Partie II – Déversoir de pâte

II.1 – Modèle parfait

Q16. *Théorème de Bernoulli :*

Dans le cadre d'un écoulement parfait, stationnaire, homogène et incompressible, la pression totale $P + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2$ se conserve le long d'une ligne de courant (en posant (Oz) un axe vertical ascendant).

Appliqué à la situation de l'exercice, cela donne : $\boxed{P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2}$

Or : $h_p(t) = z_1 - z_2$ et $P_1 = P_2 = P_0$

D'où l'écriture de la relation de Bernoulli : $\rho g h_p(t) + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Leftrightarrow \boxed{g h_p(t) + \frac{1}{2}v_1^2 = \frac{1}{2}v_2^2}$

Q17. L'écoulement étant supposé incompressible et homogène, la conservation du débit volumique donne :

$$D_{V,1} = D_{V,2} \Leftrightarrow v_1 \pi R_1^2 = v_2 \pi R_2^2 \Leftrightarrow \boxed{v_1(t) = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 v_2(t)}$$

Q18. D'après Q16 et Q17, on obtient : $\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^4\right) v_2^2 = g h_p(t) \Leftrightarrow \boxed{v_2(t) = \sqrt{\frac{2 g h_p(t)}{1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^4}}}$

Q19. D'après Q17, on a : $v_1(t) = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 v_2(t) \Leftrightarrow -\frac{dh_p}{dt} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \sqrt{\frac{2 g h_p(t)}{1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^4}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{dh_p}{dt} = -\sqrt{\frac{2 g h_p(t)}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4 - 1}}}$

Q20. Par séparation des variables, on obtient : $\frac{dh_p}{\sqrt{h_p}} = -\sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4 - 1}}\,dt$

On peut alors intégrer sur la durée de la vidange :

$$\int_{h_0}^{0} \frac{dh_p}{\sqrt{h_p}} = -\sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4 - 1}} \int_0^{\tau_p} dt \Leftrightarrow -\sqrt{h_0} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4 - 1}}\,\tau_p \Leftrightarrow \boxed{\tau_p = \sqrt{\frac{2h_0}{g}\left[\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4 - 1\right]}}$$

Q21. *AN :* $\boxed{\tau_p = 0{,}20\ s \ll \tau_{exp} = 1{,}5\ s}$ le temps de vidange a été nettement sous-estimé. Il aurait fallu prendre en compte la viscosité du fluide (la pâte).

II.2 – Modèle visqueux

Q22. La vitesse moyenne peut-être estimée : $\boxed{v_m \approx \frac{h_0}{\tau_{exp}} = 4.10^{-2} m.s^{-1}}$

Puis le nombre de Reynolds : $\boxed{\mathcal{R}e = \frac{\rho d v_m}{\eta} = 3.10^{-1}}$

On a bien $\mathcal{R}e < 2.10^3$ donc la loi de Darcy-Weisbach est valide.

Q23. La relation de Bernoulli généralisée s'écrit entre les points 1 et 2 :

$$\boxed{\left(P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2\right) - \left(P_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2\right) = \Delta P_c}$$

Or on a toujours $P_1 = P_2 = P_0$ et ici $h_v(t) = z_1 - z_2$, de plus on néglige l'effet du rétrécissement, donc $R_1 = R_2$ ainsi $v_1 = v_2$ (d'après Q17)

Alors : $\rho g h_v = \frac{64\eta}{\rho d v_m}\frac{\rho v_m^2}{2}\frac{h_v}{d} \Leftrightarrow v_m = \frac{\rho g (2R_1)^2}{32\eta} \Leftrightarrow \boxed{\frac{dh_v}{dt} = -\frac{\rho g R_1^2}{8\eta}}$

Q24. En intégrant la relation précédente, sachant que $h_v(t=0) = h_0$, on obtient : $\boxed{h_v(t) = h_0 - \frac{\rho g R_1^2}{8\eta}t}$

