Concours Mines-Ponts 2004

Épreuve : PHYSIQUE I — Filière MP

Correction proposée par Eddie Saudrais (e.saudrais@wanadoo.fr)

Partie I Plongée libre (sans bouteille)

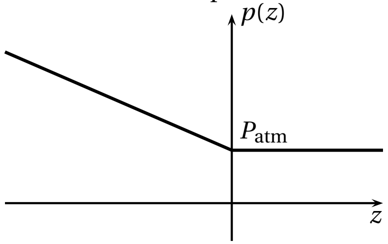
1) La relation fondamentale de l'hydrostatique s'écrit $\overrightarrow{\text{grad}}\, p = \rho \vec{g}$ soit, en projection sur la verticale ascendante Oz,

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho g\,.$$

On en déduit par intégration

$$\boxed{p(z) = P_{\text{atm}} - \rho g z}\,.$$

Représentation graphique de l'évolution de la pression dans l'eau :



2) L'air contenu dans les poumons est un gaz parfait qui subit une compression isotherme ; on a donc $p(z)V(z) = \text{cte} = P_{\text{atm}} V_{\text{M}}$, d'où l'expression de la capacité pulmonaire

$$\boxed{V(z) = \frac{P_{\text{atm}}}{P_{\text{atm}} - \rho g z} V_{\text{M}}}\,.$$

Application numérique :
$V(-10) = \frac{1{,}013\cdot 10^5}{1{,}013\cdot 10^5 + 10^3\times 9{,}81\times 10} 7\cdot 10^{-3} = 3{,}56\cdot 10^{-3}$ m^3, soit une capacité pulmonaire $\boxed{V(-10) = 3{,}56\,\text{l}}$.

Le poids apparent est défini par $\vec{P}_{\text{a}} = m\vec{g} + \vec{\Pi}_{\text{A}}$, où $\vec{\Pi}_{\text{A}} = -\rho V(z)\vec{g}$ est la poussée d'Archimède, soit

$$\vec{P}_{\text{a}} = \left[m - \frac{\rho P_{\text{atm}}}{P_{\text{atm}} - \rho g z} V_{\text{M}}\right]\vec{g}\,.$$

Le poids apparent augmente quand la profondeur augmente. Ce résultat était prévisible : lorsque la profondeur augmente, le volume du plongeur diminue, donc la poussée d'Archimède diminue ; **le poids apparent du nageur augmente lorsque la profondeur augmente**.

L'énoncé comporte une erreur : il identifie poids apparent et flottabilité, alors que la flottabilité est l'opposé du poids apparent.

Poids apparent	*Flottabilité*	*Conséquence*
> 0	< 0	*Le plongeur remonte.*
< 0	> 0	*Le plongeur coule.*
$= 0$	$= 0$	*Équilibre.*

D'après l'énoncé, il faudrait conclure que la flottabilité augmente lorsque la profondeur augmente, alors que la bonne réponse est : ***la flottabilité diminue quand la profondeur augmente.***

3) L'équilibre du plongeur à la profondeur z s'écrit $(m + m_1)\vec{g} - \rho(V_0 + V(z))\vec{g} = \vec{0}$, d'où

$$\boxed{m_1 = \rho\left(V_0 + \frac{P_{\text{atm}} V_{\text{m}}}{P_{\text{atm}} - \rho g z}\right) - m}\,.$$

Application numérique :
$m_1 = 10^3\left(0{,}077 + \frac{1{,}013\cdot 10^5\times 7\cdot 10^{-3}}{1{,}013\cdot 10^5 + 10^3\times 9{,}81\times 5}\right) - 80$, soit $\boxed{m_1 = 1{,}7\text{ kg}}$.

