

ANALYSE DE FOURIER

1. SÉRIE DE FOURIER

1.1 Théorème pour une fonction f à valeurs réelles

• Théorème

Toute fonction T -périodique du temps $t \mapsto f(t)$, à valeurs réelles, peut être décomposée en une somme d'un nombre fini, ou infini, de composantes sinusoïdales discrètes, dont les pulsations sont multiples de la pulsation fondamentale $\Omega = \frac{2\pi}{T}$:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t)] = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\Omega t + \psi_n)$$

Puisque $c_n \cos(n\Omega t + \psi_n) = \underbrace{c_n \cos \psi_n}_{a_n} \cos(n\Omega t) - \underbrace{c_n \sin \psi_n}_{b_n} \sin(n\Omega t)$, on a $c_n^2 = a_n^2 + b_n^2$.

On peut prendre $c_n \geq 0$ (il existe d'autres conventions). On a alors $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

• Calcul des coefficients

Le coefficient c_0 est égal à la valeur moyenne de la fonction f , et correspond donc à la

pulsation $\omega = 0$ (période $T \rightarrow \infty$) : $c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \langle f \rangle$.

Les coefficients a_n et b_n valent $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\Omega t) dt$ et $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\Omega t) dt$.

En conséquence, les coefficients a_n sont tous nuls si f est impaire et les coefficients b_n sont tous nuls si f est paire.

• Convergence

Pour les fonctions f de classe C^1 par morceaux, $c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\Omega t_0 + \psi_n)$ converge bien vers $f(t_0)$ pour toute valeur t_0 où f est continue. Au contraire si f est discontinue en t_0 , la série

$c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\Omega t_0 + \psi_n)$ converge vers $\frac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2}$, qui peut être différent de $f(t_0)$.

• Vocabulaire

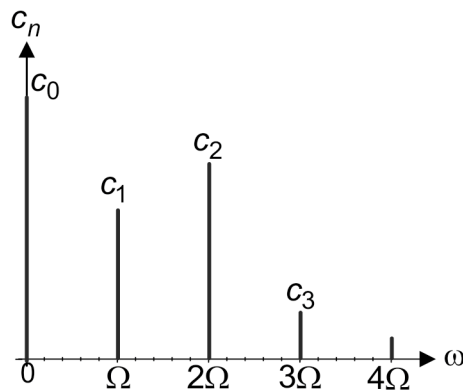
$c_1 \cos(\Omega t + \psi_1)$ est le **fondamental** de f (même période T que f)

$c_n \cos(n\Omega t + \psi_n)$ est l'**harmonique de rang n** de f (période T/n)

• Spectre de f

C'est une représentation de l'amplitude des harmoniques d'un signal en fonction de la

fréquence. On représente souvent les amplitudes c_n des harmoniques en fonction de la pulsation ω (qui ne prend que les valeurs discrètes $\omega = n\Omega$ avec $n = 0, 1, 2, \dots$) spectre de raies.



● **Approximation de f**

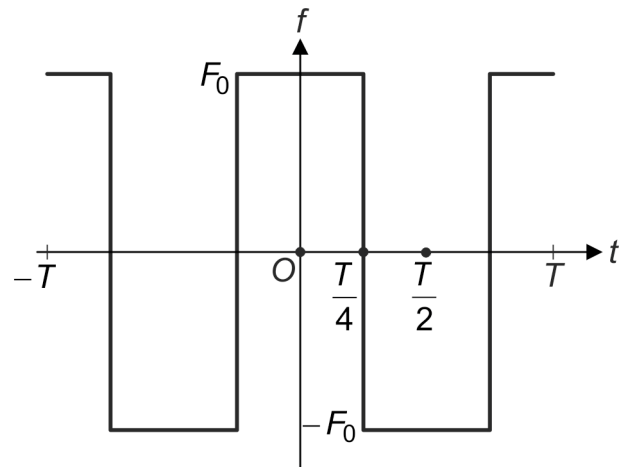
Pour toute fonction « physique », $c_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, ce qui permet d'approximer f par une somme finie de sinusoides. Pour les fonctions qui présentent des discontinuités (créneaux par exemple), donc des variations infiniment rapides, les c_n décroissent lentement avec n puisque ces variations rapides correspondent à de grandes pulsations.

● **Exemples de calcul**

— **Fonction « créneaux »**

Prenons f paire et :

$$\begin{cases} f(t) = F_0 \text{ pour } 0 \leq t < \frac{T}{4} \\ f\left(\frac{T}{4}\right) = 0 \\ f(t) = -F_0 \text{ pour } \frac{T}{4} < t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$



Il s'agit de créneaux symétriques (sur une période T , le signal prend pendant $\frac{T}{2}$ la valeur

« haute » et pendant $\frac{T}{2}$ la valeur basse), de valeur moyenne nulle.

