

CORRIGE CENTRALE PC I 2023

Améliorations des performances en cyclisme

Corrigé rédigé par Nicole ADLOFF (nicole.adloff@gmail.com) et Marc STRUBEL (marc.strubel@wanadoo.fr).

Merci à J.M. Biansan pour ses remarques. N'hésitez pas à nous faire part de vos remarques et commentaires !

Ce corrigé peut (doit ?) être distribué à vos élèves dès 2023.

I. Une première évolution de la forme du casque : du casque classique vers le casque profilé en goutte d'eau

I.A – Évaluation du gain en puissance par une approche empirique

I.A.1) Étude de la phase de démarrage

Q1. Le nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho v L}{\eta}$ caractérise la nature de l'écoulement (laminaire ou turbulent). Avec L une distance caractéristique des variations de v.

Prenons L = 0,5 m (largeur d'épaule) : $Re = \frac{1,225 \cdot \frac{40}{3,6} \cdot 1,8}{1,8 \cdot 10^{-5}} = 4 \cdot 10^5$.

On est dans l'intervalle proposé, on pourra donc supposer le modèle adapté.

Q2. Bilan des actions sur le système cycliste + vélo : $\vec{P}$, $\vec{N}$, $\vec{F}_r$, $\vec{F}_N$

On applique le théorème du centre de masse au système cycliste + vélo :

Projection sur Ox :

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \alpha - \mu_r N - \frac{1}{2} \rho S C_x v^2$$

Projection sur Oy

$$0 = mg \cos \alpha - N$$

D'où

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\rho S C_x}{2m} v^2 = g(\sin \alpha - \mu_r \cos \alpha)$$

$$a = \frac{\rho S C_x}{2m} = \frac{1,225 \cdot 0,30}{2 \cdot 80} = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1} ; b = g(\sin \alpha - \mu_r \cos \alpha) = 9,8(\sin 0,1 - 6,4 \cdot 10^{-3} \cdot \cos 0,1) = 0,92 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Q3. En régime permanent $\frac{dv}{dt} = 0$

d'où

$$v_{\text{lim}}^2 = b/a = \frac{2mg(\sin \alpha - \mu_r \cos \alpha)}{\rho S C_x}$$
$$K = \frac{2mg(\sin \alpha - \mu_r \cos \alpha)}{\rho}$$

Q4. $v_{\text{lim}} = \sqrt{b/a} = \sqrt{0,92/2,3 \cdot 10^{-3}} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ plutôt rapide mais plausible.

Q5. Lignes 1 et 2 : importation des bibliothèques.

Ligne 3 à 7 : définit une fonction r ayant comme arguments f, v et t.

L'argument t est la liste des instants successifs, v est la vitesse initiale, et f l'accélération.

Cette fonction renvoie la liste des vitesses V aux instants successifs de la liste t à partir de la méthode d'Euler appliquée à l'équation différentielle (I.1) discrétisée.

Lignes 8 et 9 : Renvoie F/m = 0,92 - 2,2 · 10⁻³ v² fonction trouvée en Q2

Ligne 10 définit une liste des temps

Ligne11 : calcule la liste des vitesses avec les données de l'exercice.

Lignes12 et 13 : tracé du graphe $v(t)$

Q6. Le vecteur x est un array numpy qui contient 1000 valeurs du temps également réparties entre 0 et 120 (secondes)

Courbe 1 : échantillonnage correct, correspond à la courbe cherchée, $v_{\text{lim}} = 20 \text{ m.s}^{-1}$

Courbe 2 : échantillonnage 100 fois plus faible que le précédent, on obtient une courbe affine de 12 morceaux,

Courbe 3 : échantillonnage correct, mais un intervalle de temps 10 fois plus faible que celui de la courbe 1, la vitesse limite n'est pas atteinte.

Courbe 4 : échantillonnage trop faible, courbe à 10 segments, intervalle de temps plus important, sur le 1^{er} segment la vitesse finale est supérieure à la vitesse limite, donc sur le 2^e segment l'accélération est négative, d'où la courbe en dents de scie. La méthode d'Euler ne converge pas.

Q7. $L_{\text{RP}} = \int_0^{t_f} v(t)dt$ où t_f est environ égal à 40 s si on se place à 95% de v_{lim} , soit $v = 19 \text{ m.s}^{-1}$.

