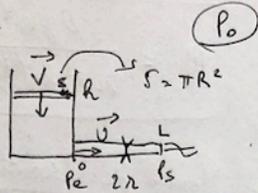


## 5. Viscosimétre de Poiseuille

→ Modélisation de l'écoulement

- a) Fluide incompressible →  $\text{div } \vec{v} = 0$   
 ↑ vitesse débit → le débit volumique se conserve  
 $V \cdot S = U \times \pi R^2$  dans la capillaire



avec  $v = -\frac{dh}{dt}$  et  $Dv = U \times \pi R^2$

$$-\frac{dh}{dt} \pi R^2 = Dv$$

- b) Fluide au repos →  $P_e = P(r) + \rho g(h-r) \approx P_0 + \rho g h$   
 L'hypothèse du fluide à l'éq. est justifiée car  $R \gg r$ , la vitesse d'évolution de  $h$  est suffisamment faible pour considérer le fluide proche d'un état d'éq. (v.t.).

$$P_s = P_0 \rightarrow \Delta P = (P_e - P_s) = \rho g h$$

↳ face motrice de l'écoulement

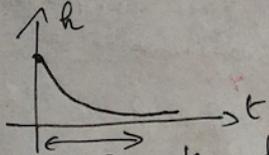
c) En exploitant la loi de Hagen-Poiseuille

$$Dv = \frac{\pi r^4}{8\eta} \frac{\Delta P}{L} \rightarrow -\frac{dh}{dt} \pi R^2 = \frac{\pi r^4}{8\eta} \frac{\rho g h}{L}$$

$$\frac{dh}{dt} + \frac{\rho g r^4}{8\eta L R^2} h = 0 \Leftrightarrow \frac{dh}{dt} + \frac{h}{\tau} = 0$$

$$\tau = \frac{8\eta L R^2}{\rho g r^4}$$

$$h(t) = h(t=0) e^{-\frac{t}{\tau}}$$



$\tau \rightarrow$  temps de vidange du réservoir.

$$d) \begin{cases} h(t_1) = h(t=0) e^{-\frac{t_1}{\tau}} \\ h(t_2) = h(t=0) e^{-\frac{t_2}{\tau}} \end{cases} \Rightarrow \frac{h(t_1)}{h(t_2)} = e^{\frac{(t_2-t_1)}{\tau}}$$

$$t_2 - t_1 = \Delta t = \tau \ln\left(\frac{h(t_1)}{h(t_2)}\right)$$

$$\Delta t = \frac{8\eta L R^2}{\rho g r^4} \ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right) \text{ avec } h_1 > h_2$$

$$M = \frac{\rho g r^4}{8LR^2 \ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)} \Delta t$$

→ Mesure de viscosité et validation de la modélisation

a)  $S = 8 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2 \rightarrow R = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-3}}{\pi}} = 50,5 \text{ cm} \gg r = 5 \text{ mm}$

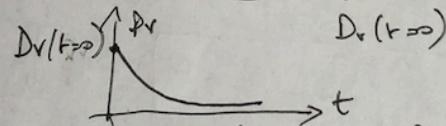
$$M = \frac{3 \times 10^2 \times 9,81 \times 5^4 \times 10^{-12}}{8 \times 1 \times (50,5)^2 \times 10^{-4} \times \ln\left(\frac{1}{0,5}\right)} (32 \times 60) = 4,9 \cdot 10^{-2} \text{ Pl}$$

b)  $\tau = \frac{8\eta L R^2}{\rho g r^4} = \frac{8 \times 4,9 \times 10^{-2} \times 1 \times (50,5)^2 \times 10^{-4}}{3 \times 10^2 \times 9,81 \times 5^4 \times 10^{-12}}$

$$\tau = 1,8 \times 10^4 \text{ s} \rightarrow \tau \approx 5 \text{ h}$$

$$\Delta t \ll \tau \text{ suff!}$$

c)  $Dv(r) = \frac{\pi \rho g r^4}{8ML} h = \frac{\pi \rho g r^4}{8ML} h(t=0) e^{-\frac{t}{\tau}}$



Le débit volumique donc la vitesse débitante  $v$  dans la capillaire  $\text{d}v/dt$  de  $t$ !  
 de régime n'est pas stationnaire pour cet écoulement de Poiseuille !!