On a donc : $c_0 = \langle f \rangle = 0$ et $b_n = 0 \forall n$ car f est paire. Il reste à calculer les a_n :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(t) \cos(n\Omega t)}_{\text{paire}} dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\Omega t) dt = \frac{4}{T} \left\{ \int_0^{\frac{T}{4}} \underbrace{f(t)}_{F_0} \cos(n\Omega t) dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(t)}_{-F_0} \cos(n\Omega t) dt \right\}$$

$$a_n = \frac{4F_0}{T} \left\{ \left[\frac{\sin(n\Omega t)}{n\Omega} \right]_0^{\frac{T}{4}} - \left[\frac{\sin(n\Omega t)}{n\Omega} \right]_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \right\} = \frac{4F_0}{n\Omega T} \left\{ 2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right\} = \frac{4F_0}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \text{ car } \Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

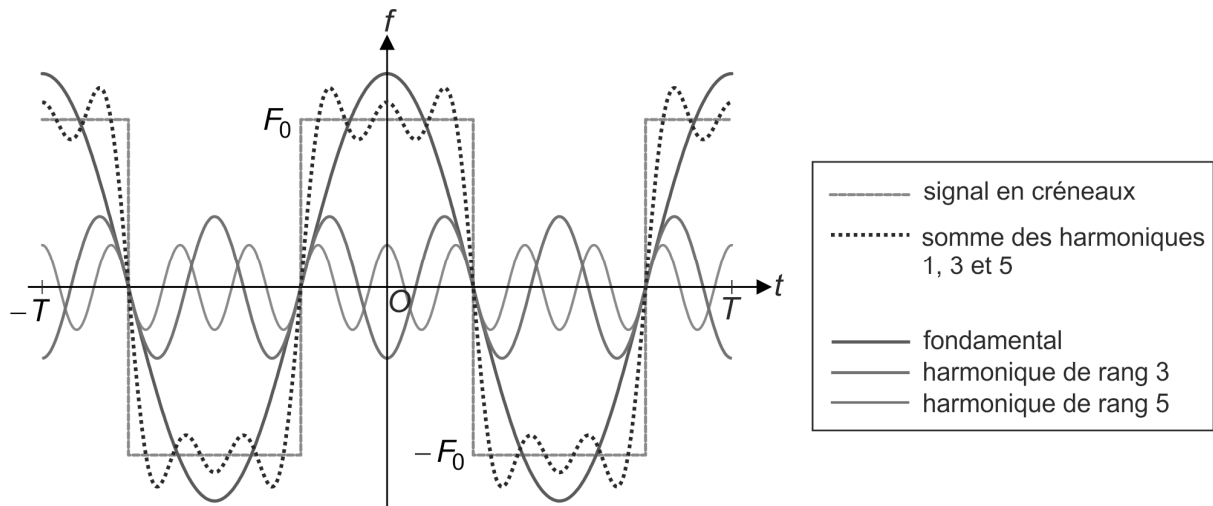
On distingue alors les cas n pair et impair :

pour $n = 2p : a_{2p} = 0 ;$ pour $n = 2p + 1 : a_{2p+1} = \frac{4F_0}{(2p+1)\pi} (-1)^p .$

Les conditions de convergence étant vérifiées pour toutes les valeurs de t , on a finalement :

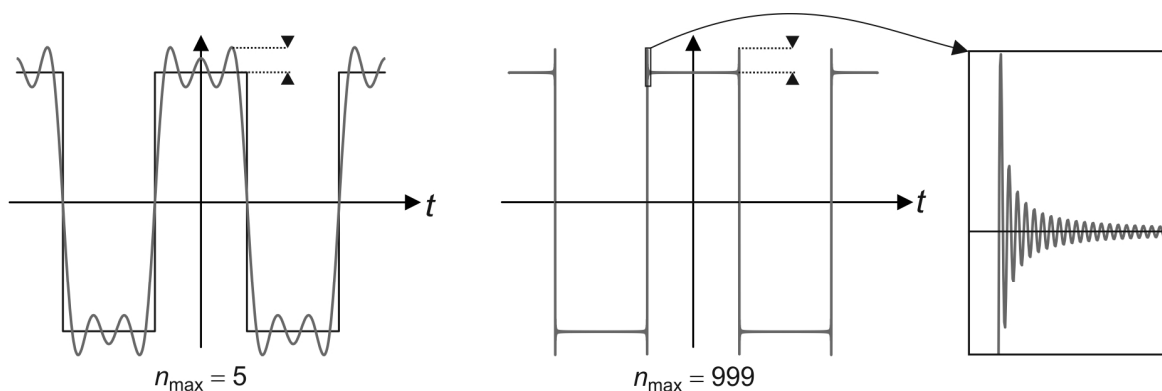
$$f(t) = \frac{4F_0}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \cos[(2p+1)\Omega t] = \frac{4F_0}{\pi} \left[\cos(\Omega t) - \frac{1}{3} \cos(3\Omega t) + \frac{1}{5} \cos(5\Omega t) - \frac{1}{7} \cos(7\Omega t) + \dots \right]$$

Le fondamental $\frac{4F_0}{\pi} \cos(\Omega t)$ possède une amplitude plus grande que celle des créneaux.



