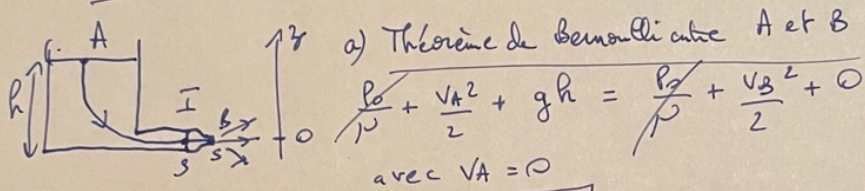


Partie 3 - Bilans mécaniques

→ Bilan de qte de mouvement

3 - Force exercée sur un embout



a) Théorème de Bernoulli entre A et B

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{V_A^2}{2} + gh = \frac{P_0}{\rho} + \frac{V_B^2}{2} + 0$$

avec $V_A = 0$

$$V_B = \sqrt{2gh}$$

Conservation du débit volumique entre I et B

$$V_I = \frac{S}{S} \sqrt{2gh}$$

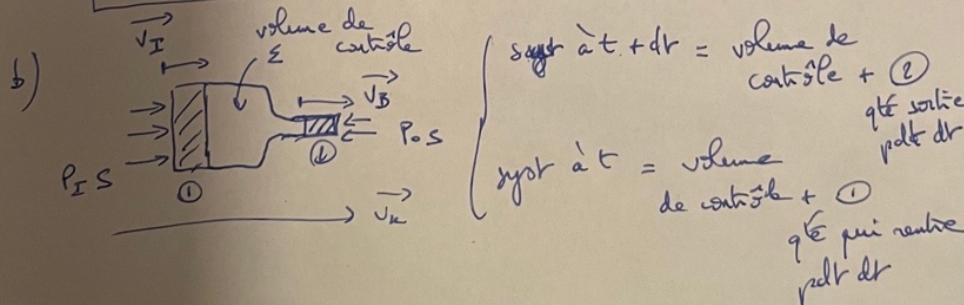
Théorème de Bernoulli entre I et B

$$\frac{P_I}{\rho} + \frac{V_I^2}{2} = \frac{P_0}{\rho} + \frac{V_B^2}{2}$$

$$P_I = P_0 + \frac{\rho}{2} V_B^2 \left(1 - \left(\frac{S}{S}\right)^2\right)$$

$$P_I = P_0 + \frac{\rho}{2} (2gh) \left(1 - \left(\frac{S}{S}\right)^2\right)$$

$$P_I = P_0 + \rho gh \left(1 - \left(\frac{S}{S}\right)^2\right)$$



Réalisons un bilan de qte de mvtr au syst fermé S :

$$d\vec{p} = \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t)$$

$$= \underbrace{\vec{p}_2(t+dt) - \vec{p}_2(t)}_{\text{en régime statio.}} + \delta m_2 \vec{v}_S - \delta m_1 \vec{v}_I$$

avec $\delta m_1 = \delta m_2 = \delta m$

$$d\vec{p} = \delta m (v_S - v_I) dt \vec{u}_x$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \delta m (v_S - v_I) \vec{u}_x$$

Appliquons la loi de la qte de mvtr à ce fluide en écoulement

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = F_{\text{embout} \rightarrow \text{fluide}} \vec{u}_x - P_0 S \vec{u}_x + P_I S \vec{u}_x$$

$$= -F \vec{u}_x + (P_I S - P_0 S) \vec{u}_x$$

donc $\delta m (v_S - v_I) = -F + P_I S - P_0 S$

$$F = \delta m (v_I - v_S) + P_I S - P_0 S$$

$$F = \rho \delta V (v_I - v_S) + P_I S - P_0 S$$

$$F = \rho v_S S \left(\frac{S}{S} v_S - v_S \right) + P_0 S + \frac{\rho S}{2} v_S^2 \left(1 - \left(\frac{S}{S} \right)^2 \right) - P_0 S$$

$$F = \rho S v_S^2 \left(\frac{S}{S} - \left(\frac{S}{S} \right)^2 \right)$$

$$F = \rho S v_S^2 \left(1 - \left(\frac{S}{S} \right)^2 \right) > 0!$$

3 - Fonctionnement d'un turboréacteur

2) Tableau récapitulatif des données

Etat	1	2	3	4	5
P (bar)	$P_1 = 1 \text{ bar}$	$P_2 = 10 \text{ bar}$	$P_3 = P_2$	$P_4 = 1 \text{ bar}$	$P_5 = 1 \text{ bar}$
T (K)	$T_1 = 300 \text{ K}$	$T_2 = 579 \text{ K}$	$T_3 = 1200 \text{ K}$	$T_4 = 920 \text{ K}$	$T_5 = 621 \text{ K}$

2 → 3 évolut isobare pour la combustion.

