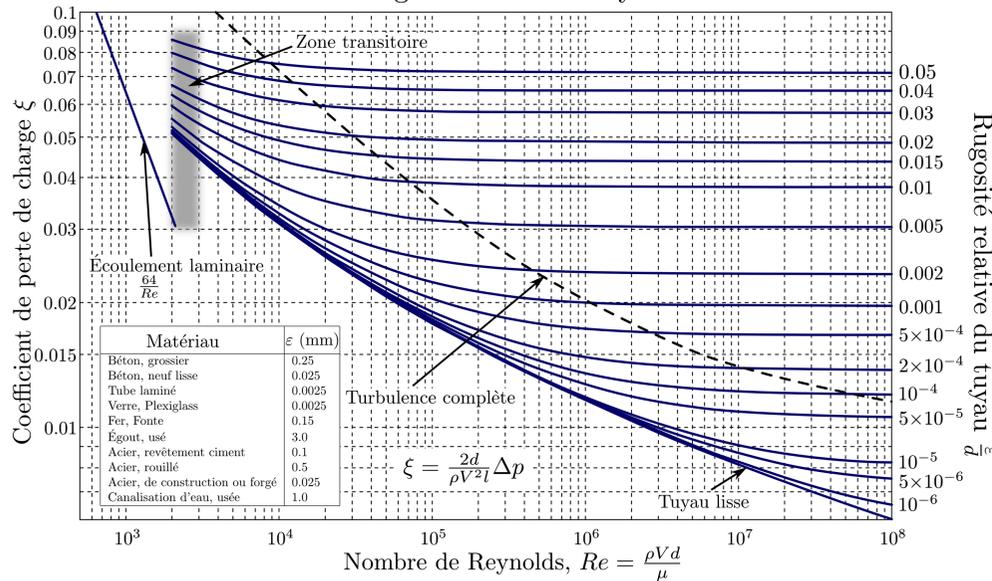
En régime turbulent, aucune théorie générale n'est applicable mais des comportements expérimentaux ont pu être dégagés pour $Re > 2000$.

Quand on néglige la rugosité de la surface de la conduite, le coefficient de perte de charge est assez bien décrit par la formule de Blasius : $\Lambda \cong \frac{0,316}{Re^{1/4}}$ pour $Re < 10^5$ (voir graphe ci-contre).



Lorsqu'on intègre la rugosité de la conduite avec une hauteur typique ϵ des aspérités, on définit un nouveau **nombre sans dimension ϵ/D** qui représente la **rugosité relative**, avec D le diamètre de la conduite. Pour $Re > 2300$, on peut utiliser le diagramme de Moody (1944 ci-dessus), qui repose sur l'équation de Colebrook (1939).

Diagramme de Moody



L'analyse de cette courbe conduit aux conclusions suivantes :

- plus le tuyau est rugueux, plus le coefficient de friction est élevé : il faut un gradient de pression supérieur pour mettre le fluide en mouvement
- on peut aussi y remarquer un coefficient de friction environ constant pour des rugosités non négligeables : la perte de charge est alors proportionnelle à U^2 et donc à DV^2 , alors qu'en régime laminaire elle est proportionnelle au débit. Il faut **diminuer le débit pour diminuer le différentiel de pression** nécessaire, et diminuer les coûts de fonctionnement des pompes assurant l'écoulement.

Remarque : on parle de **perte de charge régulière** dans les cas traités ici, où la conduite est rectiligne (section constante). Dans le cas de coudes, robinets, de changement de section, on parle de **pertes de charge singulières**.

Compétence : exploiter le graphe de la chute de pression en fonction du nombre de Reynolds pour un régime d'écoulement quelconque

→ Evaluer la chute de pression pour un tuyau de longueur $L = 100$ m, de rayon $R = 10$ cm, pour un écoulement de vitesse débitante $U = 1$ m.s⁻¹. La viscosité de l'eau est $\eta = 10^{-3}$ Pa.s avec $\rho = 1000$ kg.m⁻³, avec une rugosité de $\epsilon = 0,26$ mm. Estimer la puissance nécessaire pour maintenir cette écoulement.

3.5 Similarité : transposition des conditions expérimentales

Compétence : exploiter un paramétrage adimensionné permettant de transposer des résultats expérimentaux ou numériques sur des systèmes similaires réalisés à des échelles différentes

Des écoulements sont similaires si leurs nombres de Reynolds sont identiques.

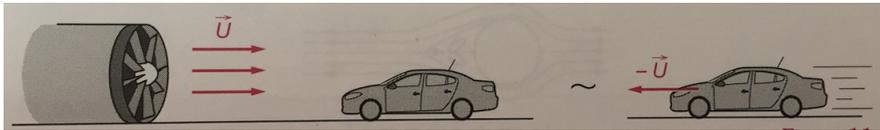
- Des conditions expérimentales différentes (fluide, vitesse, diamètre) peuvent conduire à des écoulements similaires à condition que le nombre de Reynolds reste le même
- Ainsi pour une maquette à l'échelle 1/100, on peut, par rapport à la situation réelle, multiplier la vitesse par environ 10, si on remplace l'air par de l'eau