En assimilant l'accélération en régime transitoire à une constante d'après la courbe 3

$$V = a*t; L_{\text{RP}} = a*t_f^2 / 2 = (10/12)*40^2/2 = 670 \text{ m}$$

Cette valeur surestime LRP, c'est un majorant.

On peut calculer un minorant en assimilant la courbe 1 à une courbe affine entre les points $t = 0, v = 0$ et $t = 40\text{s}, v = 38 \text{ m.s}^{-1}$.

On a alors : $L_{\text{RP}} = 40*19/2 = 380 \text{ m}$.

Q8. def LRP(v,t):

L=0

i=0

while $v[i] < 0.95*v[-1]$: # $v[-1]$ est la vitesse limite.

$L += v[i+1]*(t[i+1]-t[i])$

$i += 1$

return L

Remarque : ce script suppose que la vitesse limite est atteinte ! Avec les valeurs du texte, il calcule : $L_{\text{RP}} = 506 \text{ m}$ pour 95 % de V_{limite} . C'est à peu près la moyenne des deux valeurs que nous avons à la question précédente.

I.A.2) Étude du régime permanent dans la descente de Laffrey

Q9. Sur le tableur de la calculatrice pour chaque valeur de T_c pour le casque classique il faut calculer $v_c = L' / T_c$; résultats affichés $\langle v_c \rangle = 18,526 \text{ m.s}^{-1}$ et l'écart-type affiché est $\sigma_v = 0,1143 \text{ m.s}^{-1}$ d'où :

$$u(\langle v_c \rangle) = \sigma_v / \sqrt{10} = 0,036 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\text{soit } \langle v_c \rangle = 18,526 \pm 0,036 \text{ m.s}^{-1}$$

Q10. Les histogrammes donnés peuvent être approximés à une gaussienne de valeur centrale 18,5 pour le casque classique et de demi-largeur à mi-hauteur $(18,7-18,4)/2 = 0,15 \text{ m.s}^{-1}$, proche de l'incertitude type calculée précédemment sur une mesure.

Remarque : en toute rigueur, la largeur à mi-hauteur d'une gaussienne est liée à l'écart type par :

$$\Delta v = 2\sqrt{2 \ln(2)} \sigma \approx 2,36 \sigma$$

Les étudiants doivent-ils savoir cela ?

Pour le casque profilé la valeur centrale est 19,3 et a largeur à mi-hauteur $(19,4-19,1)/2 = 0,15 \text{ m.s}^{-1}$, ce qui correspond à une valeur de l'incertitude-type $u(\langle v \rangle) = 0,15/10^{0,5} = 0,047 \text{ m.s}^{-1}$, proche de la valeur donnée dans l'énoncé.

Conclusion : La démarche expérimentale est pertinente, que l'incertitude type soit évaluée comme de type A ou de type B, car l'écart entre les deux valeurs moyennes $19,25 - 18,53 = 0,72 \text{ m.s}^{-1}$ est plus de 15 fois plus élevé que la plus grande des incertitudes type sur la moyenne, ce qui valide la démarche expérimentale.

Remarque : on ne comprend pas bien ce que demande cette question : doit-on vérifier que la variabilité observée expérimentalement est cohérente avec la simulation, ou que l'écart entre les deux valeurs de vitesse est significatif ?

$$Q11. AN K = b \cdot 2m / \rho = 0,916 \cdot 2 \cdot 80 / 1,225 = 119,6 \text{ m}^4 \cdot \text{s}^{-2}.$$

```
import numpy.random as rd
import numpy as np
```

```
def MonteCarlo2(
    vitesseMoyenne:float, # vitesse moyenne du cycliste (m/s)
    incertitudeType:float, # incertitude type sur la vitesse (m/s)
    N:int, # nombre d'échantillons à produire
    K:float, # constante dans vlim
) -> [float]: # tableau de N valeurs de SCx simulées
    generateur = rd.default_rng()
    V = generateur.normal(vitesseMoyenne, incertitudeType, N) # on génère les valeurs de v
    SCx = K/V**2
    return (np.mean(SCx), np.std(SCx))
```

```
print(MonteCarlo2( 18.52 , 0.041 , 10000 , 119.6))
print(MonteCarlo2(19.25, 0.036, 10000, 119.6))
```

Réponse de la console :

```
(0.3484668177681698, 0.0013612509872095047)
(0.32275327064773107, 0.0013836612783945698)
```

D'où $SCx(\text{classique}) = 0,3484 \pm 0,0013 \text{ m}^2$
 $SCx(\text{profilé}) = 0,3227 \pm 0,0014 \text{ m}^2$

Je ne trouve pas les mêmes résultats que l'énoncé.