• Transfo 1 → 2 : compression → adiab. réversible donc isentropique
 d'après $PV^\gamma = \text{cte}$ avec $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ on $P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cte}$...
 donc $P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = P_2^{1-\gamma} T_2^\gamma \rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

AN $\Rightarrow T_2 = 579 \text{ K}$

• Transfo 3 → 4 : turbine → adiab. réversible → isentropique

$$T_4 = T_3 \left(\frac{P_3}{P_4} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 920 \text{ K}$$

2 - de kérogène permet la combustion durant l'étape (2 → 3)

1^{er} principe ind. $\Delta(h + e + ep) = w + q$ | ici Δec négligée comme Δep
 $w = 0$

$\Delta h = q$ avec $q = ek$ → transfert thermique lié à la combustion
 et $\Delta h = c_p(T_3 - T_2) \rightarrow q_p$ circulant avec le débit D_m

En terme de puissance $D_m \Delta h = P_{th} = q \times D_k$
 $D_m c_p(T_3 - T_2) = ek D_k$

$$D_k = D_m \frac{c_p(T_3 - T_2)}{ek} = 0,62 \text{ kg.s}^{-1}$$

3 - Rendement : $\eta = \frac{\Delta ec}{q_c}$

Δec variat d'Ec entre entrée et sortie
 q_c transfert thermique de combust

→ $\Delta ec = \Delta ec_{4 \rightarrow 5}$ car on néglige cv variat sauf ds la tuyère qui transforme l'enthalpie en ec.

Pour 4 → 5 :

$$\Delta(h + ec) = w + q \quad \left| \begin{array}{l} \text{avec } w = 0 \\ q = 0 \rightarrow \text{trfs. adiabatique} \end{array} \right.$$

$$\Delta(h + ec) = 0$$

$$\Delta ec = -\Delta h = c_p(T_4 - T_5) = 299 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

→ q_c évolut ds la combustion 2 → 3 $\Delta h = c_p(T_3 - T_2) = q_c$
 $q_c = 621 \text{ kJ.kg}^{-1}$

$$\eta = \frac{\Delta ec}{q_c} = \frac{T_4 - T_5}{T_3 - T_2} = 0,48 \quad \text{rendement moyen}$$

4 - Débit d'un gaz ds une tuyère

1) 1^{er} principe ind. $\Rightarrow \Delta(h + e + ep) = w + q$ avec $q = 0$ (parois calorifugées)

$\Delta ep = 0$ et $w = 0$
 $\Delta(h + e) = 0 \rightarrow h_1 + \frac{1}{2} c_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} c_2^2$

2) $h_1 + \frac{1}{2} c_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} c_2^2$ ✓ $\frac{dp}{p}$
 avec $\Delta h = h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1)$ et $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$

Rappel) $C_p - C_v = \frac{R}{M}$ et $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$

donc $c_2 = \sqrt{c_1^2 + 2 C_p(T_1 - T_2)}$
 $c_2 = \sqrt{c_1^2 + \frac{2 \gamma R}{M(\gamma - 1)} (T_1 - T_2)} = 1,4 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$

↳ vitesse supersonique (gaz compressible! / h et cv variat en ec!)