IV. Écoulement externe incompressible et homogène autour d'un obstacle

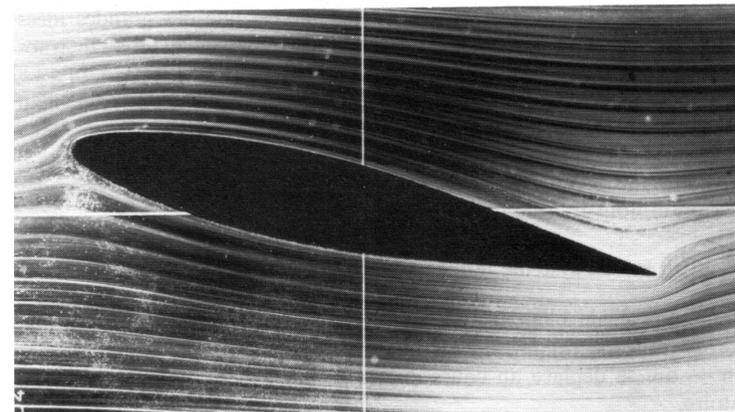
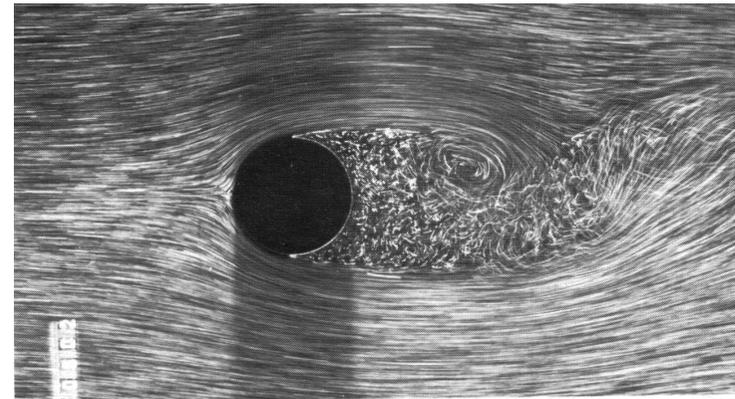
1. Description de l'écoulement, forces de traînée et de portance

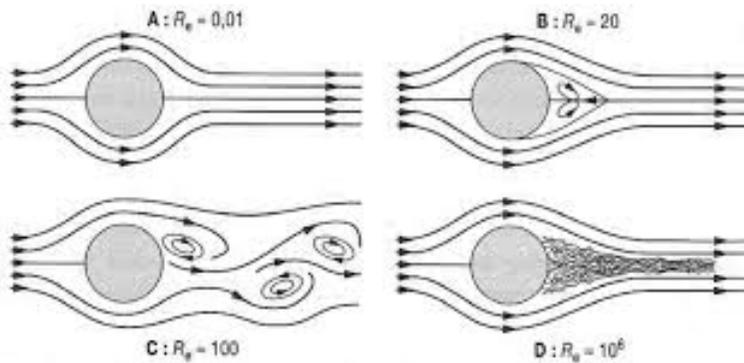
On s'intéresse maintenant à l'écoulement d'un **fluide incompressible autour d'un obstacle** : il est qualifié d'**écoulement externe**, car il est libre, sans contrainte avec une quelconque paroi, au loin de l'obstacle.

Par principe de relativité galiléenne, la situation d'un écoulement de vitesse (uniforme à l'infini) autour d'un obstacle immobile est équivalente à un obstacle en mouvement à la vitesse $-U$ dans un fluide immobile à l'infini. Pour étudier l'aérodynamisme d'un véhicule, on effectuera donc des mesures en soufflerie sur ce véhicule immobile, plutôt que de déplacer le véhicule.



→ Les différents régimes d'écoulement en fonction du nombre de Reynolds



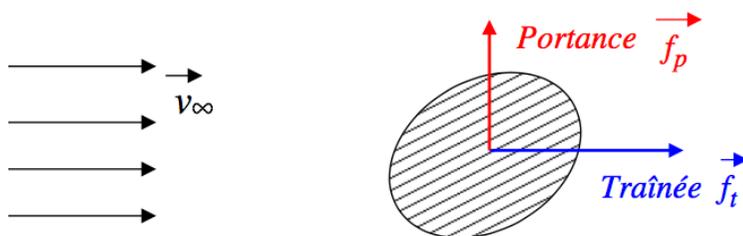


On distingue **différents comportements** d'écoulement **en fonction du nombre de Reynolds**, comme indiqué par l'allure des lignes de courant ci-dessus pour un écoulement autour d'une sphère fixe (comportement similaire pour des objets de formes différentes) :

- (A) à **faible R_e** , typiquement $R_e < 1$: l'écoulement est **laminaire** et symétrique
- (B) pour $R_e \approx 20$, la symétrie entre amont et aval de l'écoulement est rompue, un **sillage apparaît** derrière la sphère, composé d'un anneau tourbillonnaire
- (C) pour $R_e \gtrsim 100$, des structures plus complexes apparaissent dans le sillage, la **dimension des tourbillons augmente**, ils se détachent de la sphère, formant une allée de Bénard-Von Karman
- lorsque $R_e \gtrsim 1000$, le **sillage** devient complètement **turbulent** avec un fort caractère aléatoire des fluctuations spatio-temporelles, l'écoulement n'est **aucunement stationnaire**. Pour $R_e > 10^6$ (D), le sillage finit par se réduire notablement en taille, dissipant moins d'énergie

→ Définitions des forces de traînée et de portance

Le fluide en écoulement exerce sur l'obstacle une action de contact, dont l'origine sont les forces de pression et de viscosité. La force de traînée qui en résulte a déjà été introduite dans le cours de mécanique de PCSI lors de la chute visqueuse d'un objet. Dans le cas le plus général, cette force de contact est modélisée par deux composantes : la **traînée parallèle à la vitesse** de l'écoulement, et la **portance perpendiculaire à la vitesse** (représentées ci-dessous).



Notons ici que la **force de portance est nulle** dans le cas d'un écoulement **autour d'une sphère par symétrie**.

→ Coefficients de traînée et de portance

En l'absence de solution analytique simple pour les écoulements autour d'un obstacle (notamment en régime transitoire ou turbulent), on définit **deux coefficients empiriques, sans dimension, pour modéliser ces forces** :

- le **coefficient de traînée C_x** : $F_t = C_x \frac{1}{2} \mu U^2 S$

- le **coefficient de portance C_z** : $F_p = C_z \frac{1}{2} \mu U^2 S$

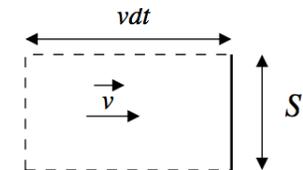
La surface S , appelée maître-couple, représente la surface de contact de l'obstacle avec l'écoulement, il s'agit de la surface projetée de l'obstacle : par exemple perpendiculairement à la vitesse pour C_x . Elle est déterminée en fonction du profilage de l'obstacle.

