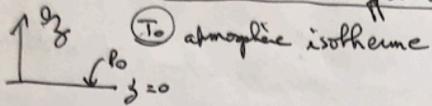


1. Quelle est la différence entre aérostat et sous-marin ?



→ Cas de l'aérostat :

• Déf. du système : ballon + nacelle + enveloppe du ballon seulement  
 ballon masse  $m$  avec volume  $V$  constant pour la nacelle ballon (la pression varie peu entre le sol et l'altitude max.)

Le ballon est rempli d'un gaz  $\ominus$  dense que l'air, comme de l'hélium de masse molaire  $M_{He}$ .

L'hélium comme l'air st considérés comme des g.p.

masse molaire de l'air  $\rightarrow P_{air} = \frac{P M_{air}}{R T_0}$

$P_{He} = \frac{P M_{He}}{R T_0}$

La pression varie avec l'altitude  $\rightarrow P = P(z) \downarrow$  pdt  $z \uparrow$   
 sans supposer ici de modèle particulier.

• Evolution de l'altitude de l'aérostat

Bilan des forces  $\rightarrow -mg \vec{e}_z + \underbrace{P_{air} V g \vec{e}_z}_{\text{force d'Archimède pour le volume d'air déplacé}} - \underbrace{P_{He} V g \vec{e}_z}_{\text{force du gaz dans le ballon}}$

Rq) On considère le fluide à l'éq. pdt la montée du ballon.

La ballon monte si  $-mg - P(z) \frac{M_{He}}{R T_0} V g + P(z) \frac{M_{air}}{R T_0} V g > 0$

$\rightarrow -m + P(z) \times \frac{V}{R T_0} (M_{air} - M_{He}) > 0$

$P(z) > \frac{m R T_0}{V (M_{air} - M_{He})} \rightarrow$  condit° respectée au décollage

puis  $z \uparrow$  et  $P(z) \downarrow$  l'altitude d'équilibre sera  $z_{max}$

$P(z_{max}) = \frac{m R T_0}{V (M_{air} - M_{He})}$

→ Cas du sous-marin :

• Déf. du syst : sous-marin de masse  $m$ , de volume  $V$  évoluant à une profondeur  $h$   
 fluide incompressible  $\rightarrow P(h) = P_0 + \rho_{eau} g h$

• Evolution de la profondeur du sous-marin

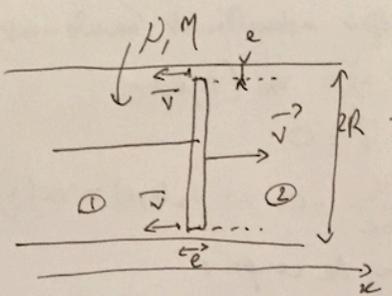
Bilan des forces  $- \underbrace{mg \vec{e}_z}_{\text{poids}} + \underbrace{m_f g \vec{e}_z}_{\text{m fluide}}$

Le sous-marin coule naturellement (balastes vidées)

car  $m > m_{fluide} \rightarrow -mg + m_f g < 0$

La profondeur  $h$  n'intervient pas ! Cette condit° reste satisfaite (si les balastes sont remplies pour le stabiliser à une profondeur donnée)

Amortisseur hydraulique pour aller + loin

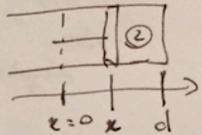


$\vec{v} = v_x \vec{x}$  fluide incompressible

$e \ll R$

- a) Le volume d'huile entre piston et fond de l'amortisseur varie. Le fluide incompressible se déplace donc vers la gauche car il est chassé  $\rightarrow \nabla$  avec  $\vec{v}$  vitesse débitante de ②  $\rightarrow$  ①
- b) En se déplaçant le piston entraîne un écoulement à la même vitesse de côté ② avec un débit  $v \times S = v \pi (R-e)^2 \approx v \pi R^2$  du côté ②.