Il faut faire l'approximation des régimes quasi-stationnaire pour valider la loi de Hagen-Poiseuille. Nous allons le vérifier + tard.

d) la vitesse débitante  $\downarrow$  au cours du temps comme  $D_v$ .  
 Pour calculer le nombre de Reynolds le + défavorable pour valider le régime laminaire, on prend donc la vitesse débitante au début  $h = 1 \text{ m}$  pour  $t = 0^+$  qui est la + grande.

$$D_v(t=0) = -\pi R^2 \left( \frac{dh}{dt} \right)_{t=0} = + \frac{\pi R^2}{\tau}$$

$$U \times \pi r^2 = D_v \rightarrow U = \left( \frac{R}{r} \right)^2 \frac{1}{\tau}$$

$$U = \left( \frac{505}{5} \right)^2 \frac{1}{4,8 \times 10^4} \approx \frac{10^4}{1,8 \times 10^4} = \frac{1}{1,8}$$

$$U \approx 0,55 \text{ m.s}^{-1}$$

$$Re = \frac{\rho U (2r)}{\mu} = \frac{3 \cdot 10^2 \times 0,55 \times 10^{-2}}{4,9 \cdot 10^{-2}} = 104 \approx 100$$

$Re < 2 \cdot 10^3$   
 $\rightarrow$  l'écoulement est laminaire

$$e) \tau_{\text{convection (capillaire)}} = \frac{L}{U} = \frac{1}{0,55} \approx 1,8 \text{ s}$$

$$\tau_{\text{diffusion}} = \frac{(2R)^2}{\nu} = \frac{4R^2}{\nu} = \frac{4 \mu R^2}{\rho} \approx 1,8 \text{ s}$$

(comme  $\tau_{\text{convection}}$ )

Le temps de diffusion est  $\ll$  l'évidence  $\rightarrow$  la diffusion s'établit bien + vite que les variations temporelles de  $D_v$  et  $U$  donc l'ARQS est justifiée.  
 (le système réagit bien + vite que les variat temporelles de  $D_v$  donc  $D_v \approx \text{const}$  le temps)

#### 4 - longueur d'établissement de la couche limite

Rappel sur la couche limite : autre méthode d'établissement qu'on cours  $\rightarrow$  exploitat des temps caractéristiques

Evolution de la couche limite pour un écoulement le long d'un obstacle plan :

diffusion de qte de mvtr par viscosité

Soit le temps caractéristique associé à la diffusion de qte de mouvement par viscosité  $\tau \approx \frac{L^2}{\nu} \approx \frac{\delta^2}{\nu}$   
 c'est le temps nécessaire pour avoir une diffusion de quantité de mvtr sur une épaisseur égale à la couche limite  $\delta$ .

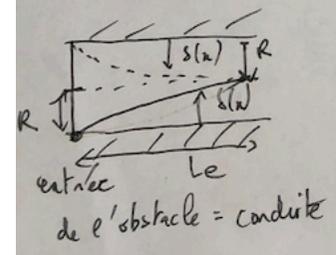
Pdt de temps, le fluide a été entraîné par convection dans la direction de l'écoulement  $\vec{U}$  avec un temps caractéristique  $\tau \approx \frac{x}{U}$  avec une distance parcourue  $x$

On a donc  $\frac{x}{U} \approx \frac{\delta^2(x)}{\nu} \rightarrow \delta^2(x) \approx \frac{\nu x}{U}$

$$\delta(x) = \frac{\sqrt{\nu x}}{U}$$

$\delta$  épaisseur  $\delta(x)$  augmente bien le long de la plaque. qd l'écoulement « avance » (pas uniforme sur la plaque) ( $\delta(x) \propto \sqrt{x}$ )

Exploiterons ce modèle dans le cas de la conduite :



Le est la longueur pour laquelle la diffusion de qte de mvtr a atteint  $R$

soit  $\delta(Le) = R$

$$R^2 = \frac{\nu Le}{U} \rightarrow \frac{D^2}{4} = \frac{\mu Le}{\rho U}$$

$$\frac{Le}{D} = \frac{Re}{4}$$

$$Le \approx 0,25 Re \cdot D$$

comparable à  $\frac{Le}{D} \approx 0,25 Re$

Exercice 2 : Sténose de vaisseaux sanguins

On note  $\nu$  la viscosité cinématique du sang :  $\nu = \frac{\eta}{\rho} = 6 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

1) Par définition :  $Re = \frac{2r_0 v}{\nu} = 2.33$ .  
L'écoulement est donc bien laminaire dans le vaisseau.

