

Difficulté supérieure

DS de Physique 8 janvier 2025 PSI - Lycée du Parc des Loges – Durée 4H

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le sujet comporte trois parties indépendantes.

Partie I. Physique des arbres (durée conseillée 2H)

Dans tout le problème, *exprimer* ou *déterminer* une grandeur signifie en donner une expression littérale. En revanche *calculer* une grandeur signifie en donner une valeur numérique avec au plus deux chiffres significatifs. Les vecteurs sont surmontés d'une flèche (\vec{g}) dans le cas général ou d'un chapeau s'ils sont unitaires ($\|\hat{u}_z\| = 1$).

Dans tout le problème le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\hat{u}_z$ est uniforme et le référentiel terrestre galiléen. Les données numériques utiles ainsi qu'un formulaire sont rassemblés en fin d'énoncé.

I. — Physique du cavitron

En phase liquide, les molécules exercent entre elles des forces attractives (assurant entre autres la cohésion du liquide) qui permettent au liquide de supporter des forces de traction équivalentes à des pressions négatives.

La vie d'un arbre suppose une montée efficace de la sève (assimilée dans toute la suite à de l'eau) sur une hauteur qui peut atteindre quelques dizaines de mètres. Ceci conduit à l'existence de zones de pression négative, où l'état liquide de l'eau est métastable : sous l'effet d'une petite perturbation, des bulles de vapeur d'eau peuvent se former. Ceci se produit significativement lorsqu'un arbre subit un stress hydrique associant une forte évaporation (due à un fort ensoleillement) et une faible ressource en eau (due à des sols desséchés). La circulation de la sève est alors gênée par la formation de bulles de gaz au sein de l'écoulement. Pour tester quantitativement la sensibilité des espèces au stress hydrique, des chercheurs de l'INRA ont mis au point un dispositif appelé CAVITRON.

I.B. — Conductance hydraulique

On envisage un écoulement d'eau, de masse volumique ρ_e et de viscosité dynamique η_e , dans un tuyau cylindrique d'axe (O, \hat{u}_x) horizontal, de longueur $2R$ et de section circulaire de rayon a . Les faces d'entrée et de sortie de ce cylindre sont centrées sur les points $A_1(x = -R)$ et $A_2(x = R)$ de l'axe (O, \hat{u}_x) où l'on impose respectivement des pressions p_1 et p_2 . L'ensemble est représenté sur la figure 2(a). On repère un point M dans l'eau par ses coordonnées cylindriques (r, θ, x) d'axe (O, \hat{u}_x) , avec $-R < x < R$, $0 < r < a$ et $0 < \theta < 2\pi$. Lorsque l'on impose une différence de pression $p_1 - p_2$ positive et constante, un écoulement d'eau incompressible et stationnaire apparaît. Cet écoulement est décrit par un champ des vitesses $\vec{v} = v(r, x)\hat{u}_x$ indépendant de θ et un champ de pression $p(x)$ indépendant de r et θ .

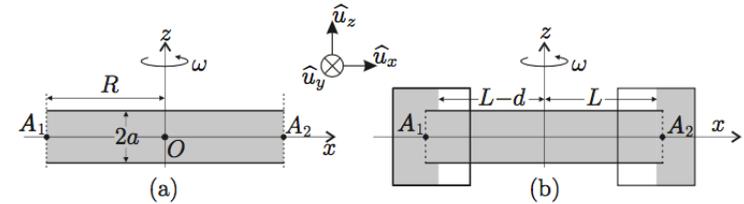


FIGURE 2 – Cylindre horizontal

Dans toute la partie I.B, on considère ce cylindre sans rotation, soit $\omega = 0$.

□ 6 — Montrer que $v(r, x)$ est indépendant de x . On le notera $v(r)$ dans la suite.