Q12 : Puissance du poids $P_p = m\vec{g} \cdot \vec{v} = mgv \sin \alpha$;
 Puissance de $\vec{N}$ $P_N = 0$ (perpendiculaire au mouvement)
 Puissance de $\vec{F}_r$ $P_r = -\mu_r mg \cos \alpha \cdot v$
 Puissance de $\vec{F}_T$ $P_T = -\frac{1}{2} \rho SC_x v^3$

Q13. Le gain en puissance n'est pas défini ; disons qu'il s'agit de calculer pour la vitesse donnée, constante, la différence relative :

$$\begin{aligned} G &= [P_T(\text{classique}) - P_T(\text{profilé})] \cdot 100 / P_T(\text{classique}) \\ &= [SC_x(\text{classique}) - SC_x(\text{profilé})] \cdot 100 / SC_x(\text{classique}) \\ &= [0,3484 - 0,3227] \cdot 100 / 0,3484 = 7,4 \% \end{aligned}$$

Le « gain en puissance » du au casque profilé est 7,4 % , cohérent avec les 2 à 8% de l'introduction.

Cette valeur n'a en réalité pas de sens, puisque la valeur de SC_x ne dépend pas uniquement du casque, mais également de la vitesse (cf courbe de C_x pour une balle, seule au programme de PC).

Faut-il supposer que les valeurs du tableau 2 donnent des valeurs de Scx à même vitesse ?

Pour l'incertitude type sur ce résultat, on fait une composition des incertitudes :

$$\frac{u(G)}{G} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{u(Scx(classique))^2 + u(Scx(profilé))^2}}{Scx(classique) - Scx(profilé)}\right)^2 + \left(\frac{u(Scx(classique))}{Scx(classique)}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{0,0036^2 + 0,0037^2}}{0,3051 - 0,2937}\right)^2 + \left(\frac{0,0036}{0,3051}\right)^2} = 0,45$$

L'incertitude type est donc de 45 %, ce qui rend le résultat plus que douteux.

Q14. On suppose que la densité de courant $\vec{j}_{el}$ dans le plasma est due uniquement au mouvement des électrons, $\vec{j}_{el} = -ne\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse des électrons déduite du pfd en supposant que l'électron n'est soumis qu'à la partie électrique de la force de Lorentz.

$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$ soit en notation complexe $i\omega m_e \underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}}$ d'où $\underline{\vec{j}}_{el} = \frac{ne^2}{i\omega m_e} \underline{\vec{E}} = \underline{\sigma} \underline{\vec{E}}$ d'après la loi d'Ohm locale

d'où $\underline{\sigma} = -i \frac{ne^2}{\omega m_e} = -i\epsilon_o \frac{\omega_p^2}{\omega}$ en identifiant à l'expression donnée on exprime $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_o m_e}}$.

Q15. A partir des équations de Maxwell dans le plasma et $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{E}) = \overrightarrow{grad}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E}$

MG $\text{div}\vec{E} = 0$ plasma neutre

MF $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

MA $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_o \vec{j}_{el} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

On obtient $\Delta\vec{E} = \mu_o \epsilon_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_o \frac{\partial \vec{j}_{el}}{\partial t}$ équation linéaire pouvant s'écrire en complexe

Avec $\underline{\vec{E}}(z, t) = \underline{E}_x(z, t) \vec{e}_x$ et $\underline{\vec{j}}_{el} = \underline{\sigma} \underline{\vec{E}}$:

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_x(z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{E}_x(z, t)}{\partial t^2} + \mu_o \underline{\sigma} \frac{\partial \underline{E}_x(z, t)}{\partial t}$$