2) Par définition :  $R = \frac{\Delta P}{Q}$   
 $R = \frac{8\eta L}{\pi r_0^4} = 4.5 \times 10^5 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$   
 et  $Q = \pi r_0^2 v = 1.5 \times 10^{-7} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ .  
 On en déduit la différence de pression :  
 $\Delta P = R \times Q = 6.9 \times 10^{-2} \text{ Pa}$ .

3) On a :  $R_1 = \frac{8\eta(l/3)}{\pi r_0^4} = \frac{R}{3}$ ;  
 $R_2 = \frac{8\eta(l/3)}{\pi r_1^4} = \frac{16R}{3}$   
 et  $R_3 = \frac{8\eta(l/3)}{\pi r_0^4} = \frac{R}{3}$ .  
 D'où :  $R' = \frac{R}{3} + \frac{16R}{3} + \frac{R}{3} + \frac{R}{3} = 6R$ .

4) On souhaite, pour une différence de pression constante, rétablir le même débit : on doit donc obtenir la même résistance hydraulique. En notant  $R''$  la résistance du pontage, et sachant que  $R'$  et  $R''$  sont en parallèle, on obtient :  
 $R = \frac{R' R''}{R' + R''}$ , où  $R' = 6R$  et  
 $R'' = \frac{8\eta l}{\pi r_2^4} = R \left(\frac{r_0}{r_2}\right)^4$ .

Après simplifications :  $r_2 = \sqrt[4]{\frac{5}{6}} r_0$   
 $r_2 = 0.96 r_0 = 0.67 \text{ cm}$

3. Traînée d'une balle de ping-pong :

$D = 40 \text{ mm}$  notation allégée par rapport à la confection ou classe

a)  $Re = \frac{v_0 \rho D}{\eta} \approx 7.5 \times 10^4 \rightarrow$  régime turbulent (en dessous de la vitesse de traînée)  
 $v_0 = 100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = \frac{100}{3.6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 27.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$   
 $Re \approx 2.10^5$

b)  $F_t = \frac{1}{2} \rho v_0^2 C_x S = 0.23 \text{ N}$  et  $P = mg = 2.6 \times 10^{-2} \text{ N} = 0.026 \text{ N}$   
 $\approx 9.4$   $\frac{\pi D^2}{4}$

$F_t \approx 10 P \rightarrow$  force de traînée bien supérieure (1 ordre de grandeur)

c)  $D = 38 \text{ mm} \rightarrow F_t = 9.24 \text{ N} \rightarrow \downarrow 10\% \rightarrow$  donc  $\uparrow$  le diamètre permet d'augmenter la traînée et diminuer la vitesse de la balle  $\rightarrow$  léger répit pour le receveur de la balle

d) On suppose que l'effet du poids est négligeable  $\rightarrow$  mouvement horizontal.

pour une notation allégée  $\rightarrow F_t = -\alpha v^2$  avec  $\alpha = \frac{1}{2} \rho C_x \pi r^2$   
 Apriori le  $C_x$  qui dépend de  $Re$  et donc de la vitesse est considéré constant car la vitesse varie peu au cours de ce mouvement

PFD  $\Rightarrow m \frac{dv}{dt} = -F_t = -\alpha v^2 \rightarrow \frac{dv}{v^2} = -\frac{\alpha}{m} dt$

$\int_{v(t=0)=v_0}^{v(t)} \frac{dv'}{v'^2} = -\frac{\alpha}{m} \int_0^t dt'$

$-\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0} = -\frac{\alpha}{m} t$

$v = \frac{v_0}{1 + \frac{\alpha v_0}{m} t} \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{1 + \frac{\alpha v_0}{m} t}$

$\int_{x(t=0)}^{x(t)} dx' = v_0 \int_{t=0}^t \frac{1}{1 + \frac{\alpha v_0}{m} t'} dt'$

$d = x(t) - x(t=0) = \frac{m}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{\alpha v_0}{m} t \right) \rightarrow x(t_0) = d \rightarrow t_0 \approx 0.13 \text{ s}$

$v(t_0) \approx 21 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 75 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \rightarrow \downarrow 25\%$

de nombre de Re a simplement  $\downarrow$  d'un  $\frac{1}{4}$  aussi donc  
l'hypothèse  $C_{ax} = \text{const}$  est valable.