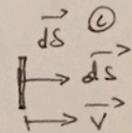
On peut aussi raisonner avec un schéma



Volume ② =  $\pi R^2 (d-x)$

$Dv_{②} = - \frac{dVolume_{②}}{dt} = - \pi R^2 \frac{dx}{dt} = - \pi R^2 v$

En prenant un débit positif du fluide dans ②



Le débit se conserve pour le fluide incompressible ( $div \vec{v} = 0$ )

Donc  $Dv_{①} = Dv_{②} \rightarrow - \pi R^2 \vec{v} = \pi R^2 v$



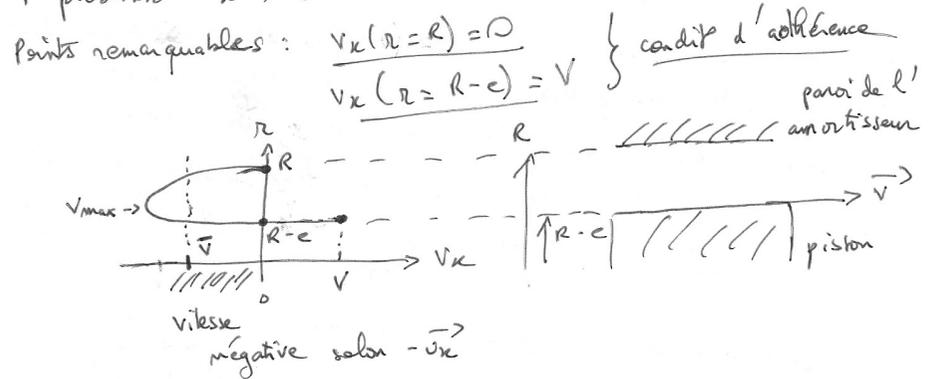
$S_1 \approx \pi R e$   
 surface à considérer pour le débit ① (de ②  $\rightarrow$  ①)

donc  $\vec{v} = - \frac{R}{2e} v$   $\rightarrow$  la vitesse débitante est bien + grande entre le piston et la paroi!

$\hookrightarrow$  son sens est opposé à la vitesse du piston.  $\frac{R}{e} \gg 1$

- c) On choisit  $\vec{v} = v_x(r) \vec{x}$  en effet naturellement écoulement selon  $\vec{x}$ . Par symétrie  $v_x(r, \theta, x) = v_x(r, x)$  avec fluide incompressible  $div \vec{v} = 0$   
 $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \rightarrow v_x(r, x) = v_x(r)$

Représentons  $v_x(r)$  selon un schéma de coupe :



- d) Comme dans le cas d'un écoulement dans une conduite cylindrique, il faut un gradient de pression pour associer un débit à l'écoulement  $\rightarrow$  écoulement sur une colonne cylindrique i.e.
- $\Delta$  La force motrice de l'écoulement n'est pas un gradient de pression comme dans Poiseuille mais le déplacement du piston (paroi intérieure cylindrique) qui impose le gradient de pression par l'intermédiaire des forces de viscosité.

d) Imaginons qu'il n'y ait pas de gradient de pression. Alors, la seule force s'exerçant sur une particule de fluide est la résultante des forces de viscosité. Pour un écoulement tel que celui indiqué sur la figure 56 et sans gradient de pression, on comprend que le mouvement de la plaque du haut pousse le fluide vers la droite, avec le profil de vitesse indiqué en pointillés colorés sur la figure 55.

Des vitesses dirigées vers la gauche nécessitent un gradient de pression, avec une pression plus importante sur la droite que sur la gauche (Fig. 57) :  $P_2 > P_1$ .

e) Les gradients de vitesse sont bien plus élevés qu'en l'absence de gradient de pression, situation correspondant à une plaque glissant sur un support lubrifié. La force de cisaillement est alors beaucoup plus élevée, ce qui crée une assez forte différence de pression. Ainsi, la force de pression engendrée est reportée sur toute la section droite du piston.

f) Considérons un volume  $dx dy dz$  de fluide entre le piston et le bord du cylindre (Fig. 58).

**Remarque**  
On néglige le poids.

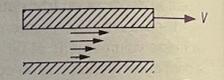


Figure 56

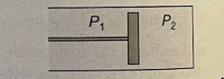


Figure 57

**Remarque**  
On utilise une géométrie plane justifiée par le fait que  $e \ll R$ .

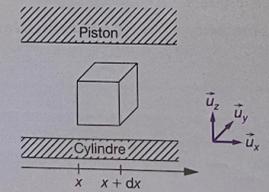


Figure 58

Le bord supérieur est soumis à  $\eta \frac{\partial v_x}{\partial z}(z+dz) dx dy$  et le bord inférieur à  $-\eta \frac{\partial v_x}{\partial z}(z) dx dy$ .