A la fin de la vidange, on a : $h_v(\tau_v) = 0 \Leftrightarrow h_0 - \frac{\rho g R_1^2}{8\eta}\tau_v = 0 \Leftrightarrow \boxed{\tau_v = \frac{8\eta h_0}{\rho g R_1^2}}$

Q25. *AN :* $\boxed{\tau_v = 1{,}3\ s}$

La valeur s'approche de celle de $\tau_{exp} = 1{,}5$ s donnée en Q21… mais l'écart relatif est encore de 13%. Pour affiner la modélisation, il faudrait tenir du rétrécissement du cylindre de R_1 à R_2, ce qui introduirait une **perte de charge singulière** (et on n'aurait plus $v_1 = v_2$ ce qui avait simplifié l'expression de la différence des pressions totales en Q23).

Troisième Partie : propulseur de plongée CCIN 2015 TPC

17) Ecoulement incompressible → conservation du débit volumique $D_v = \iint \vec{v}\cdot\vec{dS}$

avec $\vec{v}$ uniforme sur S → $D_v = vS$ se conserve donc

$$\boxed{D_v = vS = v'S' = v_2 S_2 = v_1 S_1}$$

Avec $S \simeq S'$ ⟹ $\boxed{v' \simeq v}$

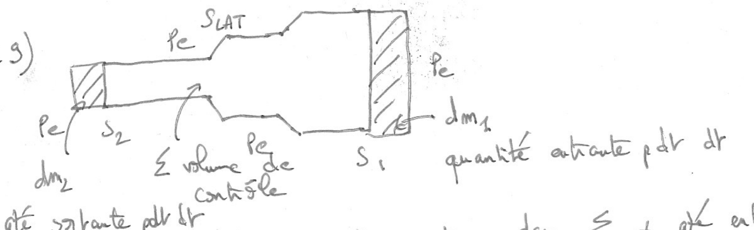
18) En appliquant la relation de Bernoulli sur une ligne de courant parallèle à (Ox) entre S et S_1 :

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 = \frac{P_e}{\rho} + \frac{1}{2}v_1^2 \rightarrow \boxed{P = P_e + \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v^2)}$$

Sur une ligne de courant tjs horizontale entre S_2 et S' :

$$\frac{P_e}{\rho} + \frac{1}{2}v_2^2 = \frac{P'}{\rho} + \frac{1}{2}v \rightarrow \boxed{P' = P_e + \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v^2)}$$

19)



Système = à t → fluide contenu dans Σ + qté entrante dm_1
à $t+dt$ → fluide contenu dans Σ + qté sortante dm_2

En écoulement stationnaire, par conservation du débit massique, $dm_1 = dm_2 = dm$

le système est fermé. Bilan de qté de mvt :

$$\vec{dp} = \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = \vec{p_\Sigma}(t+dt) + \vec{dp_2} - (\vec{p_\Sigma}(t) + \vec{dp_1})$$
$$= \underbrace{\vec{p_\Sigma}(t+dt) - \vec{p_\Sigma}(t)}_{\vec{0} \text{ en régime statio}} + \vec{dp_2} - \vec{dp_1}$$

Avec $\vec{dp_1} = dm_1\vec{v_1} = dm\,\vec{v_1} = D_m\,dt\,\vec{v_1}$

$\vec{dp_2} = dm_2\vec{v_2} = dm\,\vec{v_2} = D_m\,dt\,\vec{v_2}$

donc $\vec{dp} = D_m\,dt(\vec{v_2} - \vec{v_1}) \Rightarrow \frac{\vec{dp}}{dt} = D_m(\vec{v_2} - \vec{v_1})$