Q16 Relation de dispersion à partir de $\underline{E}_x(z, t) = E_o \exp(i(\omega t + kz))$ et $\underline{\sigma} = -i\epsilon_o \frac{\omega_p^2}{\omega}$ en remplaçant dans

l'équation précédente : $(ik)^2 = \frac{1}{c^2} (i\omega)^2 + \mu_o \left(-i\epsilon_o \frac{\omega_p^2}{\omega}\right) i\omega$

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

Le plasma est dit transparent lorsque l'onde peut se propager sans atténuation, c'est-à-dire lorsque $\underline{k}^2$ est un réel positif. Il faut donc $\omega > \omega_p$

Q17 Déterminons la valeur de $f_p = \omega_p / 2\pi = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_o m_e}} = \frac{1}{2\pi} * 1,6 \cdot 10^{-19} \sqrt{\frac{10^{12}}{8,9 \cdot 10^{-12} 9,1 \cdot 10^{-31}}} = 8,95 \cdot 10^6 \text{ Hz}$

$f_p \approx 9 \text{ MHz} \ll \nu_1 = 1575,4 \text{ MHz}$ et $\nu_2 = 1227,6 \text{ MHz}$.

Le plasma est donc transparent pour le paquet d'onde envoyé.

Q18 Vitesse de phase : $V_\phi = \omega/k = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$

Q19 Vitesse de groupe, c'est la vitesse de propagation du paquet d'onde, $V_g = d\omega/dk$

En différenciant $k^2 : 2kdk = 2\omega d\omega/c^2$ $V_g = c^2 k/\omega = c^2 / V_\phi = c \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega}$

Q20 Tracés classiques, cf cours.

Les fréquences des signaux GPS étant très supérieures à la fréquence de coupure du plasma on peut approximer V_ϕ et V_g à c : le plasma se comporte comme du vide.

Q21 D'après la relation de MF $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ou $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ en utilisant la dérivation formelle avec $\vec{E}(z, t) = E_x(z, t) \vec{e}_x = E_0 \exp(i(\omega t + kz)) \vec{e}_x$ $i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B}$ soit

$$\vec{B} = -\frac{-k\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t + kz)) \vec{e}_y$$

Dans la force de Lorentz, on a négligé $(-e)\vec{v} \wedge \vec{B}$ devant $(-e)\vec{E}$ or $\frac{||\vec{v} \wedge \vec{B}||}{||\vec{E}||} = \frac{vE_0/c}{E_0} = \frac{v}{c} \ll 1$ pour un électron non relativiste ce qui justifie l'approximation faite.

Q22 Soit τ le retard ionosphérique défini par $\tau = t_{\text{plasma}} - t_{\text{vide}} = d(1/V_g - 1/c)$ où d est la distance parcourue dans le plasma.

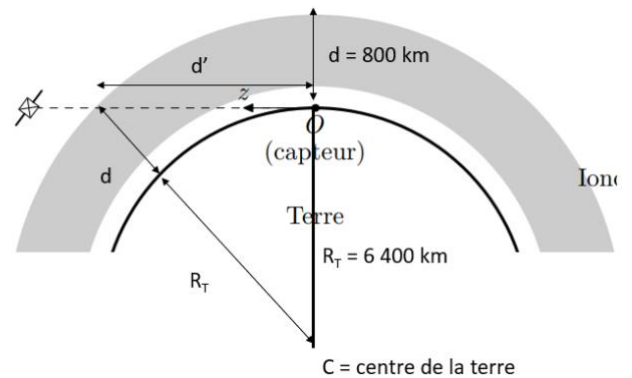
$$\tau = \frac{d}{c} \left(\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} - 1 \right) = \frac{d}{c} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}} - 1 \right) = \frac{d}{2c} \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

en effectuant en DL car $\omega_p \ll \omega$

Q23 On pose $\tau' = \frac{d'}{2c} \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ avec d' identifié sur le schéma

$$d' = \sqrt{(R_T + d)^2 - R_T^2} \cong \sqrt{2dR_T} = 3200 \text{ km}$$

$$\tau' = \frac{d'}{c} \frac{1}{2} \left(\frac{f_p}{v_2} \right)^2 = \frac{3200 \cdot 10^3}{2 \cdot 3 \cdot 10^8} \left(\frac{8,95}{1227,6} \right)^2 = 2,8 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$



Sera le retard maximum subit à la traversée de l'ionosphère.