On s'intéresse au système fermé (\mathcal{S}_r) constitué du fluide compris à l'instant t dans le cylindre d'axe (O, \hat{u}_x) et de rayon $r < a$, entre les abscisses x et $x + dx$. Le fluide situé au delà de r exerce sur la surface latérale de (\mathcal{S}_r) une force surfacique tangentielle de la forme :

$$\frac{d\vec{F}}{dS} = \epsilon \eta_e \frac{\partial v}{\partial r} \hat{u}_x \text{ où } \eta_e \text{ est la viscosité dynamique de l'eau et } \epsilon = \pm 1.$$

□ 7 — Indiquer, en justifiant qualitativement la réponse, le choix du signe de ϵ correspondant à la situation étudiée. Exprimer la résultante des forces de viscosité sur (\mathcal{S}_r) . Justifier *sans calcul* que la quantité de mouvement du système (\mathcal{S}_r) est indépendante du temps. En déduire la relation :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2\eta_e}{r} \frac{\partial v}{\partial r}$$

Justifier le fait que $\frac{dp}{dx}$ est une constante. En déduire l'expression de $p(x)$ en fonction de p_1 , p_2 , x et R .

On définit la conductance hydraulique $G_H = \frac{D_V}{p_1 - p_2}$ du tuyau, où D_V est le débit volumique.

❑ 8 — Dédire des questions précédentes l'expression de $v(r)$ en fonction de r , η_e , p_1 , p_2 , a et R . Exprimer G_H en fonction de η_e , R et a .

❑ 9 — Exprimer la vitesse moyenne $\bar{v} = \frac{D_V}{\pi a^2}$ en fonction de a , p_1 , p_2 , R et η_e . Vérifier que la force de viscosité subie par la tranche d'eau située à l'instant t dans le tuyau entre les abscisses x et $x + dx$ s'écrit :

$$d\vec{F} = -8\pi\eta_e\bar{v}dx\hat{u}_x \quad (1)$$

❑ 10 — Calculer \bar{v} et le nombre de REYNOLDS Re pour $a = 0,02$ mm (rayon typique des canaux dans lesquels la sève s'écoule), $p_1 - p_2 = 10^5$ Pa et $R = 0,4$ m. Que peut-on en conclure sur la nature de l'écoulement ?

I.C. — Le cavitron

Pour tester les effets du stress hydrique sur la conductance, on coupe une branche d'arbre quasi-rectiligne de longueur $2R$ que l'on met en communication avec deux récipients contenant de l'eau, non représentés sur la figure 2(a), dans des conditions telles que la pression aux extrémités $x = -R$ et $x = +R$ de la branche vaut toujours $p_1 = p(x = -R)$ et $p_2 = p(x = +R)$. On fait maintenant tourner l'ensemble autour de l'axe (O, \hat{u}_z) avec une vitesse angulaire $\omega > 0$ constante et suffisamment élevée pour que la pesanteur soit négligeable dans l'écoulement. On assimile la branche à un unique canal cylindrique d'axe (O, \hat{u}_x) et de rayon a dans lequel s'écoule la sève toujours assimilée à de l'eau.

❑ 11 — On étudie le mouvement de l'eau dans le référentiel (\mathcal{R}_b) solidaire de la branche. Soit une particule de fluide de masse $dm = \rho_e d\tau$, d'abscisse x et de vecteur vitesse $v\hat{u}_x$ dans le référentiel (\mathcal{R}_b) . On admet que la rotation de la branche agit sur le mouvement de cette particule par l'intermédiaire de deux forces volumiques $\vec{f}_{i,1} = \rho_e\omega^2x\hat{u}_x$ et $\vec{f}_{i,2} = -2\rho_e\vec{\omega} \wedge \vec{v}$. Vérifier l'homogénéité de ces formules et représenter ces forces volumiques sur une figure dans deux cas d'abscisses opposées. Citer un exemple de la vie courante dans lequel la force $\vec{f}_{i,1}$ peut être ressentie.

On adopte désormais pour l'écoulement de l'eau dans la branche d'arbre en rotation un modèle semblable à celui introduit à la question 9. On fait l'hypothèse que le champ de pression ne dépend que de x , que l'écoulement est uniforme de vitesse $\bar{v}\hat{u}_x$ et que la paroi exerce sur la tranche de fluide située entre x et $x + dx$ une force de viscosité donnée par la relation (1).

❑ 12 — Montrer que la pression dans le domaine $x > 0$ s'écrit :

$$p(x > 0) = p_2 - \frac{\rho_e\omega^2(R^2 - x^2)}{2} - \frac{8\eta_e\bar{v}(x - R)}{a^2}$$

On montre de manière analogue (travail non demandé) que :

$$p(x < 0) = p_1 - \frac{\rho_e\omega^2(R^2 - x^2)}{2} - \frac{8\eta_e\bar{v}(x + R)}{a^2}$$

❑ 13 — En déduire les expressions de $p(x = 0)$ et \bar{v} en fonction de p_1 , p_2 , ρ_e , η_e , ω et R . Vérifier que la rotation est sans effet sur la conductance hydraulique G_H de la branche.