Avec $D_m = \rho D_v = \rho v S$

$$\boxed{\frac{\vec{dp}}{dt} = \rho v S(\vec{v_2} - \vec{v_1})}$$

Bilan de forces : $\frac{\vec{dp}}{dt} = \sum \vec{F_{ext}} = \vec{F_P} + \vec{F}_{hélice \to fluide}$

avec $\vec{F_P} = \vec{0}$ de résultante nulle car P_e est uniforme

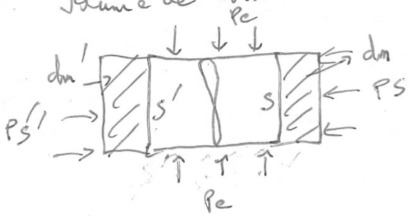
$\left(\vec{F_P} = \oiint_{S\,tube\,de\,courant\,=\,S_{LAT}+S_1+S_2} -P_e\vec{dS} = \iiint_V -\vec{grad}\,P_e\,dV = \vec{0}\right)$

Donc $\boxed{\frac{\vec{dp}}{dt} = \vec{F} = \rho v S(\vec{v_2} - \vec{v_1})}$

Avec $v_1 < v_2$, l'hélice accélère le fluide vers l'arrière du plongeur, la force exercée sur le fluide est bien selon $+\vec{u_x}$.

En act réciproque, cet écoulement impose une force sur l'hélice, et le plongeur (lié à l'hélice), de propulsion dirigée selon $-\vec{u_x}$ (dirigée vers l'avant du plongeur).

20) Bilan de qté de mvt appliqué à ce nouveau système avec volume de contrôle entre S et S'



régime statio. → $dm = dm'$

volume de contrôle entre S et S'

Par la même méthode que précédemment

$$\frac{\vec{dp}}{dt} = D_m(\vec{v'} - \vec{v}) = \vec{0} \text{ car } \vec{v'} = \vec{v}$$

donc $\frac{\vec{dp}}{dt} = \sum \vec{F_{ext}} = \vec{F_P} + \vec{F}_{hélice \to fluide}$

avec pour les forces de pression compensat sur les parties latérales mais pas sur S et S' : $\vec{F_P} = (PS - P'S')\vec{u_x}$

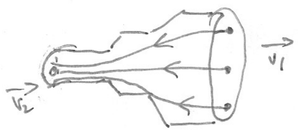
$\vec{F_P} \simeq (P - P')S\,\vec{u_x}$

donc $\vec{F} = -\vec{F_P} = (P' - P)S\,\vec{u_x}$

D'après 18) $P' - P = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2)$

Donc $\boxed{\vec{F} = \frac{\rho S}{2}(v_2^2 - v_1^2)\,\vec{u_x}}$

Avec $v_2 > v_1$ → $\vec{F}$ est selon $+\vec{u_x}$ aussi ! M significatif



L'allure des lignes de courant présente un resserement car $v_2 > v_1$ (flux conservatif car écoulement incompressible et $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$)

Naturellement, le tube de courant présente une surface $S_1 > S_2$ car $v_2 > v_1$ pour conservat du débit volumique.

21) En égalisant les expressions de $\vec{F}$:

$$\frac{\rho S}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \cancel{\frac{\rho S}{2}}\cancel{(v_2 - v_1)}(v_2 + v_1) = \cancel{\rho S} v \cancel{(v_2 - v_1)}$$

$$\boxed{v = \frac{v_1 + v_2}{2}}$$

22) a) $P_f = \vec{F} \cdot \vec{v}$ au niveau de l'hélice

$$P_f = D_m(v_2 - v_1) \times v = D_m(v_2 - v_1)\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)$$

$\boxed{P_f = \frac{D_m}{2}(v_2^2 - v_1^2)} > 0$ Pfournie par l'hélice au fluide pour l'accélérer

b) Le Bilan d'énergie mécanique avec $E_m = E_c + E_p$ revient à un bilan d'Ec (car Ep ne varie pas).