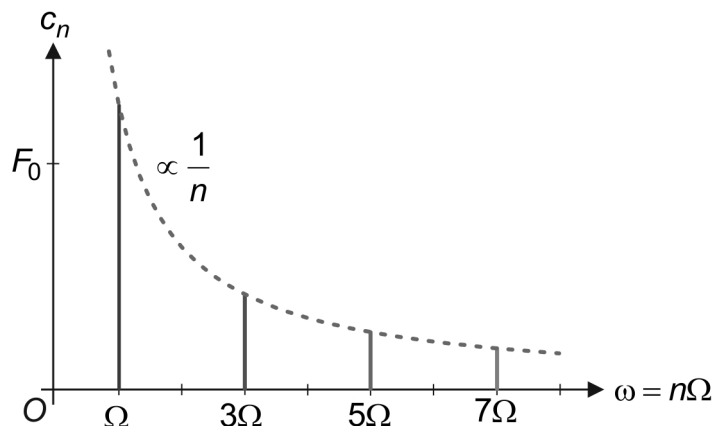
On a représenté ci-dessus le signal temporel, les premiers harmoniques non nuls (rangs 1 : fondamental, 3 et 5), et la somme de ces trois premiers harmoniques.

On constate que la convergence est non uniforme (l'écart entre la somme d'un nombre fini de sinusoïdes, même très grand, et les créneaux reste borné inférieurement). Ceci est dû à la présence de la discontinuité dans les créneaux.



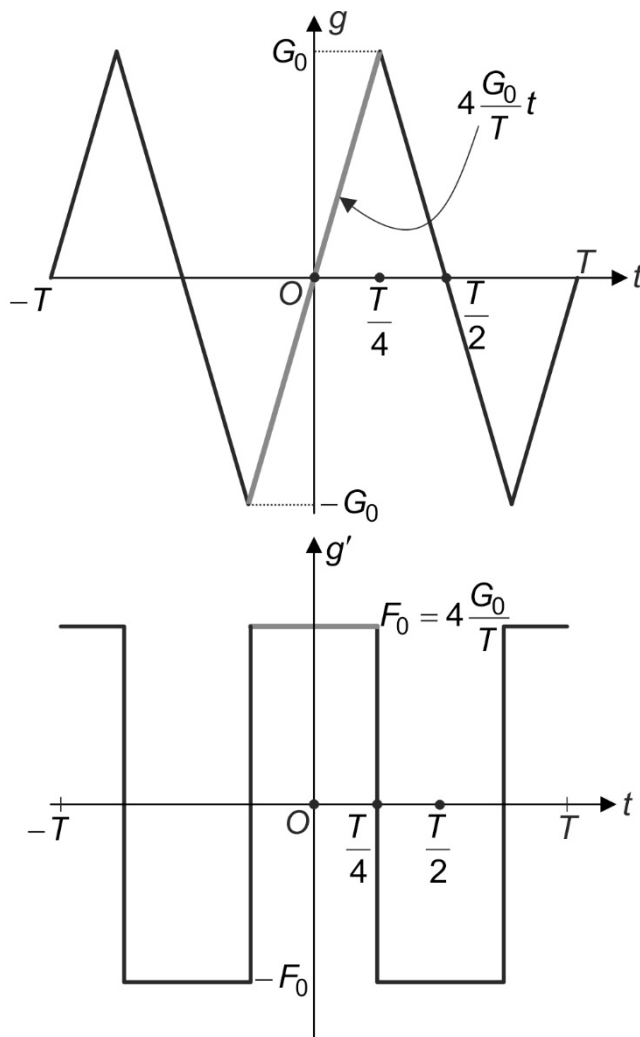
Convergence non uniforme : même en sommant un grand nombre de sinusoïdes, il persiste un écart entre cette somme et les créneaux. C'est le phénomène de Gibbs qui existe dès que la fonction que l'on approxime ainsi présente des discontinuités. En revanche, la série de Fourier converge simplement vers les créneaux : en un point donné, l'écart devient aussi faible que l'on veut en augmentant le nombre d'harmoniques que l'on somme.

Le spectre des créneaux est le suivant :



L'amplitude des harmoniques étant proportionnelle à $1/n$, elle décroît « lentement » avec n et il faut beaucoup d'harmoniques pour bien approximer les créneaux (c'est dû à la discontinuité).