Q24 Soit $d_1 = ct$ la distance satellite sol lorsque l'onde qu'on confond V_g et c dans l'ionosphère.

Soit $d_2 = c(t - t_{\text{plasma}}) + V_g t_{\text{plasma}}$ la distance satellite sol lorsque la vitesse de l'onde est V_g la vitesse de groupe, t_{plasma} est la durée mise pour traverser l'ionosphère.

$$d_1 - d_2 = (c - V_g) \cdot t_{\text{plasma}} = (c - V_g) \cdot d / V_g = dc(1/V_g - 1/c) = c\tau' = 3 \cdot 10^8 \cdot 2,8 \cdot 10^{-7} = 85 \text{ m}$$

Ce résultat paraît cohérent.

Q25 D'après l'énoncé le décalage maximal au sol est le produit de la valeur maximale du DOP et du décalage maximal de la distance capteur-satellite.

Sur la figure 8 au lit $\text{DOP}_{\text{Max}} = 1,10$ d'où le décalage max = $1,10 \cdot 85 = 94 \text{ m}$

En utilisant la relation donnée :

Évaluation de type B :

Si la grandeur mesurée y suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$, l'incertitude-type est alors

$$u(y) = \frac{b - a}{2\sqrt{3}}$$

En supposant que le DOP suit une loi de distribution uniforme sur $[0,67 ; 1,10]$, on a :

$$\delta_{\text{Max}} \in [0,67 \cdot 84,9 = 56,9 ; 93,5]$$

$$u(\delta_{\text{Max}}) = (93,5 - 56,9) / 2\sqrt{3} = 11 \text{ m}$$

Soit une erreur relative de positionnement de 12 % quand même...

Q26 Pour un essai, on a deux incertitudes, l'une sur la position de départ et l'autre sur celle d'arrivée, donc $u(L') = \sqrt{2}u(\delta_{\text{max}})$:

On calcule :

$$\frac{u(v)}{v} = \frac{u(L')}{L'} = \frac{11\sqrt{2}}{5000} = 0,31 \%$$

Cette incertitude est négligeable par rapport à celle que nous avons sur une valeur de la vitesse.

II. Du casque goutte d'eau au casque flux d'air :

Q27. L'écoulement est irrotationnel. La vitesse dérive donc d'un potentiel des vitesses. L'écoulement est de plus incompressible, donc :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{v}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\varphi) &= 0 \\ \Leftrightarrow \Delta\varphi &= 0 \end{aligned}$$

Q28.

$$\vec{v}_0 = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x \Leftrightarrow \varphi = v_0x + cte$$

La constante peut être prise nulle.

Les surfaces équipotentiellles sont des plans $x = cte$ et les lignes de courant des droites parallèles à Ox .

Q29. Pour $r \gg a$:

$$\varphi = \gamma r \cos\theta = \gamma x = v_0x \Rightarrow \gamma = v_0$$

Q30. On calcule :

$$\begin{aligned} v_{er} &= \frac{\partial\varphi}{\partial r} = v_0 \cos\theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \\ v_{e\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -v_0 \sin\theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \end{aligned}$$

Q31. On doit avoir $v_{er}(a) = 0$ qui est vérifiée. What else ?

Q32. L'écoulement étant stationnaire, parfait et irrotationnel, l'équation de Navier-Stokes se réduit à :

$$\rho \overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}(P)$$

L'écoulement étant homogène et incompressible, $\rho = cte$, d'où :

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\rho \frac{v^2}{2} + P\right) = \vec{0}$$

On a en déduit bien que :

$$\rho \frac{v^2}{2} + P = cte \text{ dans tout l'écoulement}$$

Q33. Au voisinage de $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ on observe que les lignes de courant sont plus écartées que dans l'écoulement uniforme. On en déduit que dans ces régions $v < v_0$, donc $P > P_0$.

C'est l'inverse dans les régions $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, et $P < P_0$.

Q34. Pour le champ de vitesses proposé, on calcule :

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}})\vec{v} = \vec{0}$$

Le gradient de pression étant supposé nul, la pesanteur négligée et l'écoulement instationnaire, l'équation de Navier-Stokes se réduit à :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \eta \Delta \vec{v}$$

Soit en projection sur Ox' :

$$\frac{\partial v_x'}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_x'}{\partial y'^2}$$

Le coefficient $D = \frac{\eta}{\rho}$ est la viscosité cinématique, analogue au coefficient de diffusion.