Le terme $\frac{1}{2} \mu U^2$ est appelé **pression dynamique**, puisque le terme $\mu U^2 S$ est homogène à une force. Cette force peut être interprétée comme la force exercée par le fluide venant frapper une plaque de section S et y étant arrêté (point d'arrêt à vitesse nulle).

En effet, la variation de quantité de mouvement pour le fluide incompressible qui passe d'une vitesse U à 0 est :

$$\delta p = 0 - dm U = -\mu dV U = -\mu (U dt S) U$$

D'où $F_{fluide \rightarrow S} = -\frac{\delta p}{dt} = \mu U^2 S$



2. Notion de couche limite

Compétence : pour les écoulements à grand nombre de Reynolds décrire qualitativement la notion de couche limite

→ Nécessité de la couche limite

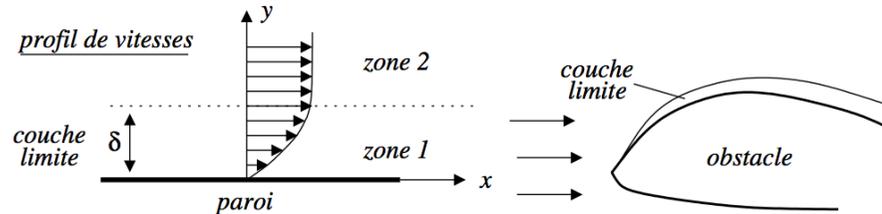
Pour les écoulements à **nombre de Reynolds élevé**, les **effets de la viscosité apparaissent négligeables**. Il est donc légitime de se placer dans le **modèle de l'écoulement parfait au loin de l'obstacle**.

Cependant, la condition d'adhérence impose la nullité de la vitesse tangentielle au contact de l'obstacle, quelque soit R_e . Ainsi **au voisinage immédiat des parois**, il existe une zone, appelée **couche limite**, dans laquelle la **viscosité** est

dominante, imposant une **diminution de la vitesse** de l'écoulement jusqu'à sa **nullité au contact**.

L'**épaisseur de cette couche limite augmente avec la viscosité** du fluide, et **diminue à R_e élevé**, elle s'étend fortement en régime laminaire jusqu'à « envahir » l'écoulement.

En résumé, sur l'illustration de la couche limite ci-dessous, dans la zone 1 -> modèle de l'écoulement parfait, et dans la zone 2 -> fort gradient de vitesse : la viscosité domine.



→ Estimation de l'épaisseur de la couche limite

Il est possible d'estimer en ordre de grandeurs l'**épaisseur δ de la couche limite**. Nous allons comparer l'énergie cinétique volumique de l'écoulement, qui représente l'énergie transportée par convection, à l'énergie volumique dissipée par les forces de viscosité :

- **énergie cinétique volumique, transport par convection** (ou pression dynamique) : $E_{c,V} \sim \mu U^2$

- **énergie volumique dissipée par viscosité** sur l'ensemble de la couche limite, **transport par diffusion**, soit pour une particule de fluide qui parcourt cette couche le long de l'obstacle de taille caractéristique L :

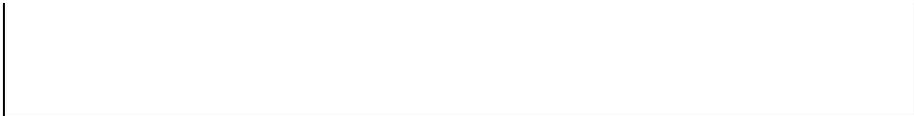
$$dE_{viscosité,V} = \vec{F}_{visc,V} \cdot d\vec{l} \rightarrow E_{viscosité,V} \sim F_{visc} L$$

avec $F_{visc,V} = \eta \Delta v \sim \eta \frac{U}{\delta^2}$: pour la couche limite, la vitesse varie entre U et 0, sa distance caractéristique de variation spatiale est δ .

A la frontière de la couche limite, les effets de convection et de diffusion par viscosité en compétition sont du même ordre : $E_{viscosité,V} \sim E_{c,V}$

$$\text{Soit } \eta \frac{U}{\delta^2} L = \mu U^2 \rightarrow \delta^2 \sim \frac{\eta}{\mu U} L = \frac{\eta}{\mu U L} L^2 = \frac{L^2}{R_e} \rightarrow \boxed{\delta = \frac{L}{\sqrt{R_e}}}$$

→ Estimer l'épaisseur de la couche limite pour une voiture qui roule à la vitesse $U = 100 \text{ km.h}^{-1}$, avec une viscosité de l'air $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s}$.



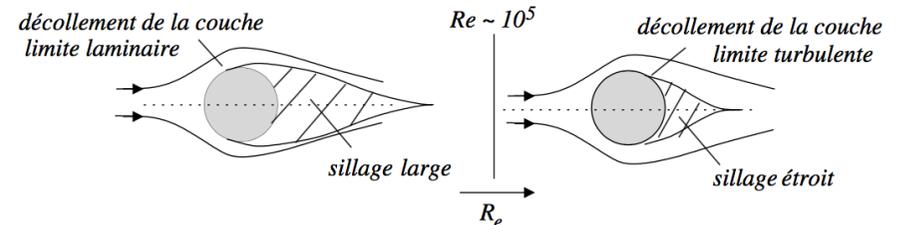
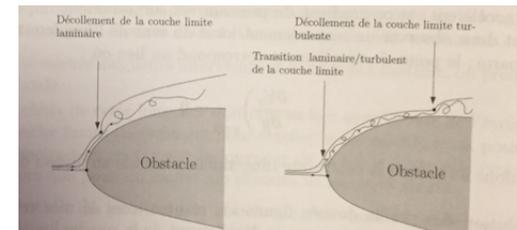
La **couche limite** est très mince par rapport à la taille de l'obstacle, elle demeure **localisée au voisinage immédiat des parois pour un écoulement turbulent**.