Partie II Plongée avec bouteille et détendeur

Remplissage de la bouteille

4) Le gaz contenu initialement dans la bouteille et le compresseur subit une compression isotherme, du volume $V_{\text{b}} + V_{\text{max}}$ au volume $V_{\text{b}} + V_{\text{min}}$. On a donc $P_{\text{atm}}(V_{\text{b}} + V_{\text{max}}) = P_{\text{b}}(V_{\text{b}} + V_{\text{min}})$, d'où

$$\boxed{P_{\text{b}} = \left(\frac{V_{\text{b}} + V_{\text{max}}}{V_{\text{b}} + V_{\text{min}}}\right) P_{\text{atm}}}\,.$$

En considérant $V_{\text{min}} \ll V_{\text{b}}$, on a

$$P_{\text{b}} \sim \left(1 + \frac{V_{\text{max}}}{V_{\text{b}}}\right) P_{\text{atm}}\,.$$

En négligeant V_{min} devant le volume V_{b} de la bouteille, on peut considérer que tout le gaz contenu initialement dans le volume $V_{\text{max}} - V_{\text{min}}$ est rentré dans la bouteille. La quantité de gaz contenu par cette dernière a donc varié de

$$\boxed{\Delta n = \frac{P_{\text{atm}}(V_{\max} - V_{\min})}{RT_{\text{a}}}}.$$

Application numérique : $\delta n = 8{,}24 \cdot 10^{-2}$ mol.

5) La soupape S' s'ouvre quand la pression dans le cylindre est égale à la pression $P_{\text{b}} = p$ dans la bouteille ; la gaz subissant une compression isotherme, le volume V' du cylindre est alors donné par $P_{\text{atm}} V_{\max} = pV'$, soit

$$\boxed{V' = \frac{P_{\text{atm}}}{p} V_{\max}}.$$

Le gaz contenu dans le cylindre et la bouteille subit alors une compression isotherme du volume $V' + V_{\text{b}}$ au volume $V_{\min} + V_{\text{b}}$:

$$p(V' + V_{\text{b}}) = p'(V_{\min} + V_{\text{b}}),$$

d'où, compte tenu de l'expression de V',

$$\boxed{p' = \frac{P_{\text{atm}} V_{\max} + pV_{\text{b}}}{V_{\min} + V_{\text{b}}}}.$$

La variation de pression $\Delta p = p' - p$ à l'intérieur de la bouteille est donnée par [1]

$$\boxed{\Delta p = \frac{P_{\text{atm}} V_{\max} - pV_{\min}}{V_{\min} + V_{\text{b}}}}.$$

Cette variation de pression diminue lorsque la pression p dans la bouteille augmente ; la pression dans la bouteille sera maximale quand $\Delta p = 0$, soit

$$\boxed{p_{\max} = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} P_{\text{atm}}}.$$

Au-delà, la pression atteinte dans le cylindre lors de la compression n'est pas suffisante pour ouvrir la soupape S' ; le résultat aurait pu être déduit de la question 5 : la pression maximum $p_{\max}$ correspond au cas limite de l'ouverture de la soupape S' quand le piston est en AA', soit $V' = V_{\min}$ pour $p = p_{\max}$.

6) On calcule $\Delta p = \frac{1{,}013\cdot 10^5 \times 2\cdot 10^{-3} - 0{,}2\cdot 10^7 \times 2\cdot 10^{-5}}{2\cdot 10^{-5} + 5\cdot 10^{-3}}$ soit $\boxed{\Delta p = 3{,}24 \cdot 10^4 \text{ Pa}}$.

La pression maximale vaut $p_{\max} = 100 P_{\text{atm}}$, soit $\boxed{p_{\max} = 1{,}013 \cdot 10^7 \text{ Pa}}$.

7) La surpression par aller-retour du piston est donnée par

$$\Delta p = \frac{P_{\text{atm}} V_{\max} - pV_{\min}}{V_{\min} + V_{\text{b}}};$$

soit, compte tenu de la relation $\alpha \Delta t = 1$,

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \alpha \frac{P_{\text{atm}} V_{\max} - pV_{\min}}{V_{\min} + V_{\text{b}}}.$$

En assimilant $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ à $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$, la pression dans la bouteille vérifie donc l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \alpha \frac{P_{\text{atm}} V_{\max} - pV_{\min}}{V_{\min} + V_{\text{b}}}.$$

Avec $V_{\min} \ll V_{\text{b}}$, on a donc

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha V_{\min}}{V_{\text{b}}} p = \alpha \frac{V_{\max}}{V_{\text{b}}} P_{\text{atm}}}.$$

8) En posant $\tau = \frac{V_{\text{b}}}{\alpha V_{\min}}$, on peut écrire

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \frac{p}{\tau} = \frac{P_{\max}}{\tau}.$$