Pour imposer les pressions p_1 et p_2 , on place aux extrémités de la branche des réservoirs remplis partiellement d'eau avec des quantités légèrement différentes. Ces réservoirs sont solidaires de la branche en rotation à vitesse angulaire ω .

Lorsque l'équilibre est établi, la surface libre de l'eau dans les réservoirs devient verticale du fait des forces d'inertie. La branche, les réservoirs et la présence d'eau indiquée en gris sont représentés sur la figure 2(b).

On crée des ouvertures – non représentées sur la figure 2(b) – dans les réservoirs vers l'atmosphère, de telle sorte que l'air – qui occupe la partie des réservoirs non occupée par l'eau – impose la pression p_0 respectivement en $x_1 = -L + d$ et en $x_2 = L$ avec $L < R$ et $0 < d \ll L$. On mesure alors par une méthode optique le débit volumique en suivant l'évolution de la surface libre de l'eau dans l'un des réservoirs. Cette évolution est suffisamment lente au cours de l'expérience pour que l'on puisse supposer que les pressions p_1 et p_2 sont constantes.

❑ 14 — Exprimer p_1 et p_2 en fonction de ρ_e , p_0 , ω , L , R et d en supposant que l'eau est quasiment en équilibre relatif dans les réservoirs tournants. Vérifier que $p_1 - p_2 = \rho_e\omega^2Ld$ dans l'approximation $d \ll L$.

La figure 3 représente l'allure du graphe de la perte de conductance relative

$$\delta_G = 1 - \frac{G_H(\omega)}{G_H(\omega = 0)}$$

en fonction du paramètre $\Delta p = -\rho_e\omega^2L^2$ mesuré en mégapascals dans un CAVITRON tel que $d = 1$ cm, $L = 0,3$ m pour une branche telle que $R = 0,4$ m.

❑ 15 — Calculer la valeur de ω permettant de faire baisser la conductance de 50 %, valeur choisie comme limite « objective » du stress hydrique par les chercheurs de l'INRA. Calculer la valeur correspondante de la pression $p_1 - p_2$. Proposer une interprétation sommaire de la baisse de conductance hydraulique lorsque des bulles de gaz se forment.

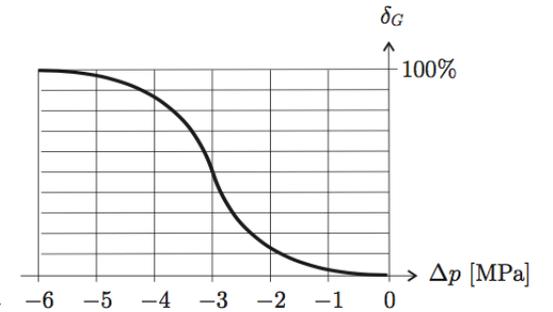


FIGURE 3 – Perte de conductance relative

Données numériques

- intensité de la pesanteur : $g = 1 \times 10^1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- masse volumique de l'eau : $\rho_e = 1 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- pression atmosphérique au niveau du sol : $p_0 = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$
- viscosité dynamique de l'eau : $\eta_e = 1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$
- coefficient de tension superficielle de l'eau : $\gamma_e = 7 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$
- masse volumique de l'air : $\rho_a = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- viscosité dynamique de l'air : $\eta_a = 2 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$

Partie II. Aspects aérodynamiques et automobile

(durée conseillée 1H)

Trois chiffres significatifs pour les applications numériques

Les premiers pionniers de l'aviation (Clément Ader, les frères Wright, Santos-Dumont) ont effectué des essais avec des gros planeurs à la structure légère mais suffisamment robuste pour supporter sans dommage le poids et les vibrations d'un moteur actionnant une hélice.