Remarque : dans la réalité, cette épaisseur varie sur le contour de l'obstacle (avec le chemin parcouru par exemple).

→ Comportement de la couche limite à grand nombre de Reynolds

Lorsque le **nombre de Reynolds augmente**, la **couche limite s'affine**. A l'apparition du sillage complètement turbulent en aval de l'écoulement correspond un **décollement de la couche limite pour $R_e = 10^3$** . Elle se décolle d'abord en arrière de l'obstacle. Puis, lorsque R_e augmente, les points de décollement migrent en amont de l'obstacle. Le sillage s'élargit (entre (C) et (D) cf paragraphe IV.1), la **force de traînée augmente**.

Enfin, lorsque $R_e \approx 10^6$ l'**écoulement laminaire dans la couche limite devient turbulent**. Ce changement brusque de régime dans la couche limite s'accompagne d'une diminution de la taille du sillage (voir ci-dessous), la couche limite turbulente tient mieux à l'obstacle **réduisant fortement la force de traînée** (diminution du C_x).



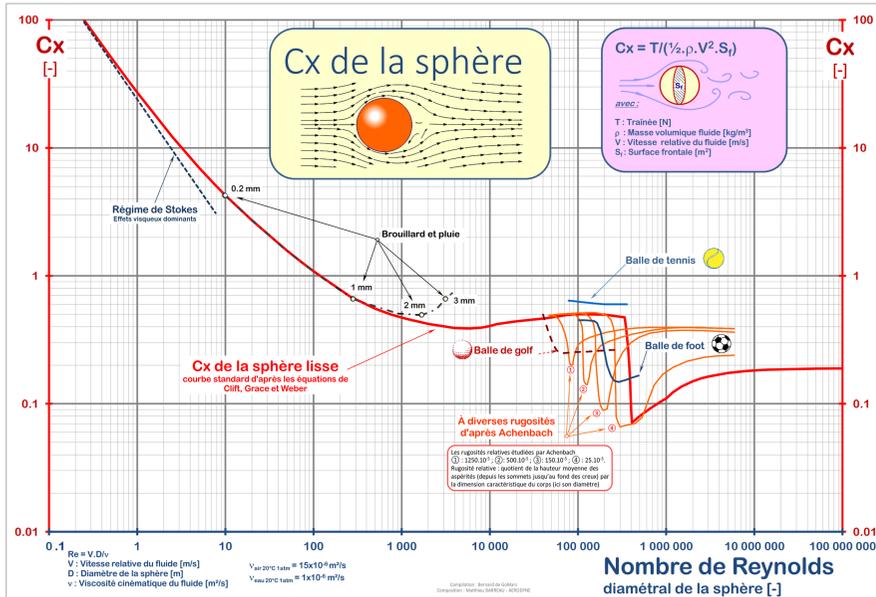
3. Force de traînée subie par une sphère solide

Notions :

- force de traînée subie par une sphère solide en mouvement rectiligne uniforme
- coefficient de traînée C_x
- graphe de C_x en fonction du nombre de Reynolds

→ Résultats expérimentaux : évolution du C_x en fonction de R_e

La courbe ci-dessous, résultant de données expérimentales, représente l'évolution du C_x pour une sphère solide dans un écoulement uniforme, en fonction du nombre de Reynolds.



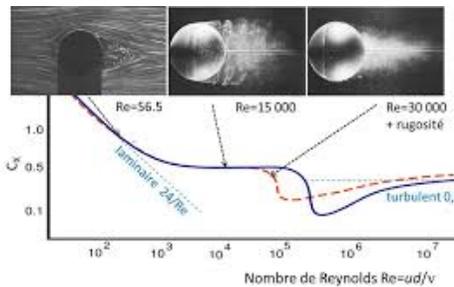
On peut dégager principalement **deux comportements** asymptotiques pour l'évolution du coefficient de traînée :

- en régime laminaire à faible nombre de Reynolds $R_e < 1$: $C_x = 24/R_e$ (pente -1 en log-log).

- en régime turbulent à fort nombre de Reynolds pour $10^3 < R_e < 10^5$: $C_x \approx 1/2$ constant

→ **Modèle de traînée linéaire en régime laminaire**

Compétence : associer une gamme de nombre de Reynolds à un modèle de traînée linéaire ou un modèle quadratique



→ A partir de l'expression de $C_x = 24/R_e$, établir l'expression de l'intensité de la force de traînée F_t .

A faible R_e : $R_e < 1$, la force de traînée vérifie la formule de Stokes, valable en l'absence de transport par convection : $\vec{F}_t = 6\pi \eta R \vec{U}$
C'est le **modèle de traînée linéaire** que nous retiendrons pour un écoulement laminaire.

Pour une sphère se déplaçant à la vitesse \vec{v} dans un fluide, la force de traînée exercée sur la sphère est $\vec{F}_t = -6\pi \eta R \vec{v}$

Nous remarquons que la force de traînée est alors indépendante de la masse volumique du fluide : les **effets inertiels, transport par convection**, sont dominés par la viscosité, transport par diffusion. Le fluide n'est pas « arrêté » par l'obstacle mais glisse autour de celui-ci, la force de traînée est associée au frottement du fluide sur la sphère : on parle de **traînée de frottement**.

Remarque : la résultante des forces de pression est nulle car l'écoulement est symétrique entre amont et aval.

→ **Modèle de traînée quadratique en régime turbulent**

Compétence : associer une gamme de nombre de Reynolds à un modèle de traînée linéaire ou un modèle quadratique

A fort R_e la force de traînée s'exprime par $\vec{F}_t = C_x \frac{1}{2} \rho U \vec{U} S$
C'est le **modèle de traînée quadratique** que nous retiendrons pour un écoulement turbulent.

En régime turbulent, la traînée est donc proportionnelle au carré de la vitesse, et à la masse volumique, intégrant les **effets inertiels dominants** (la viscosité n'intervient plus). La force a pour origine une pression plus faible dans la zone de sillage qu'en amont, l'écoulement n'est plus symétrique. Dans la pratique, le coefficient C_x peut être ajusté par modification du profil aérodynamique, notamment pour diminuer la traînée des véhicules, des ailes d'avion....