— Fonction « triangles »



On a $g'(t) = f(t) = \frac{4F_0}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \cos[(2p+1)\Omega t]$ à tout instant en prenant $g'\left(\frac{T}{4}\right) = 0$. Or

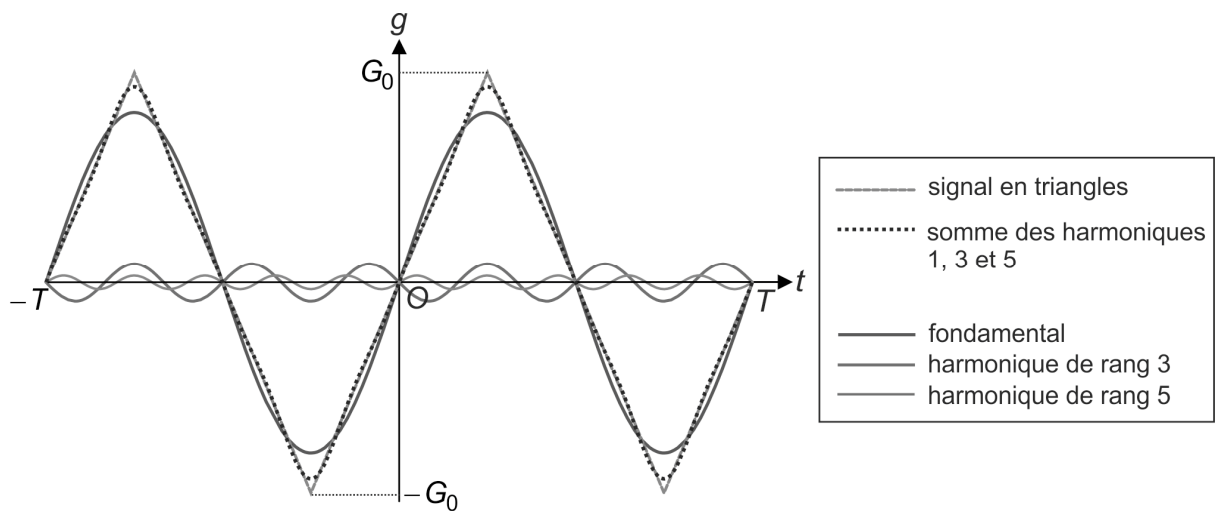
$$g(t) = 4 \frac{G_0}{T} t \text{ entre } -\frac{T}{4} \text{ et } \frac{T}{4}. \quad \text{On en déduit } g'(t) = 4 \frac{G_0}{T} = F_0.$$

On obtient $g(t)$ par intégration :

$$g(t) = \underbrace{g(0)}_{=0} + \int_0^t f(t) dt = \frac{16G_0}{\pi\Omega T} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2} \sin[(2p+1)\Omega t], \text{ avec } \Omega = \frac{2\pi}{T}, \text{ soit :}$$

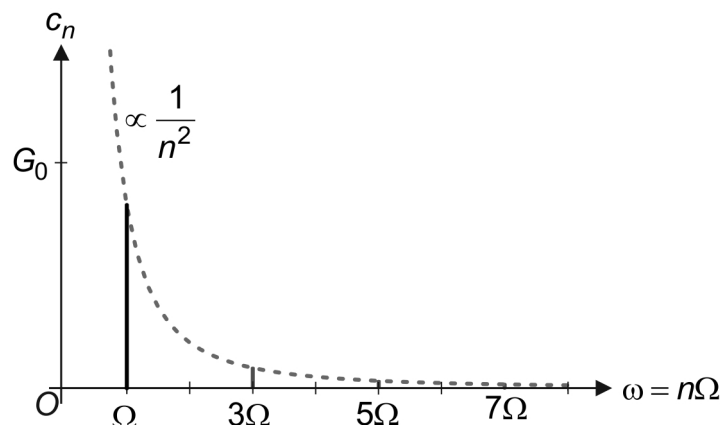
$$g(t) = \frac{8G_0}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2} \sin[(2p+1)\Omega t] = \frac{8G_0}{\pi^2} \left[\sin(\Omega t) - \frac{1}{3^2} \sin(3\Omega t) + \frac{1}{5^2} \sin(5\Omega t) - \frac{1}{7^2} \sin(7\Omega t) + \dots \right]$$

Le fondamental $f(t) = \frac{8G_0}{\pi^2} \sin(\Omega t)$ possède une amplitude plus petite que celle des triangles.



On constate que la convergence est cette fois-ci uniforme (l'écart maximal entre la somme d'un nombre fini de sinusoïdes tend vers 0).

Le spectre des triangles est le suivant :



L'amplitude des harmoniques étant proportionnelle à $1/n^2$, elle décroît « rapidement » avec n et il faut peu d'harmoniques pour bien approximer les triangles.

1.2 Théorème pour les fonctions f à valeurs complexes (complément hors-programme)

• Théorème

Toute fonction T_0 -périodique du temps f , à valeurs complexes, peut être décomposée en une somme d'un nombre fini, ou infini, de composantes sinusoïdales discrètes, dont les fréquences sont multiples de la fréquence fondamentale $\nu_0 = \frac{1}{T_0}$.

Le développement en série de Fourier s'écrit $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_n e^{2i\pi n \nu_0 t}$.