La solution générale s'écrit $p(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + p_{\max}$, où A est une constante déterminée par une condition initiale. Comme $p(0) = P_{\text{atm}}$, il vient $P_{\text{atm}} = A + p_{\max}$, d'où

$$\boxed{p(t) = \left(P_{\text{atm}} - p_{\max}\right) \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + p_{\max}}.$$

La pression dans la bouteille vaut $p_{\text{f}} = 0{,}5 \cdot 10^7$ Pa au bout du temps T donné par

$$T = \tau \ln \frac{p_{\max} - P_{\text{atm}}}{p_{\max} - p_{\text{f}}},$$

soit

$$\boxed{T = \tau \ln \frac{(V_{\max} - V_{\min}) P_{\text{atm}}}{V_{\max} P_{\text{atm}} - V_{\min} p_{\text{f}}}}.$$

Application numérique :

$T = \frac{5\cdot 10^{-3}}{4\times 2\cdot 10^{-5}} \ln \frac{(2\cdot 10^{-3} - 2\cdot 10^{-5}) 1{,}013\cdot 10^5}{2\cdot 10^{-3} \times 1{,}013\cdot 10^5 - 2\cdot 10^{-5} \times 0{,}5\cdot 10^7}$, soit $\boxed{T = 42 \text{ s}}$.

[1] Compte tenu de $V_{\min} \ll V_{\text{b}}$, on peut simplifier cette expression sous la forme $\Delta p = \frac{P_{\text{atm}} V_{\max} - pV_{\min}}{V_{\text{b}}}$, même si ce n'est pas clairement demandé dans l'énoncé.

Utilité du détendeur

9) Au début de la plongée, la quantité d'air dans la bouteille est

$$\boxed{n_\mathrm{i} = \frac{pV_\mathrm{b}}{RT_\mathrm{a}} = \frac{1{,}0\cdot 10^7 \times 5\cdot 10^{-3}}{8{,}31\times 293} = 20{,}5\ \mathrm{mol}}.$$

Quand le détendeur se bloque, bouteille immergée (température T_e), la quantité d'air dans la bouteille est

$$\boxed{n_\mathrm{s} = \frac{p_\mathrm{s}V_\mathrm{b}}{RT_\mathrm{e}} = \frac{4{,}0\cdot 10^5 \times 5\cdot 10^{-3}}{8{,}31\times 288} = 0{,}84\ \mathrm{mol}}.$$

10) Au cours de chaque cycle, la quantité d'air inspiré par le plongeur est

$$n' = \frac{p(z)\Omega_0}{RT_\mathrm{e}}.$$

La quantité d'air consommable dans la bouteille est $\Delta n = n_\mathrm{i} - n_\mathrm{s}$, ce qui représente un nombre d'inspirations :

$$N = \frac{\Delta n}{n'} = \frac{n_\mathrm{i}-n_\mathrm{s}}{n'}.$$

La durée d'un cycle d'inspiration étant $1/f$, la durée totale vaut

$$\Delta t_\mathrm{s}(z) = \frac{N}{f} = \frac{n_\mathrm{i}-n_\mathrm{s}}{n'f},$$

soit

$$\boxed{\Delta t_\mathrm{s}(z) = \frac{(n_\mathrm{i}-n_\mathrm{s})RT_\mathrm{e}}{p(z)\Omega_0 f}}.$$

En fonction des données, et compte tenu de l'expression de $p(z)$, cette expression s'écrit

$$\boxed{\Delta t_\mathrm{s}(z) = \left(p\frac{T_\mathrm{e}}{T_\mathrm{a}} - p_\mathrm{s}\right)\frac{V_\mathrm{b}}{\Omega_0 f(P_\mathrm{atm}-\rho g z)}}.$$

Application numérique :

$$\Delta t_\mathrm{s}(z) = \left(1{,}0\cdot 10^7\,\frac{288}{293} - 4{,}0\cdot 10^5\right)\frac{5\cdot 10^{-3}}{2{,}0\cdot 10^{-3}\times 0{,}2(1{,}013\cdot 10^5 + 10^3\times 9{,}81\times 20)}$$

soit $\boxed{\Delta t_\mathrm{s} = 396\ \mathrm{s} = 6'36''}$.