Quelle que soit sa forme, un avion est toujours constitué par un ensemble d'éléments correspondant à diverses fonctions : on retiendra principalement les ailes destinées à soutenir l'appareil et l'organe de propulsion qui lui donne la vitesse nécessaire à la sustentation et à la translation. La figure 1 représente un schéma élémentaire du profil d'une aile d'avion

Le segment de droite Σ qui joint le bord d'attaque au bord de fuite est appelé corde de profil. L'angle α entre ce segment et la direction que suit l'avion est appelé incidence. L'air immobile attaqué par une aile se déplaçant à la vitesse \vec{V} se sépare en deux parties : l'une longe l'extrados, l'autre l'intrados. Dans le cas d'un mouvement rectiligne et uniforme de l'aile, on peut se placer dans le référentiel de l'aile et considérer que c'est l'air qui se déplace autour de celle-ci.

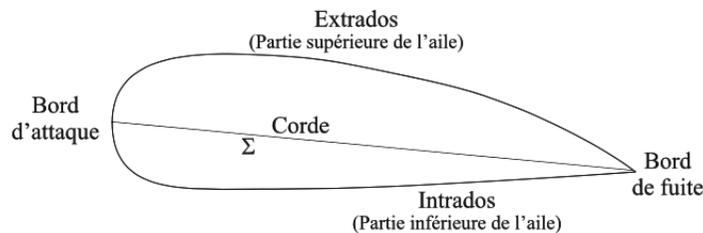


FIG. 1 – Profil d'une aile d'avion

L'étude dynamique d'une aile d'avion montre que celle-ci est soumise à deux forces d'origine aérodynamique :

- la traînée \vec{F}_t , dirigée en sens inverse de la vitesse \vec{V} . En vol sous incidence nulle ($\alpha = 0$), cette force doit être équilibrée par la force de traction de l'hélice ou des réacteurs ;
- la portance \vec{F}_p qui équilibre le poids de l'avion.

L'air sera supposé incompressible.

- 1 — La portance est due au fait que le débit d'air est plus important au voisinage de l'extrados qu'au voisinage de l'intrados. Justifier le fait que cette portance s'oppose à l'effet du poids.

On attend ici un raisonnement qualitatif.

Des expériences effectuées notamment en soufflerie, montrent que les modules respectifs F_t et F_p de la traînée et de la portance peuvent se mettre sous la forme :

$$F_t = C_T(\alpha) \frac{\mu V^2}{2} S \quad \text{et} \quad F_p = C_P(\alpha) \frac{\mu V^2}{2} S$$

La quantité S représente la surface de la projection des ailes sur le plan perpendiculaire à la corde. Les coefficients de traînée $C_T(\alpha)$ et de portance $C_P(\alpha)$ dépendent de l'angle d'incidence et $\mu = 1,20 \text{ kg.m}^{-3}$ représente la masse volumique de l'air.

On considère un avion de masse $m = 1,80 \cdot 10^4 \text{ kg}$, en vol sous incidence nulle la projection de ses ailes représente une surface $S = 50,0 \text{ m}^2$. Le moteur de cet avion développe une puissance $\mathcal{P} = 2,70 \text{ MW}$ qui lui permet de se déplacer avec une vitesse de module $V = 300 \text{ km.h}^{-1}$. Le champ de gravitation terrestre a pour module $g = 9,80 \text{ m.s}^{-2}$ dans toutes les régions considérées.

On réalisera un bilan des forces appliquées à l'avion en déplacement à vitesse constante, pour répondre aux deux questions suivantes.

- 2 — Déterminer l'expression du coefficient de portance en vol sous incidence nulle $C_P(0)$. Calculer sa valeur numérique.

- 3 — Déterminer, toujours en vol sous incidence nulle, l'expression de la traînée F_t due aux ailes sachant que la traînée totale de l'avion est due pour les deux tiers aux ailes. En déduire la valeur numérique du coefficient $C_T(0)$ associé.

On se propose maintenant de calculer les expressions de $C_T(\alpha)$ et $C_P(\alpha)$ dans le cas d'une aile rectangulaire qui se déplace à la vitesse constante $\vec{V} = -V\hat{e}_x$. On travaillera dans le référentiel \mathcal{R} , supposé galiléen, associé au repère $(O, \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$ lié à l'aile et représenté sur la figure 2 ; dans celui-ci l'air semble provenir de l'infini avec la vitesse $\vec{V} = V\hat{e}_x$. La largeur de l'aile est notée ℓ , sa longueur, étendue selon \hat{e}_z est notée L , son épaisseur est supposée négligeable.