Les coefficients de la série de Fourier se calculent à l'aide de la formule suivante :

$$\underline{C}_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-2i\pi n \nu_0 t} dt.$$

Le spectre de f fait donc intervenir des fréquences négatives, mais pour une fonction f réelle, on a $\underline{C}_{-n} = \underline{C}_n^*$ d'où :

$$\begin{aligned} f(t) &= \underline{C}_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \underline{C}_{-n} e^{-2i\pi n \nu_0 t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underline{C}_n e^{2i\pi n \nu_0 t} = \underline{C}_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [\underline{C}_n e^{2i\pi n \nu_0 t} + (\underline{C}_n e^{2i\pi n \nu_0 t})^*] \\ &= \underline{C}_0 + 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \underline{C}_n e^{2i\pi n \nu_0 t} \right] \end{aligned}$$

On peut donc ne considérer que les fréquences positives. Le spectre est alors par exemple la représentation de $2|\underline{C}_n| = c_n$ pour $\nu = \nu_0, 2\nu_0, 3\nu_0, \dots, n\nu_0$ et de la valeur moyenne

$$\underline{C}_0 = c_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) dt = \langle f \rangle \text{ correspondant à la fréquence } \nu = 0.$$

• Autre forme pour les fonctions à valeurs réelles

Posons $\underline{C}_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ pour $n > 0$ et $\Omega = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi\nu_0$. On a alors :

$$f(t) = \underline{C}_0 + 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \underline{C}_n e^{in\Omega t} \right] = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t)].$$

Comme $\underline{C}_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) [\cos(n\Omega t) - i \sin(n\Omega t)] dt$, d'où les coefficients c_0 , a_n et b_n :

$$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) dt = \langle f \rangle \quad a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cos(n\Omega t) dt \quad b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \sin(n\Omega t) dt$$

On a donc également :

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\Omega t + \psi_n) \text{ avec } c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|\underline{C}_n| \text{ (forme vue au 1.1).}$$

2. TRANSFORMÉE DE FOURIER

2.1 Théorème

Toute fonction du temps f , non périodique, à valeurs complexes, telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ converge, peut également être représentée dans le domaine fréquentiel par un spectre, fonction continue de la fréquence, donnée par la transformée de Fourier :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(v) e^{2i\pi vt} dv, \text{ où } \tilde{f} = \text{TF}(f) \text{ est la } \mathbf{transformée de Fourier} \text{ de } f, \text{ donnée par :}$$

$$\tilde{f}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi vt} dt.$$

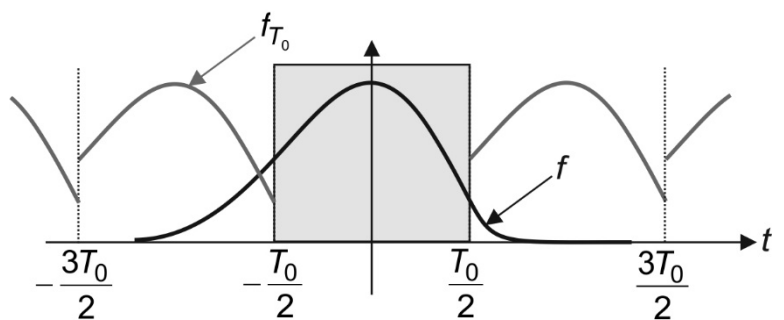
Le spectre de f fait donc intervenir des fréquences négatives, mais pour une fonction f réelle, on a $\tilde{f}(-v) = \tilde{f}^*(v)$, d'où :

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^0 \tilde{f}(v) e^{2i\pi vt} dv + \int_0^{+\infty} \tilde{f}(v) e^{2i\pi vt} dv = \int_0^{+\infty} \tilde{f}(-v) e^{-2i\pi vt} dv + \int_0^{+\infty} \tilde{f}(v) e^{2i\pi vt} dv \\ &= \int_0^{+\infty} [\tilde{f}(v) e^{2i\pi vt} + (\tilde{f}(v) e^{2i\pi vt})^*] dv = 2 \operatorname{Re} \left[\int_0^{+\infty} \tilde{f}(v) e^{2i\pi vt} dv \right] \end{aligned}$$

On peut donc ne considérer que les fréquences positives. Le spectre est alors par exemple la représentation de $2|\tilde{f}(v)|$ pour $v \geq 0$.

2.2 Démonstration (complément hors-programme)

Considérons f_{T_0} , la « périodisée de f », fonction T_0 -périodique qui s'identifie avec f sur l'intervalle $\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right]$. On peut lui appliquer le théorème de Fourier pour les fonctions périodiques :



$$\text{On a } f_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_n e^{2i\pi n v_0 t} \text{ avec } \underline{C}_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_{T_0}(t) e^{-2i\pi n v_0 t} dt \stackrel{\text{déf } T_0}{=} \frac{1}{T_0} \tilde{f}_{T_0}(n v_0).$$

$\Delta v = (n+1)v_0 - n v_0 = v_0 = \frac{1}{T_0}$ étant l'écart entre deux fréquences consécutives présentes

dans le spectre de $f_{T_0}(t)$, on peut écrire $f_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_{T_0}(n v_0) e^{2i\pi n v_0 t} \Delta v$.