Compétence : évaluer un nombre de Reynolds pour choisir un modèle de traînée linéaire ou un modèle quadratique

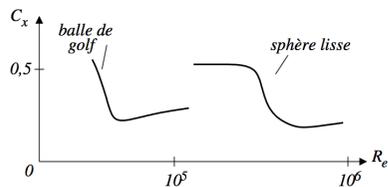
Application : force de traînée sur une balle de tennis

Une balle de tennis est servie à $v = 200 \text{ km.h}^{-1}$. Son rayon est $R = 3,3 \text{ cm}$, la viscosité dynamique de l'air est de $1,8.10^{-5} \text{ Pa.s}$.

Evaluer le nombre de Reynolds de cet écoulement, puis la force de traînée subie par la balle. On prendra $C_x = 0,6$ (voir graphe de C_x en fonction de Re).

Evaluer la puissance nécessaire à développer pour le serveur. Puis comparer la force de traînée au poids de la balle, de masse $m = 58 \text{ g}$.

→ Focus sur une singularité à Re élevé : la crise de traînée

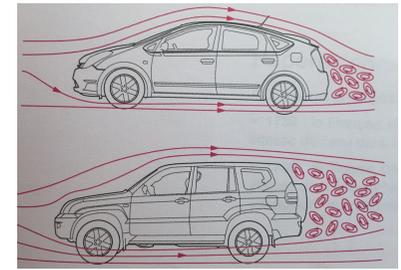
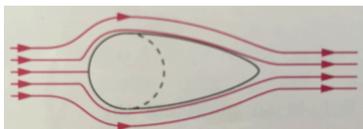


Pour une sphère lisse et $Re > 3.10^5$, on observe une chute brutale du coefficient de traînée. L'écoulement au sein de la couche limite devient turbulent, le sillage est donc réduit comme la zone de faible pression, ce qui **diminue brutalement la force de traînée**. C'est la **crise de traînée**.

Les irrégularités de surface amplifient ce phénomène, et pour des sphères rugueuses, cette transition se produira pour un nombre de Reynolds plus faible (voir ci-dessus). Cette crise de traînée est mise à profit dans le cas des balles de golf pour réduire leur traînée et augmenter leur portée !

→ Influence du profilage sur la traînée : au-delà de l'obstacle sphérique

Nous avons vu que le coefficient de traînée augmente lorsque le sillage en aval augmente. Une solution pour limiter ce décollement de la couche limite, et la force de traînée, est le **profilage de l'obstacle** : on peut l'allonger en direction de l'aval de l'écoulement pour limiter l'étendue du sillage (ci-contre). La forme des casques des cyclistes adopte cette solution.



Prenons le cas des deux véhicules présentés ci-contre.

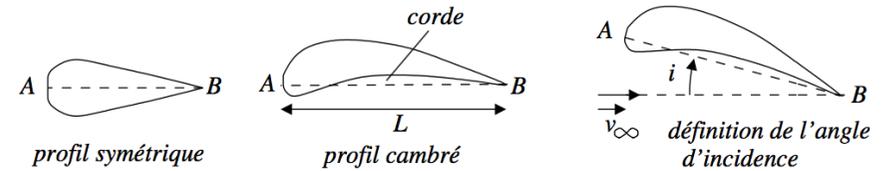
La voiture du haut est assez bien profilée : on parle d'une carrosserie du type « fastback », descendant assez continuellement depuis le toit jusqu'à son arrière.

En revanche, l'autre véhicule est mal profilé : carrosserie « hatchback », engendrant un décollement plus fort de la couche limite, et une traînée supérieure.

4. Traînée et portance d'une aile d'avion

→ Description du profil d'une aile et de son angle d'incidence

Une aile d'avion est un **obstacle profilé** pour lequel on attend une **faible traînée** et une **portance notable**. Les coefficients de traînée C_x et de portance C_z dépendent du nombre de Reynolds mais aussi de l'**inclinaison de l'aile** (voir ci-



dessous). En vol stationnaire, la force de portance devra compenser le poids. On définit aussi la **finesse $F = C_z / C_x$** : on aura intérêt à obtenir la finesse la plus élevée possible.

Pour un **angle d'incidence nul** et un **profil symétrique**, la **portance est nulle**.

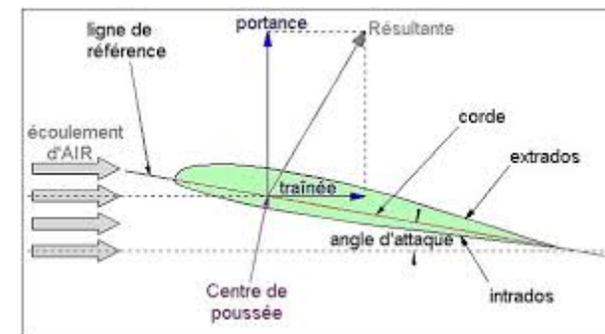
La partie dorsale de l'aile est appelée **extrados**, sa partie ventrale l'**intrados**. L'**extrados** est toujours plus convexe que l'intrados, qui peut être concave ou plane. La partie de l'aile de courbure maximale et faisant face à l'écoulement est le **bord d'attaque**, l'autre est le **bord de fuite**, reliés par un segment, la **corde**.

L'**angle d'incidence** (ou d'attaque, positif ou négatif) est l'angle entre la direction du vent relatif et la corde.

Le **maître couple S** intervenant dans la définition des coefficients de traînée et de portance est le produit de la corde par l'envergure : $S = \text{corde} * L_{env}$.