**Remarque**  
Le moins provient du principe des actions réciproques.

Au final, la force de viscosité subie par ce volume est :

$$d\vec{F}_v = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} dx dy dz \vec{u}_x$$

la même oui!!

La force de pression est :

$$d\vec{F}_p = (P(x) dy dz - P(x+dx) dy dz) \vec{u}_x = -\frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz \vec{u}_x$$

Tant que le piston ne subit pas de très fortes accélérations, ces forces se compensent quasiment :  $dF_v \approx dF_p$ . En ordres de grandeur, cela donne :

$$\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \approx -\frac{\partial P}{\partial x} \text{ soit } \eta \frac{\bar{v}}{e^2} \approx \frac{P_2 - P_1}{\ell}$$

**Remarque**  
Un calcul plus précis mène bien à ce résultat, mais avec un préfacteur numérique de  $\pi$ .

Ensuite, la force de pression subie par le piston est :

$$|F| = (P_2 - P_1) \pi R^2 \approx \eta \ell \frac{\bar{v}}{e^2} R^2 \approx \eta \ell V \frac{R^3}{e^3}$$

**Remarque**  
La surface latérale du piston est  $2\pi R\ell$ .

À titre de comparaison, la force de viscosité exercée sur le piston est :

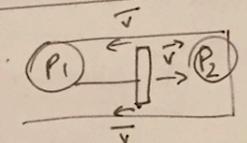
$$|F'| \approx \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} 2\pi R\ell \approx \eta \frac{\bar{v}}{e} R\ell \approx \eta \ell V \frac{R^2}{e^2}$$

Ainsi,  $|F'| \ll |F|$  car  $e \ll R$ .  
Le dispositif est donc très efficace, suite à la différence de pression qu'il engendre de part et d'autre du piston.

e) En l'absence de gradient, on est dans le cas de la plaque glissant sur un support lubrifié.

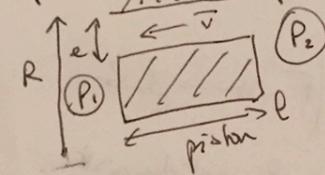
Ici on a une variat<sup>on</sup> spatiale de vitesse forte : de  $-\bar{v}$  à  $\bar{v}$  (avec  $\bar{v} \gg \bar{v}'$ ) sur une faible distance  $e$ , bien  $\oplus$  forte.

Donc fort gradient  $\frac{\partial v_x}{\partial z}$   
 $\hookrightarrow$  Donc on a une  $\bar{v}$  forte de viscosité (de cisaillement) très élevée qui crée une forte différence de pression.



Cette force de pression engendrée est reportée sur toute la section du piston et permet de "modérer" son mouvement.

f) Minimum de calcul  $\rightarrow$  ordre de grandeurs  
pour amortisseur  
considérons un bilan global pour le fluide compris entre le piston et la paroi de l'amortisseur.



La force de viscosité dans le fluide est selon  $\vec{u}_x$  (tangentielle)  
La surface à considérer est  $S_{\text{latérale}} = 2\pi R\ell$  (tangentielle)  
 $|F_{\text{visc}}| \approx \eta \left| \frac{\partial v_x}{\partial z} \right| S \approx \eta \frac{\bar{v}}{e} 2\pi R\ell$

Cette force de cisaillement impose la force de pression qui vaut globalement  $\Rightarrow$  la pression s'exerce sur la colonne d'épaisseur  $e$  ( $L \approx \bar{v}$ )  
 $(\Delta P = P_2 - P_1)$

$$|F_{\text{pression}}| = \Delta P \times S = \Delta P \times 2\pi R e$$

donc à l'équilibre  $|F_{\text{visc}}| \approx |F_{\text{pression}}|$   
 $\eta \frac{\bar{v}}{e} 2\pi R\ell = \Delta P \times 2\pi R e$   
$$\Delta P = \eta \frac{\bar{v}}{e^2} \ell$$

Autre correction :