$$\text{Lorsque } T_0 \rightarrow +\infty, \text{ on a } \begin{cases} f_{T_0}(t) \rightarrow f(t) \\ \tilde{f}_{T_0}(nv_0) \rightarrow \tilde{f}(nv_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi nv_0 t} dt \\ \Delta v \rightarrow dv \end{cases}$$

$$\text{On a alors } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_{T_0}(nv_0)e^{2i\pi nv_0 t} \Delta v \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(v)e^{2i\pi vt} dv \text{ puisque, pour } n \in \mathbb{Z}, v = nv_0 \text{ varie}$$

continûment entre $-\infty$ et $+\infty$ lorsque $v_0 = \Delta v$ devient infiniment petit.

$$\text{On a bien } f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(v)e^{2i\pi vt} dv, \text{ avec } \tilde{f}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi vt} dt.$$

2.3 Propriétés

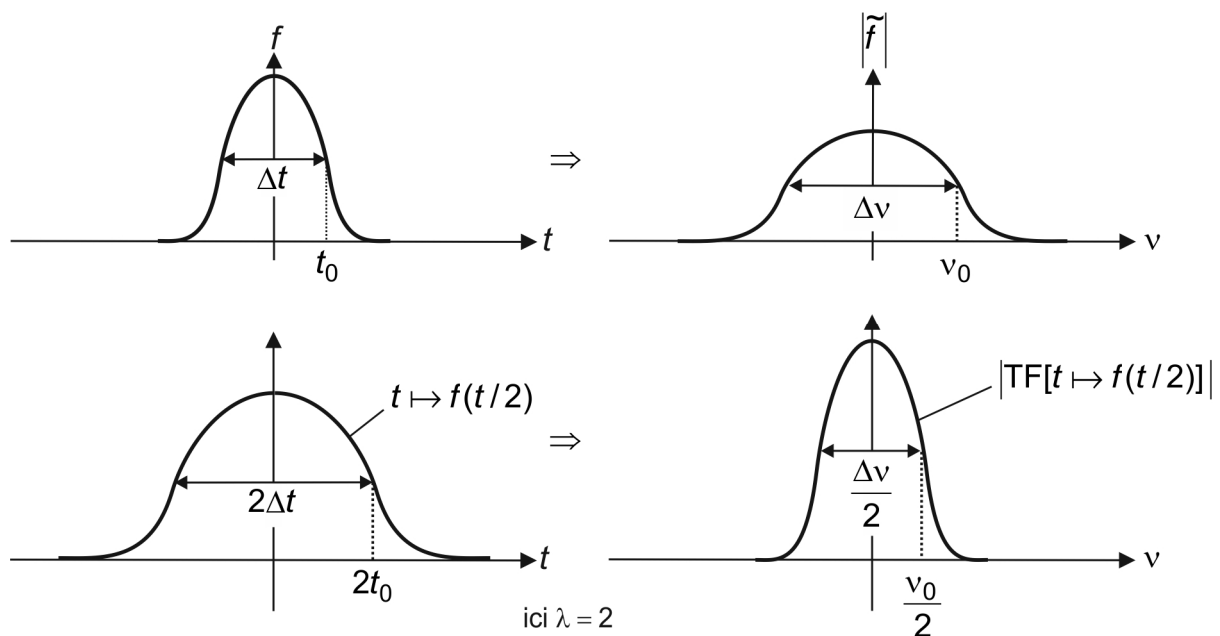
— La TF est *linéaire* : $\text{TF}(\lambda f + \mu g) = \lambda \text{TF}(f) + \mu \text{TF}(g)$.

— $\text{TF}[\text{TF}(f)](t) = f(-t)$.

— Translation : $\text{TF}[t \mapsto f(t - t_0)](v) = e^{-2i\pi vt_0} \cdot \tilde{f}(v)$.

— Similitude : $\text{TF}\left[t \mapsto f\left(\frac{t}{\lambda}\right)\right](v) = |\lambda| \cdot \tilde{f}(\lambda v)$

Cette propriété est fondamentale : une dilatation de l'échelle des temps implique une contraction de celle des fréquences ($\lambda > 1$). Une contraction de l'échelle des temps implique une dilatation de celle des fréquences ($\lambda < 1$).

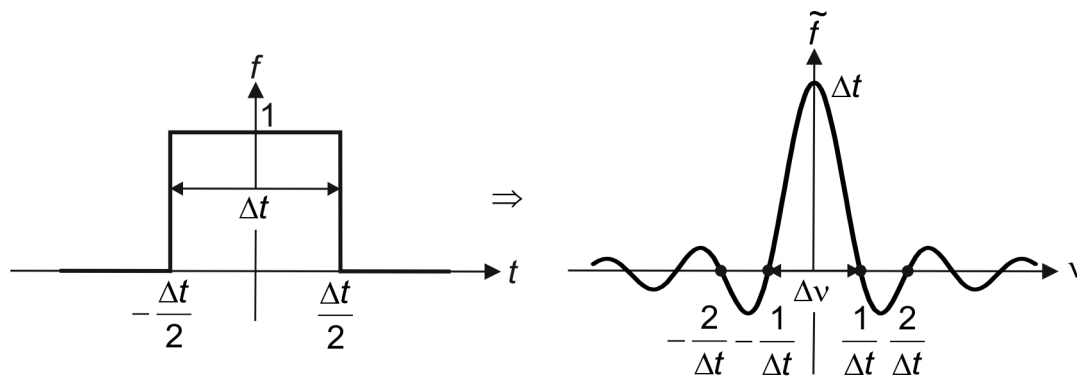


En d'autres termes :