→ Forces de traînée et de portance

Ces forces sont orientées selon le schéma ci-dessus. Leur point

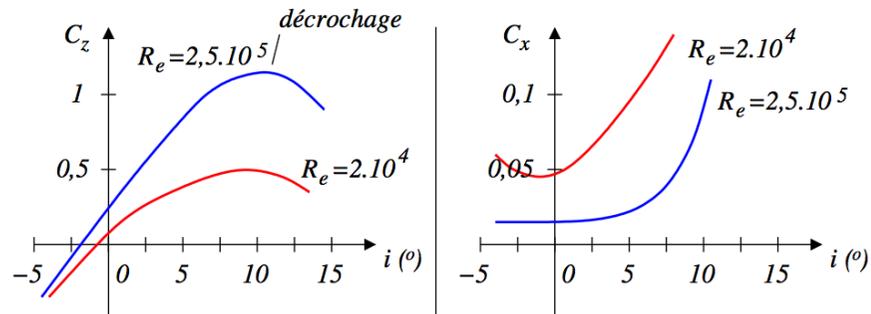


d'application est le centre de poussée de l'aile. Dans le cas d'un profil cambré ou d'une incidence non-nulle, on constate que l'écoulement est dévié par la présence de l'aile (voir illustration en IV. 1). Il existe donc une accélération verticale du fluide, et, par le théorème des actions réciproques (3^{ème} loi de Newton), une force qui s'exerce sur l'aile de sens opposé, dirigée vers le haut : la portance.

→ Influence de l'angle d'incidence et du nombre de Reynolds

Les courbes ci-dessous montrent l'allure des coefficients de traînée et de portance en fonction de l'angle d'incidence pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. Pour un avion, les valeurs de R_e sont élevées.

• influence du nombre de Reynolds

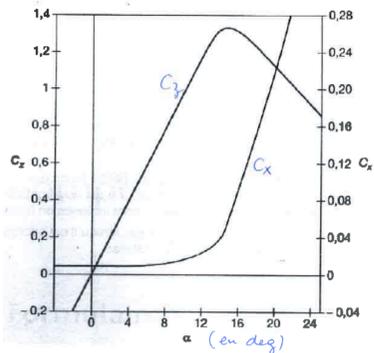


- le coefficient de portance C_z a tendance à augmenter avec R_e
- le coefficient de traînée C_x est faible, et il diminue quand R_e augmente
- C_z est supérieur à C_x aux angles d'incidence faibles

• influence de l'angle d'incidence

Compétence : exploiter les graphes de C_x et de C_z en fonction de l'angle d'incidence

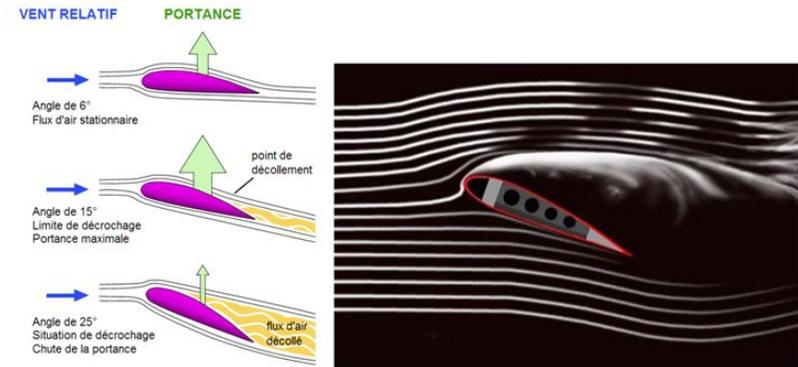
Le graphe ci-contre présente les variations des coefficients en fonction de l'angle, pour $R_e \approx 10^6$.



- pour des angles faibles, la **traînée est très faible** $C_x \approx 0,01$ grâce au profilage, elle augmente faiblement et quasi linéairement avec l'incidence, on note un changement brusque de comportement pour une incidence supérieure à 15°
- la **portance augmente nettement avec l'angle d'incidence**. La vitesse est en fait plus élevée sur

l'extrados que l'intrados, provoquant une différence de pression par circulation de la vitesse autour de l'aile, ce qui engendre la portance. Mais **au-delà de 15°** , on observe aussi un **changement de régime avec diminution forte de la portance**. http://web.mit.edu/13.021/13021_2003/Lifting%20surfaces/lectureC.htm

On parle alors de **décrochage**, à éviter absolument, car il conduit à la **chute de**



Décrochage de l'aile en soufflerie et schéma explicatif

l'avion difficile à maîtriser. Le décrochage est caractérisé par un décollement de la couche limite, directement en aval du bord d'attaque (voir illustration précédente). Un sillage turbulent apparaît sur la quasi-totalité de l'extrados.

Pour retarder l'apparition du décrochage, et permettre des portées importantes à plus faibles vitesses, il faut contrôler la couche limite. Les techniques utilisées sont :

- optimiser la forme et la rugosité de la surface de l'aile
 - utiliser des volets de bord d'attaque (fig 28) pour injecter de l'air à haute vitesse sur l'extrados et retarder le décollement
 - utiliser des volets de bord de fuite (fig 28) pour réorienter une plus grande quantité d'air vers l'intrados, et augmenter la portance
- Les volets sont surtout déployés à l'atterrissage pour obtenir une portance plus élevée à faible vitesse.

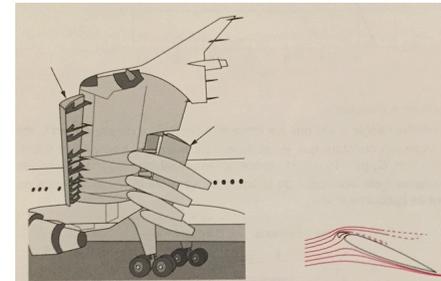
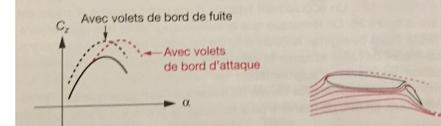
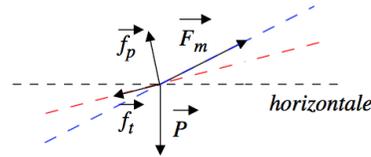
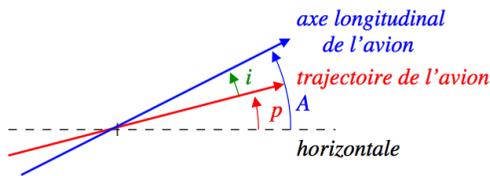