Q35. Pour une longueur δ :

$$\tau_{diff} = \frac{\delta^2}{D}; \tau_{conv} = \frac{\delta}{v}$$

On a bien :

$$Re = \frac{\tau_{diff}}{\tau_{conv}} = \frac{\delta v}{D}$$

En régime visqueux, le temps caractéristique de diffusion est faible devant le temps caractéristique de convection : la diffusion domine.

Q36. On a :

$$\frac{\delta^2}{D} \cong \frac{L}{v_x'} \\ \Leftrightarrow \delta^2 \cong \frac{L^2}{\frac{Lv_x'}{D}} = \frac{L^2}{Re}$$

Q37. On avait calculé à la Q1 : $Re = 4.10^5$ et $L = 0,5$ m, on en déduit :

$$Re \cong 0,8 \text{ mm}$$

Q38. On a bien $\delta \ll L$, l'hypothèse (1) est vérifiée.

L'hypothèse (2) résulte de l'incompressibilité :

$$\text{div}(\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial v_x'}{\partial x'} + \frac{\partial v_y'}{\partial y'} = 0$$

En ordre de grandeur littéral :

$$\left| \frac{v_x'}{L} \right| \cong \left| \frac{v_y'}{\delta} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{v_y'}{v_x'} \right| \cong \left| \frac{\delta}{L} \right| \ll 1$$

De même :

$$\left| \frac{\partial v_x'}{\partial x'} \right| \cong \left| \frac{v_x'}{L} \right| \ll \left| \frac{v_x'}{\delta} \right| \cong \left| \frac{\partial v_x'}{\partial y'} \right|$$

Et :

$$\left| \frac{\partial^2 v_x'}{\partial x'^2} \right| \cong \left| \frac{v_x'}{L^2} \right| \ll \left| \frac{v_x'}{\delta^2} \right| \cong \left| \frac{\partial^2 v_x'}{\partial y'^2} \right|$$

Qui traduit l'hypothèse (3).

Q39. L'écoulement dans la couche limite est stationnaire, l'équation de Navier Stokes s'écrit :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \eta \Delta \vec{v} = \vec{0}$$

Soit en projection sur Ox' :

$$\frac{\partial p}{\partial x'} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_x'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v_x'}{\partial y'^2} \right) \cong \eta \frac{\partial^2 v_x'}{\partial y'^2}$$

Cette équation est vérifiée dans la couche limite, pour $y' < \delta(x') \ll L$.

Q40. On observe en A et B que la pente $\frac{\partial v_x'}{\partial y'}$, positive, décroît avec y' et s'annule pour $y' \cong \delta(x')$. On a donc pour ces deux points $\frac{\partial^2 v_x'}{\partial y'^2} < 0$, donc :

$$\text{En A et B : } \frac{\partial p}{\partial x'} < 0$$

Au point C, la pente croît, puis décroît et s'annule. La dérivée seconde est positive, s'annule et devient négative.

En C : $\frac{\partial p}{\partial x'} > 0$ à la paroi, puis s'annule et change de signe

On en déduit que le décollement se produit lorsque :

$$\frac{\partial p}{\partial x'} > 0$$

Q41. On a vu à Q33 que p diminue entre M et N, puis augmente entre N et P. La condition précédente ne peut donc être vérifiée qu'entre N et P.

Erreur d'énoncé : l'épaisseur de quantité de mouvement $\theta(x')$, qui doit être en mètres (cf équation Q44) est mal définie. Il aurait fallu écrire :

$$\Delta P(x') = \rho L_t v_e^2 \theta(x') dt$$

Cette erreur n'a aucune conséquence.

Q42.Par définition de δ^* :

$$D_m = \int_0^{\delta(x')} \rho L_t v dy' = \int_{\delta^*}^{\delta(x')} \rho L_t v_e dy',$$

qui donne le résultat proposé.

Q43.La seconde expression du débit donnée en Q42 permet de calculer :

$$D_m(x') = \rho L_t v_e (\delta(x') - \delta^*(x'))$$

Cette expression suppose que $\delta(x') > \delta^*$, ce qui est vérifié car $v_e > v$.