11) À la surface ($z=0$), où $T = T_\mathrm{a}$, on a $\Delta t_\mathrm{s}(z) = \left(p - p_\mathrm{s}\right)\dfrac{V_\mathrm{b}}{\Omega_0 f P_\mathrm{atm}}$ soit

$$\boxed{\Delta t_\mathrm{s} = 1\,180\ \mathrm{s} = 19'40''}.$$

La bouteille doit délivrer un même volume Ω_0 d'air pour chaque inspiration. En profondeur, ce volume devant être délivré sous une pression plus élevée, il contient une plus grande quantité de gaz ; la température plus basse contribue aussi à l'augmentation de la quantité d'air délivré pour chaque inspiration. L'autonomie de la bouteille est donc notablement plus faible en profondeur.

Partie III Un exemple de danger, l'accident de décompression

12) On cherche une solution de l'équation de diffusion sous la forme $C(x,t) = K + f(x)g(t)$. On a $\dfrac{\partial C(x,t)}{\partial t} = f(x)g'(t)$ et $\dfrac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} = f''(x)g(t)$, et l'équation de diffusion s'écrit

$$f(x)g'(t) - Df''(x)g(t) = 0,$$

soit

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{D}\frac{g'(t)}{g(t)} = A.$$

Le premier terme est une fonction de la variable x, le second une fonction de la variable t ; ces deux termes ne peuvent être égaux que s'ils sont égaux à une constante $A = \pm q^2$, où q est homogène à l'inverse d'une longeur.

Les fonctions $f(x)$ et $g(t)$ vérifient donc les équations différentielles

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f''(x) & = & \pm q^2 f(x) \\ g'(t) & = & \pm D q^2 g(t) \end{array}}$$

L'énoncé est maladroit : il impose de prendre la constante sous la forme d'un carré, alors que la discussion sur la nature des solutions, qui impose le signe de cette constante, vient à la question suivante...

13) De la seconde équation on déduit $g(t) = \alpha\,\mathrm{e}^{\pm Dq^2 t}$, où α est une constante. Comme la concentration en azote ne peut diverger quand $t\to\infty$, seule la solution $g(t) = \alpha\,\mathrm{e}^{-Dq^2 t}$ est à retenir. La constante A de la question précédente s'écrit donc $A = -q^2$.

La fonction $f(x)$ vérifie donc l'équation différentielle $f''(x) + q^2 f(x) = 0$, dont la solution générale est de la forme

$$f(x) = \beta\cos(qx) + \gamma\sin(qx),$$

où β et γ sont deux constantes. En notant $A_q = \alpha\beta$ et $B_q = \alpha\gamma$, on en déduit la solution générale de l'équation de diffusion :

$$\boxed{C_q(x,t) = K_q + \left[A_q \cos(qx) + B_q \sin(qx)\right] \mathrm{e}^{-Dq^2 t}}.$$

14) Au bout d'un certain temps, la concentration en azote dans le cartilage devient uniforme sous l'effet de la diffusion, et tend vers la valeur $C_\mathrm{s}(z)$ de la concentration en azote dans le sang. On a donc $\lim\limits_{t\to\infty} C_q(x,t) = K_q = C_\mathrm{s}(z)$, soit

$$\boxed{K_q = C_\mathrm{s}(z)}.$$

La condition en $x = 0$ s'écrit alors $C_q(0,t) = C_\mathrm{s}(z) + A_q \mathrm{e}^{-Dq^2 t} = C_\mathrm{s}(z)$,d'où

$$\boxed{A_q = 0}.$$

La concentration en $x = L$ s'écrit alors

$$C_q(L,t) = C_\mathrm{s}(z) + B_q \sin(qL)\,\mathrm{e}^{-Dq^2 t} = C_\mathrm{s}(z)\,.$$

On a donc $B_q \sin(qL)\,\mathrm{e}^{-Dq^2 t} = 0$; comme $B_q \neq 0$ (sinon, la concentration serait uniforme dans le cartilage à tout instant), il faut donc $\sin(qL) = 0$, soit $qL = n\pi$, avec $n\,i\,n\mathbf{N}^*$. Les valeur autorisées pour q sont donc

$$\boxed{q = \frac{n\pi}{L} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbf{N}^*}.$$

Il est à ce stade impossible de déterminer le coefficient B_q. Il faut pour cela connaître la concentration initiale $C_q(x,t)$ dans le cartilage. On ne peut répondre complètement qu'à la question suivante...