Plus un signal temporel est bref, plus il est riche en fréquences (spectre étalé) ; plus il dure longtemps, moins il contient de fréquences (spectre étroit).

2.4 Exemples

• Fonction « fenêtre »



On calcule sa transformée de Fourier :

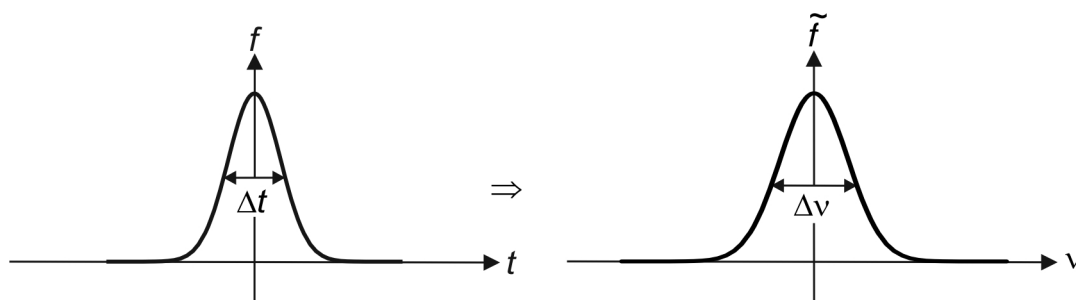
$$\tilde{f}(v) = \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} e^{-2i\pi vt} dt = \left[\frac{e^{-2i\pi vt}}{-2i\pi v} \right]_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} = \Delta t \frac{e^{i\pi v \Delta t} - e^{-i\pi v \Delta t}}{2i\pi v \Delta t} = \Delta t \cdot \text{sinc}(\pi v \Delta t).$$

La fonction sinc est la fonction *sinus cardinal*, définie par $\text{sinc}(X) = \frac{\sin X}{X}$ pour $X \neq 0$ et $\text{sinc}(0) = 1$ en prolongeant par continuité. $\tilde{f}(v)$ est ici réelle.

Avec la définition de la largeur de bande spectrale Δv donnée sur la figure ci-avant, on a $\Delta t \cdot \Delta v = 2$. On retrouve que plus le signal dure longtemps, plus sa bande spectrale est petite.

• Fonction « gaussienne »

C'est la fonction $t \mapsto f(t) = e^{-\beta t^2}$.



On calcule sa transformée de Fourier :

$$\tilde{f}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta t^2} e^{-2i\pi vt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \left[\left(t + \frac{i\pi v}{\beta} \right)^2 + \frac{\pi^2 v^2}{\beta^2} \right]} dt = e^{-\frac{\pi^2 v^2}{\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta u^2} du, \quad \text{où l'on a effectué le}$$

changement de variable $u = t + \frac{i\pi v}{\beta}$ (on admettra sa validité).

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$, on a $\tilde{f}(v) = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} e^{-\frac{\pi^2 v^2}{\beta}}$, la TF d'une gaussienne est également

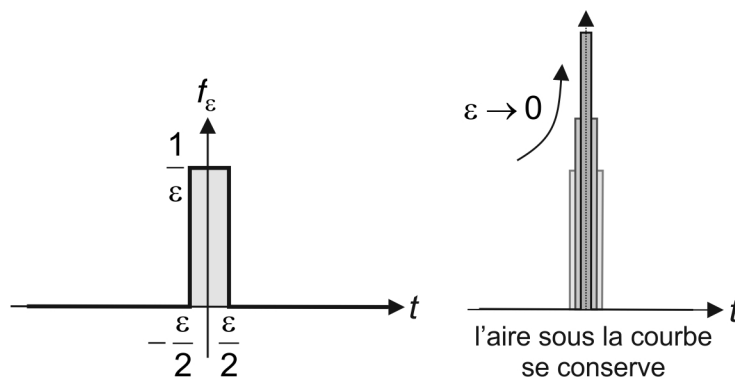
une gaussienne. $\tilde{f}(v)$ est ici réelle.

Le calcul des largeurs à mi-hauteur des deux gaussiennes donne $\Delta t = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\beta}}$ et $\Delta v = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\pi} \sqrt{\beta}$ d'où $\Delta t \cdot \Delta v = \frac{4 \ln 2}{\pi}$. On retrouve que plus le signal dure longtemps, plus sa bande spectrale est petite.