## Exercice 7 : Sphère pulsante

1. ▶ En régime permanent établi, l'écoulement est piloté par le mouvement de dilatation de la sphère. Celui-ci est invariant par rotation autour de l'origine  $O$  tout comme la forme de la sphère. Ainsi, le champ des vitesses est uniquement fonction de  $r$ . De plus, l'excitation est purement radiale donc les déplacements engendrés dans le fluide et le champ des vitesses résultant le sont aussi. On cherche donc un champ des vitesses de la forme

$$\vec{v}(r, t) = v_r(r, t) \vec{u}_r.$$

▶ L'écoulement étant incompressible, le débit volumique se conserve le long d'un tube de courant. En géométrie sphérique, l'espace compris entre deux sphères concentriques est un tube de courant particulier. Si on considère deux sphères de rayons  $R_1$  et  $R_2$ , il en résulte que les débits volumiques les traversant sont égaux. De façon équivalente, le débit volumique ne dépend pas de  $r$ . Il dépend en revanche *a priori* du temps.

▶ Calculons le débit volumique sortant à travers la sphère de rayon  $r$  :

$$D_v(t) = \iint_{(S)} \vec{v} \cdot \vec{dS} = \iint_{(S)} (v_r(r, t) \vec{u}_r) \cdot (dS \vec{u}_r) = \iint_{(S)} v_r(r, t) dS.$$

Puisque la sphère  $(S)$  de rayon  $r$  est le lieu d'équation  $r = \text{cte}$ ,  $v_r(r, t)$  peut être factorisé et :

$$D_v(t) = v_r(r, t) \iint_{(S)} dS = v_r(r, t) 4\pi r^2.$$

Il en résulte que  $v_r(r, t)$  est de la forme

$$v_r(r, t) = \frac{f(t)}{r^2} \quad \text{où } f(t) \text{ est une fonction du temps à déterminer.}$$

▶ Ce sont les conditions aux limites sur la sphère qui déterminent cette fonction du temps. En effet, la non-pénétration du fluide dans la sphère se traduit par l'égalité des composantes normales des vitesses sur la sphère, soit :

$$v_r(a(t), t) = \dot{a}(t).$$

### Attention!

Il faut bien noter ici que le membre de gauche désigne la vitesse du fluide au niveau de la sphère tandis que le membre de droite désigne la vitesse de la sphère, sans quoi cette relation pourrait passer pour une banale relation cinématique du type  $v_r = \dot{r}$ .

▶ Cette relation se réécrit :

$$\frac{f(t)}{a(t)^2} = \dot{a}(t) \quad \text{d'où } f(t) = a(t)^2 \dot{a}(t) \quad \text{puis } v_r(r, t) = \frac{a(t)^2 \dot{a}(t)}{r^2}.$$

2. Le champ des vitesses s'écrit :

$$\vec{v} = \text{grad } \phi(r, t) \quad \text{avec } \phi(r, t) = -\frac{a(t)^2 \dot{a}(t)}{r}.$$

Or, on sait que le rotationnel d'un gradient est nul. Il en résulte que  $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$  : l'écoulement est irrotationnel.



### Conseils méthodologiques

Lorsque l'on travaille en coordonnées cylindriques ou sphériques sans disposer de l'expression du rotationnel dans ce système de coordonnées, il est judicieux de chercher un potentiel des vitesses dont l'existence est équivalente au caractère irrotationnel de l'écoulement.

3. La composante utile du champ des vitesses trouvé à la question 1 s'écrit :

$$v_r(r, t) = \frac{a(t)^2 \dot{a}(t)}{r^2} = \frac{(a_0 + a_1 \cos(\omega t))^2 (-a_1 \omega \sin(\omega t))}{r^2}.$$

L'expression de  $\dot{a}(t)$  étant d'ordre 1 en  $a_1$ , on peut évaluer  $a(t)^2$  à l'ordre 0 et il vient :

$$v_r(r, t) \approx -\frac{a_0^2 a_1 \omega \sin(\omega t)}{r^2}.$$

### Conseils méthodologiques

Lorsqu'on a à calculer le développement limité à l'ordre 1 en  $\varepsilon \ll 1$  d'une expression de la forme  $\varepsilon g(\varepsilon)$ , il est légitime d'évaluer  $g(\varepsilon)$  à l'ordre 0 en  $\varepsilon$  car les termes d'ordres supérieurs, une fois multipliés par  $\varepsilon$ , donneraient des termes d'ordres supérieurs ou égaux à 2 :

$$\varepsilon g(\varepsilon) = \varepsilon \left( g(0) + \varepsilon g'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2} g''(0) + \dots \right) = \varepsilon g(0) \quad \text{à l'ordre 1 en } \varepsilon.$$