On adoptera les hypothèses simplificatrices suivantes :

- le fluide est dévié de manière uniforme sur une hauteur h' . Après la déviation, il présente une vitesse uniforme \vec{V}' parallèle à l'aile ;
- on néglige les frottements, c'est-à-dire que la force de contact exercée par l'aile sur l'air est normale à sa surface ;

- dans les divers bilans, on utilisera le volume de contrôle dont les sections d'entrée S et de sortie S' sont des rectangles de largeur L et de hauteurs respectives h et h' . Ces deux sections sont représentées en trait pointillé sur la figure 2 ;
- on se place en régime stationnaire.

Ce modèle est très simplifié mais il permet de rendre compte des grandeurs étudiées dans ce problème. Les données proposées ne sont cependant pas suffisantes pour utiliser le théorème de Bernoulli.

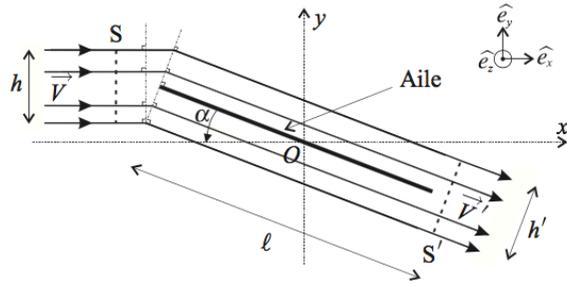


FIG. 2 – Vue de profil de la modélisation de l'écoulement

- ❑ 4 — Déterminer le débit massique D_m de fluide dévié par l'aile. On pourra faire le calcul en entrée de l'aile où le champ des vitesses est connu.
- ❑ 5 — En écrivant la conservation du débit massique entre l'entrée et la sortie de l'aile, exprimer $V' = |\vec{V}'|$ en fonction de V et α .
- ❑ 6 — En effectuant un bilan de quantité de mouvement, calculer la force $\vec{F}_{a/e}$ exercée par l'aile sur l'écoulement.

Et montrer que $\vec{F}_{a/e} = -\mu V^2 S \sin \alpha \vec{n}$ où \vec{n} est le vecteur unitaire normal à l'aile.

- ❑ 7 — On admet que la force $\vec{F}_{e/a}$ exercée par l'écoulement sur l'aile est de la forme

$$\vec{F}_{e/a} = \frac{\mu L \ell V^2}{2} (C_x \hat{e}_x + C_y \hat{e}_y)$$

Déduire de la question 6 les expressions de C_x et C_y en fonction de α et $\lambda = h/\ell$.

- ❑ 8 — On appelle polaire de l'aile la courbe représentant C_y en fonction de C_x . Déterminer une relation entre C_x , C_y et λ . En déduire la représentation de la polaire de cette aile rectangulaire.

Des essais en soufflerie illustrent deux propriétés importantes des ailes en aéronautique :

- pour des angles α petits correspondant à des incidences faibles, le coefficient de portance est une fonction linéaire de α ;
- au dessus d'une certaine incidence critique α_c , la portance est décroissante et provoque un décrochage aérodynamique.

- ❑ 9 — Retrouver ces deux propriétés à partir des expressions de C_x et C_y obtenues à la question 7. On déterminera en particulier la valeur de α_c .

- ❑ 10 — Dans quels domaines d'incidences (proches de α_c ou petites devant α_c) doit-on opérer si l'on veut optimiser la portance tout en réduisant la traînée afin que les ailes ne soient pas soumises à une trop forte résistance de l'air ?

- ❑ 11 — Pour procéder à l'atterrissage l'avion doit perdre de l'altitude. Quels paramètres permettent au pilote de contrôler cette opération ? Justifier votre réponse.

Partie III. Fonctionnement d'une lance à incendie (durée conseillée 1H)

Dans tout le problème, l'eau sera considérée comme un liquide non visqueux, homogène, incompressible, de masse volumique ρ . L'air extérieur assimilé à un gaz parfait de température $T_0 = 288$ K de pression $p_0 = 1013$ hPa et de masse volumique ρ_0 . On prendra pour l'air, une composition molaire de 20 % en O_2 et de 80% en N_2 et $\gamma = C_p/C_v = 1,4$. On rappelle la valeur des masses molaires de l'oxygène $M_O = 16 \times 10^{-3}$ kg.mol⁻¹ et de l'azote $M_N = 14 \times 10^{-3}$ kg.mol⁻¹ ainsi que la valeur de la constante molaire des gaz parfaits $R_{gp} = 8,31$ J.mol⁻¹.K⁻¹. L'accélération de la pesanteur g sera prise égale à $9,81$ m.s⁻².