2.5 Distribution de Dirac δ

• Définition

On obtient une telle distribution en prenant la limite des fonctions f_ε , définies sur le graphe ci-dessous, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$:



On note $\delta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon$.

δ correspond donc à une impulsion idéale : $\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \neq 0 \\ +\infty & \text{pour } t = 0 \end{cases}$

Cependant, comme $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(t) dt = \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1$ (l'aire sous la courbe des fonctions f_ε est la même

quel que soit ε), cette propriété reste vraie pour la distribution : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$.

La distribution de Dirac n'est pas une fonction car pour une fonction f nulle partout sauf en

$t = 0$, on aurait $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0$, alors que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$.

• Propriétés

— Si f est une fonction régulière quelconque $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = f(0)$.

En effet l'intégrale est la même que pour une fonction nulle partout sauf en 0 où elle vaut $f(0)$.

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0).$$

— La transformée de Fourier de la distribution de Dirac est :

$$v \mapsto \tilde{\delta}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-2i\pi vt} dt = 1.$$

On retrouve qu'un signal de durée nulle possède une largeur spectrale infinie.

$$- e^{2i\pi v_0 t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(v-v_0)e^{2i\pi vt} dv. \text{ Comme } f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(v)e^{2i\pi vt} dv, \text{ on en déduit que la transformée de}$$

Fourier de $t \mapsto f(t) = e^{2i\pi v_0 t}$ vaut $v \mapsto \tilde{f}(v) = \delta(v-v_0)$.

On retrouve que le spectre d'un signal sinusoïdal (de durée infinie) ne contient qu'une raie pour sa fréquence v_0 . Sa largeur spectrale est nulle.

Ainsi, pour qu'un instrument produise un son le plus sinusoïdal possible, il faut qu'il vibre longtemps. C'est ce que réalise approximativement un diapason.

Néanmoins, la durée d'un signal réel étant forcément finie, sa largeur spectrale peut être faible, mais jamais nulle.

La composante sinusoïdale d'un signal n'a donc pas de réalité physique.

— Lorsqu'une fonction est T_0 -périodique, elle admet un développement en série de Fourier :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_n e^{2i\pi n v_0 t} \text{ avec } v_0 = \frac{1}{T_0} \text{ et } \underline{C}_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t)e^{-2i\pi n v_0 t} dt.$$

Comme $e^{2i\pi n v_0 t} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi vt} \delta(v-nv_0) dv$, on en déduit que la transformée de Fourier de

$t \mapsto e^{2i\pi n v_0 t}$ est $v \mapsto \delta(v-nv_0)$.

Ainsi, la transformée de Fourier de $t \mapsto f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_n e^{2i\pi n v_0 t}$ est :

$$v \mapsto \tilde{f}(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_n \delta(v-nv_0).$$

On retrouve que le spectre d'une fonction périodique est discontinu, c'est un spectre de raies qui ne contient que les fréquences multiples de $v_0 = \frac{1}{T_0}$.

L'amplitude des raies est infinie et proportionnelle aux coefficients $|\underline{C}_n|$.

Le spectre est par convention la représentation de $2|\underline{C}_n|$ pour les fréquences

$$v = v_0, 2v_0, 3v_0, \dots, nv_0, \text{ et de } \underline{C}_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) dt = \langle f \rangle \text{ pour } v = 0.$$

2.6 Réponse d'un système linéaire à une entrée quelconque

La représentation usuelle d'une grandeur physique est la représentation temporelle. Comme les systèmes physiques linéaires possèdent la particularité de donner à une excitation sinusoïdale une réponse forcée sinusoïdale de même fréquence, on voit tout l'intérêt que peut avoir la décomposition d'un signal quelconque en une somme de sinusoïdes de fréquences différentes (représentation fréquentielle). On peut grâce à cette représentation fréquentielle déterminer la réponse d'un système linéaire à une excitation quelconque.

Soit $t \mapsto R(t)$ la réponse à une entrée $t \mapsto f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu$.

La réponse à une entrée sinusoïdale $t \mapsto e^{2i\pi\nu t}$ est sinusoïdale et de même fréquence : elle s'écrit $t \mapsto H(\nu) e^{2i\pi\nu t}$, où $\nu \mapsto H(\nu)$ est la fonction de transfert du système linéaire, souvent notée $\omega \mapsto H(j\omega)$.

D'après la linéarité du système, qui implique que la réponse à une somme d'entrée est

égale à la somme des réponses, on a $R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\nu) \tilde{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu$.

Étudions maintenant la réponse à une impulsion. On a dans ce cas :

$f(t) = \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\delta}(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu$, or on a vu que $\tilde{\delta}(\nu) = 1$. On en déduit :

$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu$. D'où :

$H(\nu) = \tilde{R}(\nu) = \text{TF}[t \mapsto R(t)](\nu)$. La fonction de transfert d'un système linéaire est égale à la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle.

On peut expérimentalement obtenir la fonction de transfert d'un circuit linéaire à l'aide d'un générateur d'impulsions et d'un analyseur de spectre.