7 - Écoulement de Couette cylindrique - TPC CCNP 2018  
 Physique de l'œuf - Partie I Œuf ~~ou~~ dur

I.1. Phase d'immobilisation et redémarrage :

Q26 - Pour la plupart des fluides  $\rho \approx 1000 \text{ kg.m}^{-3}$  (huile  $900 \text{ kg.m}^{-3}$ )  
 viscosité dynamique eau  $10^{-3} \text{ Pa.s}$  et huile  $\approx 1 \text{ Pa.s}$   
 donc œuf dur  $\approx$  huile!

Q27 - La veine  $S_1$  est  $\ominus$  rapide que la veine  $S_2$  elle a donc tendance à freiner la veine  $S_2$  avec une force de viscosité tangentielle sur la surface de contact selon  $-\vec{u}_x$ . Cette force s'exprime donc par

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} S \vec{u}_x$$

$\frac{\partial v_x}{\partial y}$  représente le taux de cisaillement de la veine

et  $\eta$  est la viscosité dynamique du fluide

$$[\eta] = \text{Pa.s} = \text{kg.m}^{-1}\text{s}^{-1}$$

(la force est  $\propto$  à  $\eta$ ,  $S$  et au taux de cisaillement)

Q28 -  $\vec{v}(r) = r \dot{\omega} \vec{e}_\theta = r \omega \vec{e}_\theta$

$\omega(r, r) \downarrow$  avec  $r$  de la figure 3b.

En effet, avec une distance parcourue identique pour les 2 veines par  $dr$  (en contact)

$$v(r) dr = v(r+dr) dr \Rightarrow r \omega = (r+dr) \omega(r+dr) = (r+dr) \left[ \omega(r) + \frac{d\omega}{dr} dr \right]$$

donc  $0 = \cancel{dr} \omega + \frac{d\omega}{dr} r dr + \frac{d\omega}{dr} dr^2$  (ordre 2 négligeable)

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{dr}{r} \rightarrow \ln \omega = \ln \frac{1}{r} + k = \ln \frac{k}{r}$$

Q29 -  $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\eta r \frac{d(v/r)}{dr} ds \vec{e}_\theta = -\eta ds \left[ \frac{dv}{dr} - \frac{1}{r} v \right] \vec{e}_\theta$

si  $\left| \frac{v}{r} \right| \ll \left| \frac{dv}{dr} \right| \rightarrow d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\eta \frac{dv}{dr} ds \vec{e}_\theta$

On retrouve une exppos de la force de viscosité similaire à l'écoulement unidimensionnel (selon  $r$ )  
 Cette condit<sup>n</sup>  $\left| \frac{v}{r} \right| \ll \left| \frac{dv}{dr} \right|$  est satisfaite (pour  $r \rightarrow +\infty$  par exemple); on assimile alors l'écoulement en arc de cercle à sa tangente.

Q30 -  $\left| \frac{v}{r} \right| \times \left| \frac{rv}{r} \right| = \omega \ll \left| \frac{d(rv)}{dr} \right| = \left| \frac{d\omega}{dr} r + \omega \right| = \left| \frac{1}{r} r^2 + \omega \right|$   
 $\hookrightarrow 1 \ll \frac{1}{r} r \rightarrow r \text{ grad!}$

Q30 -  $dM_{Oz}(r) = (\vec{O}P \wedge d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}) \cdot \vec{e}_z$  calcul complet  
 = bras de levier  $\times d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  ou

$$dM_{Oz}(r) = -\eta r \frac{dv}{dr} ds \quad \text{avec } ds = r d\theta dz = r d\theta h$$

$$dM_{Oz}(r) = -\eta r \frac{d(rv)}{dr} d\theta h$$

Q31 - Pour le fluide sur la coquille d'œuf en  $r=R$  fixe et pour  $\theta \in [0; 2\pi]$

$$\Gamma = -2\pi h \eta R^3 \left( \frac{d\omega}{dr} \right)_{r=R}$$

Q32 - Cond<sup>n</sup> d'adhérence fluide intérieur/coquille  
 $\hookrightarrow$  même vitesse angulaire (ou même vitesse linéaire au m<sup>2</sup>)

fluide  $\rightarrow \omega(R, t) = \Omega(t)$  coquille avec  $\Omega(0) = 0$   
 coquille à l'arrêt qd on relâche!