3) $dh(u) = T(u) ds(u) + v(u) dp(u)$ v vol. molaire = $\frac{V}{m}$

avec $dh = c_p dT$
 or $gp \Rightarrow PV = nRT \rightarrow V = \frac{nRT}{P} = \frac{mRT}{MP} \rightarrow v = \frac{V}{m} = \frac{RT}{MP}$

$$c_p dT = T ds + \frac{RT}{P} dP$$

$$\int ds = c_p \frac{dT}{T} - \frac{M}{R} \frac{dP}{P}$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \frac{M}{R} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

4) $\Delta s = s_c + s_{ech}$ avec $s_{ech} = 0$ car parois calorifugées

$$\Delta s = s_c = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \frac{M}{R} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

(calcul rapide
donc très peu théor.
négligeable)

AN : $s_c = 1,5 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1} \rightarrow$ info. irréversible

5) En régime stat. le débit massique se conserve !

⚠ le débit volumique ne se conserve pas directement car écoulement compressible à $v > c_{son}$ (vitesse supersonique).

$$\dot{m} = \dot{m}_1 = \dot{m}_2 \text{ avec } \dot{m} = \rho S c \text{ et } \rho = \frac{1}{v}$$

donc $\dot{m} = \frac{S c}{v}$

$$\Rightarrow \frac{S_1 c_1}{v_1} = \frac{S_2 c_2}{v_2} \rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{c_1 v_2}{c_2 v_1} = \frac{c_1 T_2}{c_2 T_1} \frac{P_1}{P_2}$$

AN : $\frac{S_2}{S_1} = 1,2$

(Rq) On peut montrer (voir également autour des tuyères) que pour que la tuyère réalise le débit d'gaz, celle-ci doit d'abord être convergente pour accélérer le gaz jusqu'à une vitesse supersonique puis divergente jusqu'à la sortie du gaz $\rightarrow$ tuyère de Laval !

Exercice 6 - Echangeur thermique à double courant



Conseils méthodologiques. Cet exercice met en pratique le Savoir-faire 1 (premier principe pour les écoulements).

a) Soit le système contenu à l'instant t entre l'entrée et la sortie pour le fluide 2. À l'instant $t + dt$, il s'est un peu déplacé (Fig. 48). On applique à ce système **fermé** le premier principe de la thermodynamique, ce qui mène à :

$$\Delta h_2 = w_{u2} + q_2 = q_2$$

vu que les énergies macroscopiques sont négligées. On a aussi utilisé le fait que le travail se limite à celui des actions de pression aux entrées et sorties. En multipliant par le débit massique D_2 , on établit :

$$D_2 \Delta h_2 = D_2 (h_{2s} - h_{2e}) = D_2 q_2 = P_{th}$$

où P_{th} est la puissance thermique reçue par le fluide 2. Similairement, pour le fluide 1, on établit :

$$D_1 \Delta h_1 = D_1 (h_{1s} - h_{1e}) = -P_{th}$$

En effet, le transfert thermique reçu par le fluide 2 est cédé par le fluide 1, ce qui explique le signe moins.

b) On applique encore le premier principe, sous forme infinitésimale entre x et $x + dx$, pour le fluide 2 :

$$D_2 dh_2 = \delta Q = K(T_1 - T_2(x)) d\Sigma$$

De plus, pour l'eau liquide à pression constante, $dh_2 = c_p dT_2 = -c_p d\Delta T$. Alors, en séparant les variables :

$$D_2 c_p \frac{d\Delta T}{\Delta T} = -K d\Sigma$$

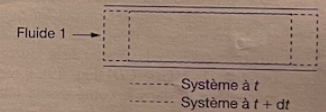


Figure 48



Erreur à éviter

Bien vérifier le signe de δQ : si $T_1 > T_2(x)$, le fluide 2 reçoit le transfert thermique et $\delta Q > 0$.

c) On intègre cette équation entre l'entrée et la sortie :

$$\int_e^s D_2 c_p \frac{d\Delta T}{\Delta T} = -K \int_e^s d\Sigma$$

Alors,

$$D_2 c_p \ln \frac{\Delta T_s}{\Delta T_e} = D_2 c_p \ln \frac{T_1 - T_{2s}}{T_1 - T_{2e}} = -K \Sigma$$

d) D'après l'expression de la question a),

$$P_{th} = D_2 (h_{2s} - h_{2e}) = D_2 c_p (T_{2s} - T_{2e}) = \frac{K \Sigma}{\ln \frac{T_1 - T_{2e}}{T_1 - T_{2s}}} (T_{2s} - T_{2e})$$

Numériquement, $P_{th} = 2,1 \text{ GW}$