Figure 28

→ Exemples illustrant la mécanique d'un vol

Compétence : définir et orienter les forces de portance et de traînée

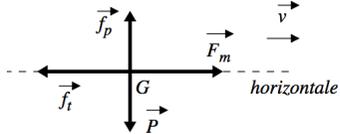




La trajectoire et la configuration de vol de l'avion dans l'espace sont définis à l'aide de trois angles orientés représentés sur la figure ci-après :

- la pente p , angle entre l'horizontale et la trajectoire de l'avion
- l'assiette A , angle entre l'horizontale et l'axe longitudinal de l'avion
- l'incidence i , angle entre la trajectoire de l'avion et son axe longitudinal

L'avion est soumis à quatre forces : son poids, la force motrice selon l'axe longitudinal de l'avion, la traînée opposée à la trajectoire et la portance perpendiculaire à la trajectoire.



Dans le cas d'un vol horizontal ($p = 0$) à vitesse constante, et avec une incidence nulle ($i = 0$), le schéma des forces prend alors la forme simplifiée :

Le vol à vitesse constante impose :

$$\vec{f}_t + \vec{f}_p + \vec{F}_m + \vec{P} = \vec{0}$$

Et en particulier, par projection et en norme : $F_m = f_t$ et $P = f_p$, ce qui donne pour la force motrice :

$$F_m = \frac{mg}{C_z/C_x} = \frac{mg}{f}$$

où $f = C_z / C_x$ est la finesse

La **force motrice nécessaire est donc d'autant plus faible** que la **finesse** de l'avion est **grande**. La finesse d'un planeur est d'environ 50, celle d'un avion de ligne environ 15.

Connaissant les graphes des coefficients C_z et C_x en fonction de l'incidence, on peut tracer **la polaire donnant C_z en fonction de C_x** . Il est alors possible de lire la valeur de la finesse sur la polaire.

Ci-contre la polaire

$$C_L = C_z = f(C_D = C_x)$$

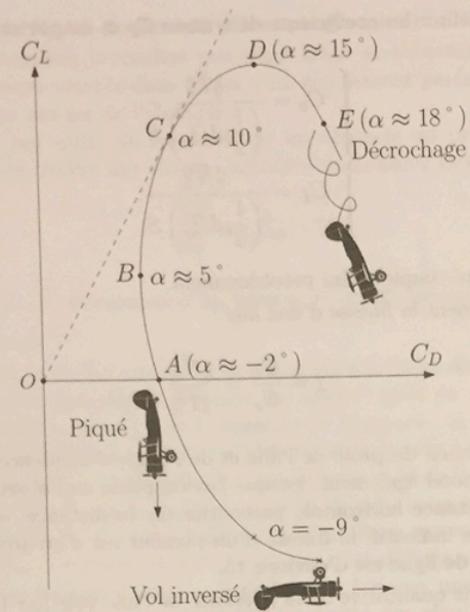


FIGURE 18 - Allure classique d'une polaire

- Le point A de la polaire, correspond à $C_L = 0$. L'angle α correspondant est presque toujours négatif.
- Le point B de la polaire est le point de traînée minimale. Une aile positionnée sous cette incidence permettra d'obtenir une vitesse maximale.
- Le point C de la polaire, tel que (OC) soit tangent à la polaire est le point de finesse maximum, correspondant à une incidence idéale. L'angle correspondant (d'environ 10°), est l'angle sous lequel l'avion doit voler, par vent nul, pour obtenir un rayon d'action maximal.
- Le point D de la polaire, correspondant à un maximum de C_L , détermine l'angle permettant, pour une vitesse donnée, d'emporter une charge maximale. Attention; au delà de ce point, il y a risque de décrochage!
- Le point E de la polaire, correspond à l'angle de décrochage qui est environ de 18° .
- Si la polaire représentée est celle d'une aile, la polaire de l'aéronef correspondant est décalée vers la droite : en effet, lorsque l'aile est fixée à l'aéronef, vont venir s'ajouter des traînées supplémentaires dues au fuselage, aux empennages, aux moteurs, etc., ainsi qu'aux interactions entre tous ces éléments.

Ce qu'il faut retenir !!

- **Le nombre de Reynolds** Re d'un écoulement vaut :

$$Re = \frac{\mu v L}{\eta}$$

où μ est la masse volumique du fluide, η sa viscosité dynamique, v sa vitesse caractéristique et L l'échelle spatiale caractéristique.

Pour un écoulement dans une conduite cylindrique de rayon R , $L = 2R$ et $Re = \frac{\mu v(2R)}{\eta}$. Si $Re \leq 2000$, l'écoulement est **laminaire**. Il est **turbulent** si $Re \geq 3000$.

- Le **profil de vitesse** pour un écoulement laminaire dans une conduite cylindrique est parabolique. À plus grande vitesse, le profil est quasiment uniforme, sauf aux abords de la surface du tuyau.

• **La loi de Hagen-Poiseuille** exprime la différence de pression à appliquer pour maintenir un écoulement stationnaire laminaire ($Re \leq 2000$) dans une conduite cylindrique de rayon R et longueur L :

$$\Delta P = R_h D_V \quad \text{où} \quad R_h = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$$

est la **résistance hydraulique**. La loi de Hagen-Poiseuille est l'analogue de la loi d'Ohm en électrocinétique.

Pour un écoulement turbulent, les lois sont plus complexes et font notamment intervenir la rugosité de la surface de la conduite. Des abaques permettent de réaliser des estimations des chutes de pression ayant lieu.

- Pour un écoulement d'un fluide incompressible (masse volumique μ et viscosité η) autour d'un obstacle fixe, on définit les **forces de traînée** \vec{F}_t (resp. de **portance** \vec{F}_p) comme la force due à l'écoulement et parallèle (resp. perpendiculaire) à la vitesse de l'écoulement au loin notée \vec{U} .