Rq) Exploiter le théorème de l'Ec pour aller + vite :

$$dE_c = \delta W(\vec{F}t) \rightarrow d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = + F t \cdot dx$$

↑ travail

$$d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = - \alpha v^2 dx$$

$$\frac{1}{2} m \frac{dv^2}{v^2} = - \alpha dx$$

$$\frac{1}{2} d(\ln v^2) = - \frac{\alpha}{m} dx$$

$$\frac{1}{2} \int_{v(x=0)=v_0}^{v(x=d)=v_f} d(\ln v^2) = - \frac{\alpha}{m} \int_0^d dx$$

$$\frac{1}{2} \ln \left( \frac{v_f^2}{v_0^2} \right) = \ln \left( \frac{v_f}{v_0} \right) = - \frac{\alpha}{m} d$$

$$\boxed{v_f = v_0 e^{-\frac{\alpha}{m} d}}$$

une force résultante orientée vers le haut à l'origine de la portance.

Q. 38.  $F_P = (P_i - P_e) S$  ← surface des ailes.

avec  $P_i - P_e = \frac{1}{2} \rho (V_e^2 - V^2) = \frac{1}{2} \rho V^2 \left( \left( \frac{V_e}{V} \right)^2 - 1 \right)$

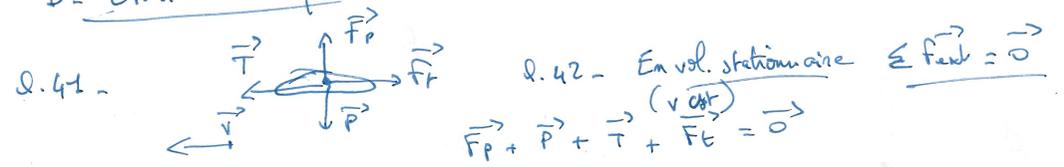
$F_P = \frac{\rho V^2}{2} \left( \left( \frac{V_e}{V} \right)^2 - 1 \right) S$   $\frac{L_e}{V_e} = \frac{L_i}{V}$

Q. 39.  $F_P = \frac{1}{2} \rho V^2 S \times C_P \rightarrow C_P = \left( \frac{V_e}{V} \right)^2 - 1 = \left( \frac{L_e}{L_i} \right)^2 - 1$

Q. 40.  $L_e = L_i + 0,02 L_i = L_i (1,02)$

$C_P = (1,02)^2 - 1 = 4,04 \cdot 10^{-2} = 0,04$

B. Etude Mécanique



En projetant sur les axes verticaux et horizontaux :

$$\begin{cases} F_P - mg = 0 \rightarrow F_P = \frac{1}{2} C_P \rho V^2 S = M_{avg} \\ F_R - T = 0 \rightarrow F_R = \frac{1}{2} C_t \rho V^2 S = T \end{cases}$$

$f = \frac{C_P}{C_t} = \frac{F_P}{F_R} = \frac{M_{avg}}{T}$

Q. 43. La puissance motrice  $P_m$  nécessaire permet au minimum de compenser la traînée pour faire progresser l'avion :  $P_m = \vec{T} \cdot \vec{V} = -\vec{F}_R \cdot \vec{V}$

$P_m = \frac{1}{2} C_t \rho V^3 S = \frac{1}{2} \frac{C_P}{f} \rho V^3 S$  avec  $V = \sqrt{\frac{2 M_{avg}}{\rho C_P S}}$   
 $= \frac{1}{2} \frac{C_P}{f} \rho S \sqrt{\frac{2^3 M_{avg}^3 g^3}{\rho^3 C_P^3 S^3}}$

$P_m = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{2 M_{avg}^3 g^3}{\rho C_P S}}$

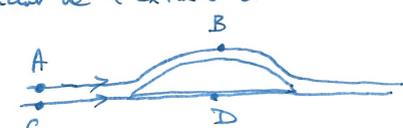
III - Projet d'un avion solaire autonome sur Mars

A. Déterminat du coef. de portance dans le modèle de l'écartement parfait

Q. 36. Les trajectoires de l'extrados et de l'intrados étant de même durée :

$A_t = \frac{L_e}{V_e} = \frac{L_i}{V}$

Q. 37. En notant  $P_{0e}$  et  $V_0$  les vitesses et pression à l' $\infty \rightarrow$  au loin de l'obstacle, on applique Bernoulli sur les lignes de courant de l'extrados et l'intrados :

→ extrados : entre A et B  $\frac{P_0}{\rho} + \frac{1}{2} V_0^2 = \frac{P_e}{\rho} + \frac{1}{2} V_e^2$  

→ intrados : entre C et D  $\frac{P_0}{\rho} + \frac{1}{2} V_0^2 = \frac{P_i}{\rho} + \frac{1}{2} V^2$  (on néglige les effets du champ de pesanteur vu la faible variat d'altitude)

→  $\frac{P_e}{\rho} + \frac{1}{2} V_e^2 = \frac{P_i}{\rho} + \frac{1}{2} V^2$

Comme  $L_e > L_i$ , d'après Q.36.  $V_e > V$  donc d'après la relation précédente :  $P_i > P_e$  la pression + forte au niveau de l'intrados que de l'extrados induit

une force résultante orientée vers le haut à l'origine de la portance.