Q44. Le bilan de masse s'écrit en régime stationnaire :

$$dm_e + dm_{e,sup} = dm_s$$

D'où :

$$\begin{aligned} dm_{e,sup} &= dm_s - dm_e \\ &= \rho L_t v_e (x' + dx') (\delta(x' + dx') - \delta^*(x' + dx')) - \rho L_t v_e (x') (\delta(x') - \delta^*(x')) \\ &= \rho L_t \frac{d}{dx'} [v_e (x') (\delta(x') - \delta^*(x'))] dx' \end{aligned}$$

Le bilan de quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{dP(x' + dx') - [dP_{e,sup} + dP(x')]}{dt} = df_{p,AB} + df_{p,CD} + df_{p,sup} + df$$

Avec :

$$dP_{e,sup} = dm_{e,sup} v_e (x') dt$$

Et :

$$\begin{aligned} df_{p,AB} &= p(x') L_t \delta(x') \\ df_{p,CD} &= -p(x' + dx') L_t \delta(x' + dx') \end{aligned}$$

On obtient bien l'équation proposée.

Q45. En développant le premier membre, l'équation de la Q44 devient :

$$-\rho v_e^2 \frac{d\theta}{dx'} + \rho v_e \frac{dv_e(x')}{dx'} (\delta(x') - \delta^*(x') - 2\theta(x')) = -\tau_w - \delta(x') \frac{dp(x')}{dx'} \quad (1)$$

Le théorème de Bernoulli dans l'écoulement extérieur s'écrit :

$$\begin{aligned} p_e + \frac{1}{2} \rho v_e^2 &= cte \\ \Leftrightarrow \frac{dp_e}{dx'} + \rho v_e \frac{dv_e(x')}{dx'} &= 0 \end{aligned}$$

Le préliminaire de la Q39 précise que :

$$\frac{dp_e}{dx'} = \frac{dp}{dx'}$$

On a donc :

$$\frac{dp}{dx'} = -\rho v_e \frac{dv_e(x')}{dx'}$$

En remplaçant dans l'équation (1), on obtient bien après calcul *l'équation intégrale de Von Karman*.

Remarque : le résultat de la question 39 ne me semble d'aucune utilité.

Q46. Lorsque la couche limite décolle, τ_w s'annule, donc $S(\lambda)$ s'annule. On a donc :

$$\lambda = -0,0820 \text{ et } H(\lambda) = 3,70$$

Supposons $0 \leq x'/L \leq 0,1$. On a alors :

$$\frac{d(v_e/v_0)}{d(x'/L)} = 19 \text{ et } \left(\frac{\theta}{L}\right)^2 \approx \frac{0,0039}{Re}$$

On en déduit :

$$\lambda = 0,039 * 19 \neq -0,0820$$

On a donc nécessairement $0,1 \leq x'/L \leq 1$. On a alors :

$$\frac{d(v_e/v_0)}{d(x'/L)} = -1 \text{ et } \left(\frac{\theta}{L}\right)^2 \approx \frac{0,075}{Re} \left(\frac{49,522}{\left(2 - \frac{x'}{L}\right)^6} - 1 \right)$$

On en déduit :

$$\lambda = -0,075 \left(\frac{49,522}{\left(2 - \frac{x'}{L}\right)^6} - 1 \right) = -0,0820$$

D'où :

$$\frac{x'}{L} \approx 0,30$$

Le décollement se produit donc sur le premier tiers du dos du cycliste.

Remarque : je ne comprends pas bien les signes $\approx$ avec des coefficients à 5 CS.

Q47. On peut penser que le casque recule le point de décollement de la couche limite, ce qui va réduire le sillage. Cependant je ne vois pas dans les équations de Von Karman ce qui permet de justifier cela.

Q48. On suppose que la seule force considérée est la force de trainée, dont la puissance vaut :

$$P = \frac{1}{2} \rho S C_x v^3$$

La puissance fournie en 2016 vaut donc :

$$P_{16} = 192 \text{ W}$$

La puissance pour réaliser son temps de 2017 avec le même S_{cx} serait :

$$P_{16} = 213 \text{ W}$$

Il aurait donc du fournir 21 W, soit **10,8 % de puissance en plus**. Le casque profilé ne lui permettait pas ce gain de puissance d'après le résultat de Q13.