Cette question est inutile... et même dangereuse : la fonction $C(x,t)$ qui décrit la concentration réellement observée est une combinaison linéaire des fonctions $[A_q\cos(qx)B_q\sin(qx)]\,\mathrm{e}^{-Dq^2 t}$ à laquelle on ajoute une constante. C'est à cette solution $C(x,t)$ qu'il faut appliquer les conditions aux limites pour déterminer les constantes et non à chaque solution particulière...

15) La fonction

$$F_q(x,t) = \left[A_q\cos(qx) + B_q \sin(qx)\right]\mathrm{e}^{-Dq^2 t}$$

est périodique ; sa période spatiale est $\dfrac{2\pi}{q} = \dfrac{2L}{n}$, avec $n \in \mathbf{N}^*$.

La fonction $\sum\limits_q C(x,t) = K + \sum\limits_q F_q(x,t)$ est donc périodique, **de période $2L$**.

Attention, la notation est trompeuse : dans le développement en série de Fourier donné en rappel[2], l'indice n du coefficient B_n est un entier positif, tandis que dans la notation B_q de l'énoncé, l'indice q est un multiple de π/L...

On cherche une solution de l'équation de diffusion de la forme

$$C(x,t) = K + \sum_q \left[A_q\cos(qx) + B_q\sin(qx)\right]\mathrm{e}^{-Dq^2 t}\,.$$

De la condition $\lim\limits_{t\to\infty} = C_\mathrm{s}(z)$ en déduit $K = C_\mathrm{s}(z)$.

De la condition $C(0,t) = C_\mathrm{s}(z)$, $\forall\, t$ on déduit $A_q = 0$, $\forall\, q$.

De la condition $C(L,t) = C_\mathrm{s}(z)$, $\forall\, t$ on déduit la condition $q = \dfrac{n\pi}{L}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

La concentration en azote est dans le cartilage est donc de la forme

$$C(x,t) = C_\mathrm{s}(z) + \sum_q B_q \sin(qx)\,\mathrm{e}^{-Dq^2 t}\,,$$

soit

$$C(x,t) = C_\mathrm{s}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\exp\left(-D\frac{n^2\pi^2}{L^2}t\right).$$

À l'instant $t = 0$, on a en particulier

$$C(x,0) = C_\mathrm{s}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right).$$

Le dernier terme est le développement en série de Fourier d'une fonction impaire (pas terme en cos), de période $2L$:

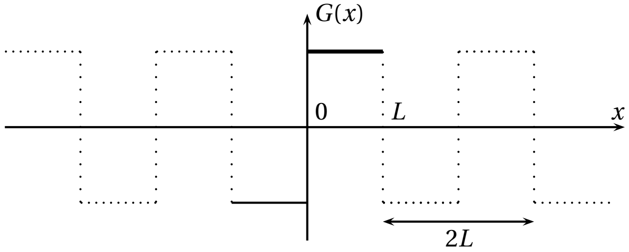
$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right),$$

où $G(x)$ est une fonction impaire, périodique de pédiode $2L$, telle que $G(x,0) = C_0 - C_\mathrm{s}(z)$ pour $x \in]0,L[$[3].

Il s'agit donc d'une fonction créneaux :

[2] Avec une formule fausse : remplacer $\sin(n\omega_0 t)$ par $\sin(n\omega_0 u)$ dans l'intégrale...

[3] Elle doit s'identifier à $C(x,t) - C_\mathrm{s}(z)$ sur l'intervalle $]0,L[$, car la concentration en azote n'est définie que sur cet intervalle, c'est-à-dire dans le cartilage !