Q33 -  $L_{Oz}(t) = J_{Oz} \Omega(t) = J_{Oz} \omega(R, t)$   
 moment cinétique

Q34 - TMC appliquée à la coquille

$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = \tau + \underbrace{M_{Oz}(\vec{P}) + M_{Oz}(\vec{R})}_{\vec{0} \text{ car forces passent par l'axe}}$$

avec frottement négligés.

$$\boxed{J_{Oz} \frac{\partial \omega(R,t)}{\partial t} = - 2\pi h M R^3 \left( \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)_{r=R}}$$

Q35 - Avec  $\omega \propto \frac{1}{r} \rightarrow \left( \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)_{r=R} < 0$

donc  $\frac{\partial \omega(R,t)}{\partial t} > 0 \rightarrow$  la rotation de la coquille redouble de sens initial et entraîne le contenu de l'œuf par cisaillement visqueux.

Q36 - Résultat de plaine

• démarche de résultat : on exploite le TMC à la coquille avec une vitesse de rotation initiale  $\omega(t=0) = \omega_0$

• hypothèse : - réf. galiléen - on néglige la friction (air) et la réaction tangentielle de friction solide avec le support

- moments du poids et de la réaction normale nuls

1 - on utilise  $J_{Oz}$  pour la coquille

- on considère une vitesse nulle du fluide sur l'axe de rotation et une vitesse égale à celle de la coquille en  $r=R$

-  $\tau_{diff} = \frac{\mu L^2}{M} = \frac{10^{-3} \times 10^{-4}}{1}$  avec  $L$  typique 1 cm

$\tau_{diff} \approx 0,1 s \rightarrow$  la diff est suffisamment rapide pour avoir un profil de vitesse stationnaire établi tout au long du temps.

• grandeurs d'intérêt

coquille  $m = 5g$ ;  $a = 3,0 \text{ cm}$   $b = 3,0 \text{ cm}$  (cherché en Q35)

hauteur du fluide en rotation  $h = a$  (d'après fig. 7a)

$\omega_0 = 5 \text{ tours} \cdot s^{-1}$

rayon du cylindre équivalent  $R = \frac{1}{2}$

TMC  $\Rightarrow J_{\Delta} \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma = - 2\pi h M R^3 \left( \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)_{r=R}$

Pour résoudre il faut alors faire une hypoth. forte sur le profil de vitesse  $\omega$  pour connaître  $\left( \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)_{r=R}$

Nous supposons que le profil  $\omega(r)$  est linéaire avec  $r$

On a minima évalué en O.D.T.  $\left( \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)_{r=R} = -1 = \frac{\Omega}{R}$

Prof. En fait, on a calculé le profil linéaire  $\omega(r) = \frac{\Omega(R-r)}{R}$

donc  $\left[ \frac{d\Omega}{dt} + \frac{\Omega}{\tau} = 0 \right]$  avec  $\tau = \frac{J_{\Delta}}{2\pi h M R^2} = \frac{\Omega}{R}$

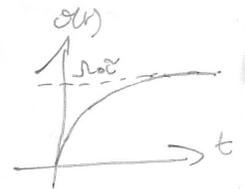
$\Rightarrow \left[ \Omega(t) = \Omega_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$

avec  $\frac{d\Omega(t)}{dt} = \Omega(t) = \Omega_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

$\Omega(t) = -\Omega_0 \tau e^{-\frac{t}{\tau}} + K$

C.T.  $\Omega(t=0) = 0 \rightarrow K = \Omega_0 \tau$

$\Omega(t) = \Omega_0 \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$



Soit  $N$  le nbre de tours pour atteindre l'arrêt en  $t \rightarrow \infty$

$\boxed{N} = \frac{\Omega(t \rightarrow \infty)}{2\pi} = \left[ \frac{\Omega_0 \tau}{2\pi} \right] = \left[ \frac{\Omega_0}{2\pi} \frac{J_{\Delta}}{2\pi h M R^2} \right]$

AN :  $N \approx 999$  tours! en accord avec le doc 3.