Les coefficients de traînée C_x et de portance C_z se définissent par :

$$F_t = \frac{1}{2} \mu C_x S U^2 \quad F_p = \frac{1}{2} \mu C_z S U^2$$

où S est la section de l'objet ($S = \pi R^2$ pour une sphère de rayon R).

C_x et C_z ne sont fonctions que du nombre de Reynolds de l'écoulement pour un obstacle donné.

À faible nombre de Reynolds ($Re \leq 1$), la force de traînée exercée sur une sphère suit la **loi de Stokes** : elle est proportionnelle à la vitesse \vec{U} , soit :

$$\vec{F}_t = 6\pi\eta R\vec{U}$$

Pour des écoulements turbulents ($10^3 < Re < 10^5$), la force de traînée est quadratique en la vitesse :

$$\vec{F}_t = \frac{1}{2} \mu C_x \pi R^2 U \vec{U}$$

avec $C_x \simeq 0,4$ pour une sphère.

Au-delà, la force de traînée baisse brusquement (crise de traînée), du fait d'un détachement plus tardif de la couche limite.

Pour une sphère en mouvement à la vitesse \vec{v} dans un fluide immobile au loin, les expressions restent valables en remplaçant \vec{U} par $-\vec{v}$.

Complément de cours : polaire d'une aile d'avion

L'air exerce sur l'aile une force appelée « résultante aérodynamique » notée \vec{R} . Cette force peut s'écrire comme la somme vectorielle de deux composantes, la **traînée** \vec{R}_x colinéaire à la vitesse $\vec{V} = V \vec{e}_x$ de l'avion par rapport à l'atmosphère (et de sens opposé) et la **portance** \vec{R}_z perpendiculaire à cette vitesse.

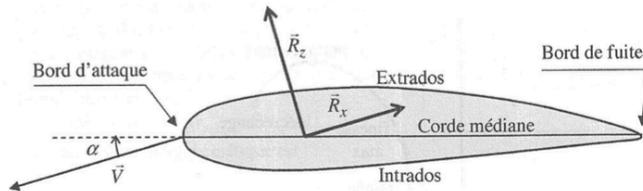
Dans la suite l'avion est supposé voler de telle sorte que la portance soit comprise dans le plan vertical.

Les coefficients sans dimension C_x (de traînée) et C_z (de portance) sont définis par :

$$C_x = \frac{\|\vec{R}_x\|}{\frac{1}{2} \rho S V^2} \quad \text{et} \quad C_z = \frac{\|\vec{R}_z\|}{\frac{1}{2} \rho S V^2}$$

où ρ est la masse volumique du fluide (de l'air ici) et S la **surface alaire** c'est-à-dire l'aire de la projection de l'aile sur un plan parallèle à sa corde médiane, qui va du bord d'attaque au bord de fuite (voir le schéma).

L'angle α est appelé angle d'incidence.

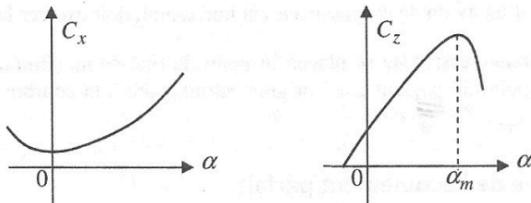


La traînée résulte des forces de viscosité et des forces de pression s'exerçant sur l'aile. Elle est minimale au voisinage de l'incidence α nulle, c'est-à-dire quand l'aile se glisse dans l'écoulement. Elle augmente avec l'incidence, de plus en plus vite (courbe croissante de concavité tournée vers le haut).

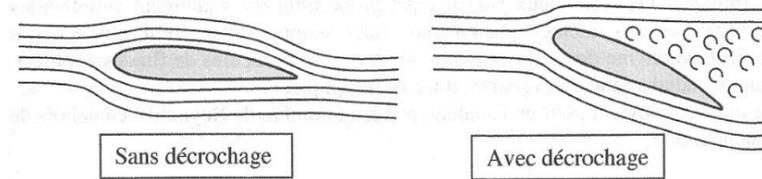
La portance est très faible à incidence nulle (elle est même nulle si le profil de l'aile est symétrique) puis elle augmente de façon pratiquement linéaire, jusqu'à atteindre un maximum, pour un angle d'incidence α_m généralement compris entre 15° et 20° .

Ensuite la portance s'effondre très vite (décrochage).

Les courbes ont l'allure suivante :



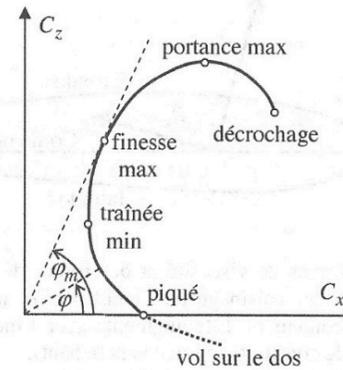
Lors du décrochage, l'allure de l'écoulement change, les lignes de courant ne suivent plus l'extrados et se disloquent en tourbillons.



La courbe $C_z = f(C_x)$ tracée pour différentes valeurs de l'angle d'incidence α est appelée **polaire**. Elle a l'allure ci-dessous.

Parmi les points remarquables, il y a les points correspondants au maximum de la portance et au minimum de la traînée, le point de portance nulle correspondant à un vol en piqué, et le point de décrochage.

On peut, en modifiant la définition de C_z , considérer une partie de courbe où $C_z < 0$, c'est-à-dire où la portance est orientée vers le ventre de l'avion, ce qui correspond à un vol sur le dos.



La finesse est le rapport $f = \frac{C_z}{C_x} = \tan \varphi$, on peut montrer () que

le moteur d'un avion de masse m en vol horizontal, doit exercer la force $\frac{mg}{f}$.

Il est donc intéressant de se placer au point de finesse maximum, obtenu quand la droite en pointillé passant par l'origine est tangente à la courbe. En ce point, on a $f_m = \tan \varphi_m$.