Les véhicules Dangel (voir figure 1) tout terrain sont un élément important de prévention des incendies. Effectuant des rondes quotidiennes dans les massifs forestiers, ils permettent une vigilance renforcée des lieux sensibles et peuvent opérer très rapidement, mais cependant de façon limitée, sur des départs de feu.

On s'intéresse ici au fonctionnement de la lance à incendie branchée sur la motopompe. La lance a une longueur de 50 m, son diamètre intérieur est $d_1 = 32$ mm et elle se termine par un petit embout conique dont le diamètre intérieur minimal est de $d_2 = 14$ mm. La motopompe délivre une puissance maximale $P_{\max} = 1170$ W.

On se place en régime permanent, le débit volumique de la motopompe est noté D_v et on néglige les pertes de charge.

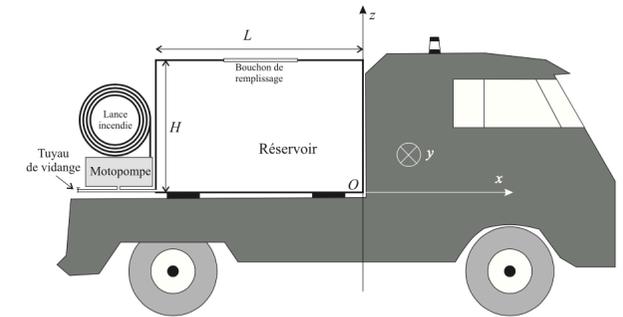


FIG. 1 – Véhicule d'intervention Dangel

- ❑ 12 — À partir d'un bilan d'énergie, montrer que la puissance \mathcal{P} que doit fournir la motopompe s'écrit dans le cas général :

$$\mathcal{P} = \rho D_v \left[\frac{v_s^2 - v_e^2}{2} + g(z_s - z_e) + \frac{P_s - P_e}{\rho} \right]$$

où les grandeurs indicées « s » correspondent aux grandeurs de sortie et celles indicées « e » aux grandeurs d'entrée du système choisi.

- ❑ 13 — L'embout de la lance est maintenu à $Z = 20$ m au-dessus du plateau du véhicule. Dans le réservoir, la hauteur d'eau initiale est située à $h_0 = 65$ cm au-dessus de l'entrée de la motopompe et sera considérée comme constante. Etablir l'expression de la pression P_e en entrée de la motopompe.

En considérant l'écoulement entre l'entrée de la motopompe et la sortie de la lance à l'air libre, exploiter le résultat général de la question 12 pour obtenir une équation du troisième degré pour le débit volumique et la résoudre numériquement pour obtenir le débit maximal possible. En déduire la vitesse maximale v_{\max} de l'eau en sortie de la lance.

- 14 — À partir d'un bilan de quantité de mouvement, déterminer la force \vec{F}_e exercée par l'eau sur l'embout conique de la lance lorsque cette dernière est horizontale. Calculer la valeur numérique du module de cette force pour le débit $D_{v_{\max}}$ obtenu à la question précédente.

Bonus (hors-barème)

On se place dorénavant dans un référentiel $\mathcal{R}' = (O', x', y', z')$ représenté sur la figure 3, supposé galiléen, dans lequel l'extrémité de la lance est inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale et se situe à la cote $z'_0 = 1\text{m}$.

On négligera la résistance de l'air et on fera l'hypothèse que le jet dont on néglige la section reste cohérent dans le plan $O'x'z'$.

- 15 — Déterminer l'équation $z' = z'(x')$ de la trajectoire des particules d'eau. On utilisera les paramètres g , $\tan \alpha$, z'_0 et v_s module de la vitesse initiale de ces particules.

- 16 — Déterminer la portée maximale x'_{\max} de la lance en fonction de v_s , g et z'_0 . Calculer la valeur numérique de x'_{\max} et de l'angle correspondant pour un débit $D_v = 180$ litres par minute.

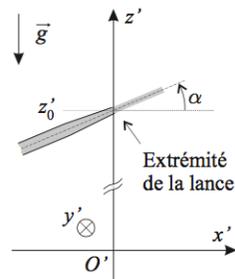


FIG. 3 – Configuration de l'extrémité de la lance.