On peut alors calculer les coefficients B_n :

$$B_n = \frac{2}{2L}\int_{-L}^{+L} G(u)\sin\left(n\pi\frac{u}{L}\right)\,\mathrm{d}u = \frac{2}{L}\int_0^L G(u)\sin\left(n\pi\frac{u}{L}\right)\,\mathrm{d}u$$

car la fonction $G(u)\sin\left(n\pi\frac{u}{L}\right)$ est paire, d'où

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L [C_0 - C_s(z)]\sin\left(n\pi\frac{u}{L}\right)\,\mathrm{d}u = \frac{2}{L}[C_0 - C_s(z)]\left(-\frac{L}{n\pi}\right)\left[\cos\left(\frac{n\pi u}{L}\right)\right]_0^L$$
$$= \frac{2}{n\pi}[C_0 - C_s(z)]\,[1-\cos(n\pi u)] = \frac{2}{n\pi}[C_0 - C_s(z)]\left[1-(-1)^n\right].$$

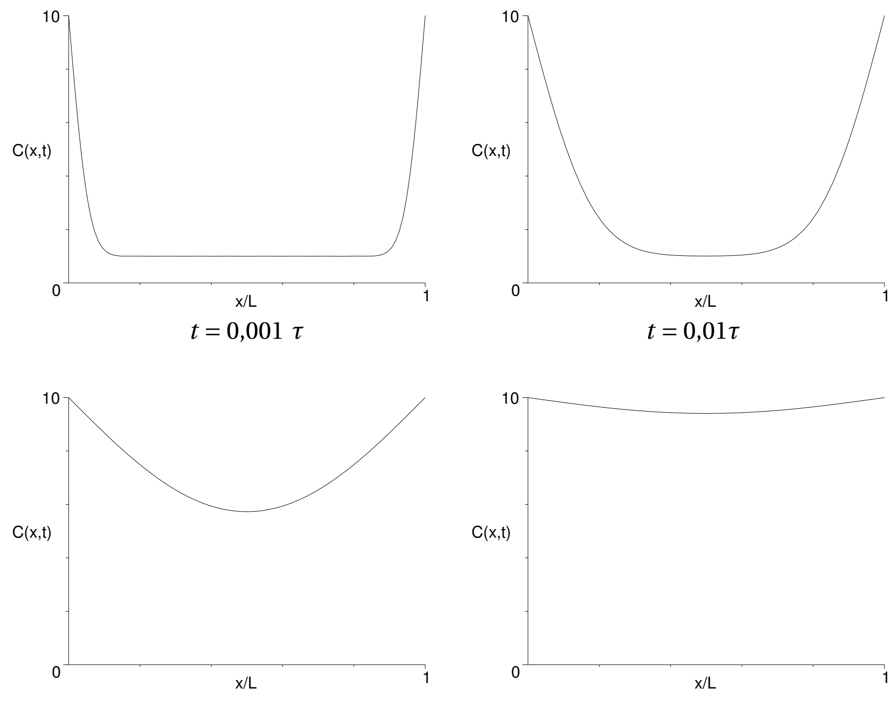
On a donc

$$B_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ \dfrac{4}{n\pi}[C_0 - C_s(z)] & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

La concentration en azote dans le sang est finalement donnée par :

$$\boxed{C(x,t) = C_s(z) + \frac{4}{\pi}[C_0 - C_s(z)]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\left((2n+1)\pi\frac{x}{L}\right)\exp\left(-(2n+1)^2\frac{\pi^2 D}{L^2}t\right)}.$$

En posant $\tau = L^2/D$, on représente $C(x,t)$ pour plusieurs valeurs de t, pour une concentration intiale dans le cartilage $C_0 = C_s(z)/10$:



$t = 0{,}001\ \tau$; $t = 0{,}01\tau$; $t = 0{,}1\tau$; $t = 0{,}3\tau$

Voici un code Maple permettant de visualiser une animation de l'évolution temporelle de $C(x,t)$[4] :

```
> L :=1 :Cs :=10 :C0 :=1 :tau :=1 :
> C :=(x,t)->Cs+4/Pi*(C0-Cs)*sum(1/(2*n+1)*sin((2*n+1)*Pi*x/L)
  *exp(-(2*n+1)^2*Pi^2*t/tau),n=0..10);
> plots[animate](C(x,t),x=0..1,t=0.001..0.4,frames=100);
```

[4]On ne calcule que les 10 premiers termes du développement ; les coefficients décroissant rapidement avec n, on peut vérifier que cette limitation est sans effet sur la valeur numérique de $C(x,t)$ sur 10 décimales.