Q. 38.  $F_P = (P_i - P_e) S$  ← surface des ailes.

avec  $P_i - P_e = \frac{1}{2} \rho (V_e^2 - V^2) = \frac{1}{2} \rho V^2 \left( \left( \frac{V_e}{V} \right)^2 - 1 \right)$

$F_P = \frac{\rho V^2}{2} \left( \left( \frac{V_e}{V} \right)^2 - 1 \right) S$

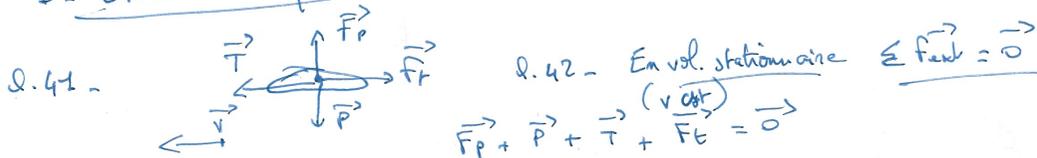
$\frac{L_e}{V_e} = \frac{L_i}{V}$

Q. 39.  $F_P = \frac{1}{2} \rho V^2 S \times C_p \rightarrow C_p = \left( \frac{V_e}{V} \right)^2 - 1 = \left( \frac{L_e}{L_i} \right)^2 - 1$

Q. 40.  $L_e = L_i + 0,02 L_i = L_i (1,02)$

$C_p = (1,02)^2 - 1 = 4,04 \cdot 10^{-2} = 0,04$

### B. Etude Mécanique



En projeté sur les axes verticaux et horizontaux :

$F_P - mg = 0 \rightarrow F_P = \frac{1}{2} C_p \rho V^2 S = M a g$   
 $F_t - T = 0 \rightarrow F_t = \frac{1}{2} C_t \rho V^2 S = T$

$f = \frac{C_p}{C_t} = \frac{F_P}{F_t} = \frac{M a g}{T}$

Q. 43. la puissance motrice  $P_m$  nécessaire permet au minimum de compenser la traînée pour faire progresser l'avion :  $P_m = \vec{T} \cdot \vec{V} = -\vec{F}_t \cdot \vec{V}$

$P_m = \frac{1}{2} C_t \rho V^3 S = \frac{1}{2} \frac{C_p}{f} \rho V^3 S$  avec  $V = \sqrt{\frac{2 M a g}{\rho C_p S}}$   
 $= \frac{1}{2} \frac{C_p}{f} \rho S \sqrt{\frac{2^3 M a^3 g^3}{\rho^3 C_p^3 S^3}}$

$P_m = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{2 M a^3 g^3}{\rho C_p S}}$

Q. 44. la masse volumique  $\downarrow$  avec l'altitude (cf Q. 23). Par conséquent,  $P_m \uparrow$  avec l'altitude  $\rightarrow$  il est + facile de voler à hte altitude (c'est pourquoi les vols se font au-dessus des nuages sup!!)

Q. 45.  $C_p = 0,8$  est 20 fois supérieur à la valeur calculée 0,04 donc le module de l'écoulement parfait  $\rightarrow$  d. 40.

le profil des ailes et leur inclinaison notamment permettent d'augmenter notablement le coef. de portance ! (cf cours).

Q. 46. Pour un vol à basse altitude  $\rightarrow \rho \approx \rho_0 = 1,29 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

On trouve alors  $P_m \approx 7,36 \text{ W}$  pour une vitesse  $V = \sqrt{\frac{2 M a g}{\rho C_p S}} \approx 51 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Cette consommation (de l'ordre de celle d'un smart-phone!) est très faible.

Donc le système de propulsion de puissance max 100W, est largement suffisant pour assurer un vol stationnaire.

(q.e) le système de propulsion est dimensionné en réalité sur la puissance nécessaire au décollage.