Prenons le système global entre S_1 et S_2 comme à la question 20)

$$dE_c = E_c(t+dt) - E_c(t) = \underbrace{E_{c,\Sigma}(t+dt) - E_{c,\Sigma}(t)}_{0 \text{ en régime statio.}} + dm_2\frac{v_2^2}{2} - dm_1\frac{v_1^2}{2}$$

et $dm_1 = dm_2$

$$dE_c = \frac{dm}{2}(v_2^2 - v_1^2)$$

$dm = D_m\,dt$

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{D_m}{2}(v_2^2 - v_1^2)$$

Appliquons le théorème de la puissance ~~cinétique~~

$$\frac{dE_c}{dt} = P_{int} + P_{ext}$$

P_{ext} ⇒ force exercée par l'hélice P_f

⇒ force de pression $= P_{F_P} = P_e S_1 v_1 - P_e S_2 v_2 = P_e(\underbrace{S_1 v_1 - S_2 v_2}_{0 \text{ car } D_V = cste})$

$P_{int} = 0$ car fluide parfait et incompressible

$\frac{dE_c}{dt} = \boxed{P_f = \frac{D_m}{2}(v_2^2 - v_1^2)}$ M résultat !

23) Loi de composit° des vitesses donne :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{w} &= \vec{v_2} - \vec{U}\\ \vec{0} &= \vec{v_1} - \vec{U}\end{aligned}}$$

24) $\vec{F} = D_m(\vec{v_2} - \vec{v_1}) = D_m(v_2 - v_1)\vec{u_x}$

avec $v_2 = 2v - v_1$ → $v_2 - v_1 = 2v - 2v_1 = 2(v - v_1) = 2(v - U)$

$\boxed{\vec{F} = 2D_m(v - U)\vec{u_x}}$ → $v = \frac{F}{2D_m} + U$

$$P_f = Fv = F\left(\frac{F}{2D_m} + U\right) = \frac{F^2}{2D_m} + FU$$

$$P_f^2 = FUP_f + \frac{F^2}{2D_m}P_f$$

↳ $P_f^2 - FUP_f - \frac{F^2}{2\rho S v}P_f = 0$; $P_f = F.v$

(1) $\boxed{P_f^2 - FUP_f - \frac{F^3}{2\rho S} = 0}$

25) Vitesse constante ⇒ $\sum \vec{F} = \vec{0}$ ⇒ $\boxed{F = T_r}$ les forces se compensent

Résolut° : $\Delta = F^2U^2 + \frac{\cancel{4}\,2\,F^3}{\cancel{27}\rho S} = \frac{1}{4}(C_x\rho S_{eff})^2 U^6 + \frac{2}{8}\frac{(C_x\rho S_{eff})^3 U^6}{\rho S}$

$$P_f = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}C_x\rho S_{eff}U^2U \pm \frac{U^3}{2}\sqrt{(C_x\rho S_{eff})^2 + \dots}\right.$$

$$P_f = \frac{1}{4}C_x\rho S_{eff}U^3\left[1 \pm \sqrt{1+\frac{C_xS_{eff}}{S}}\right]$$

La solut° $\ominus$ donne $P_f < 0$ à rejeter, donc

$$\boxed{P_f = \frac{1}{4}C_x\rho S_{eff}\left[1+\sqrt{1+\frac{C_xS_{eff}}{S}}\right]U^3}$$

2b) AN avec $U = 5\ km.h^{-1} = \frac{5}{3{,}6}\ m.s^{-1}$

$$C_x\frac{S_{eff}}{S} = C_x \times \frac{0{,}12}{0{,}0707} = 0{,}152 \ll 1\,!$$

$$P_f \simeq \frac{1}{4}C_x\rho S_{eff}U^3 = 2{,}7\times U^3 = 7{,}2\,W\,!$$

avec $U = 10\ km.h^{-1} \Rightarrow P_f \simeq 58\,W \rightarrow$ facteur 4 % à la puissance de 220 W ! annoncée !

On a négligé le caractère non-parfait de l'écoulem^t avec pertes par viscosité lors de la rotat° de l'hélice au contact de l'eau .... (frottem^t....)