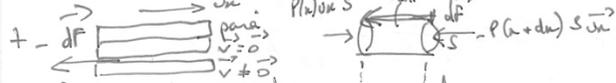


I. B - Conduite hydraulique :

6-  $\vec{v} = v(r, x) \vec{u}_x = v(r, x) \vec{u}_r$

$\text{div } \vec{v} = 0 \rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} = \text{div } \vec{v} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

donc  $v$  indpt de  $x \rightarrow v(r, x) = v(r)$



$\frac{dF}{ds} = +\eta \frac{\partial v}{\partial r} \vec{u}_r$   
 le couche superficielle + pente radiale la couche inférieure  $\rightarrow dF$  selon  $-\vec{u}_r$

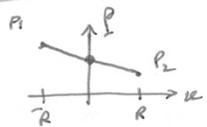
dk de mt indpt de temps car régime stationnaire ( $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$ )  
 et syst. fermé.

$\frac{dp}{dx} = 0 = \Sigma F_{ext}$

$0 = p(x)S - p(x+dx)S + \eta \frac{dv}{dr} S \Delta r \rightarrow$  en proj. sur  $\vec{u}_x$   
 $= -\frac{dp}{dx} dx \pi r^2 + \eta \frac{dv}{dr} \times 2\pi r dx$

$\frac{dp}{dx} = \frac{2\eta}{r} \frac{dv}{dr}$

les variables  $x$  et  $r$  sont indptes  $\rightarrow$  eq d variables séparées  
 mais  $(x)$  et  $(r)$  impose  $\frac{dp}{dx} = \text{cste} = \frac{2\eta}{r} \frac{dv}{dr}$   
 avec cote  $< 0$



$p = \frac{p_2 - p_1}{2R} r + \frac{p_1 + p_2}{2}$

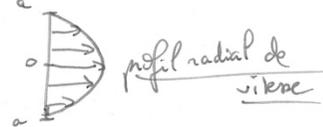
8-  $\frac{p_2 - p_1}{2R} = \frac{2\eta}{r} \frac{dv}{dr} \rightarrow \frac{dv}{dr} = \frac{p_2 - p_1}{4\eta R} r$

$v(r) = \frac{p_2 - p_1}{8\eta \eta R} r^2 + \text{cste}$

Avec par continuité de la vitesse (tangente) sur la paroi (condit d'adhérence)

$v(r=R) = 0 \rightarrow 0 = \frac{p_2 - p_1}{8\eta \eta R} a^2 + \text{cste}$

$\rightarrow v(r) = \frac{p_2 - p_1}{8\eta \eta R} (a^2 - r^2)$



Rq) question 7 : vitesse le long de la conduite et des lignes de courant uniforme car ne dépd pas de  $x$  et constante au cours du temps : mvt rect uniforme  $\rightarrow$  pas de variation de la qte de mvt

$D_v = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^a \frac{p_2 - p_1}{8\eta \eta R} (a^2 - r^2) \times 2\pi r dr$   
 $= \frac{\pi(p_2 - p_1)}{4\eta \eta R} \int_0^a (a^2 - r^2) r dr$   
 $\left[ \frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^a = \frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4} = \frac{a^4}{4}$

$D_v = \frac{p_1 - p_2 \pi a^4}{16 \eta \eta R}$  et  $G_H = \frac{D_v}{p_1 - p_2} = \frac{\pi a^4}{16 \eta \eta R}$

9-  $\bar{v} = \frac{D_v}{\pi a^2} = \frac{p_1 - p_2}{16 \eta \eta R} \frac{a^4}{a^2} = \frac{(p_1 - p_2) a^2}{16 \eta \eta R}$

$dF = \eta \left( \frac{dv}{dr} \right)_{r=a} ds \vec{u}_r = \eta \frac{(p_2 - p_1)}{8\eta \eta R} \times 2a \times \frac{1}{2} a dx \vec{u}_x$

$dF = \frac{\pi}{2R} (p_2 - p_1) a^2 dx \vec{u}_x = -8\pi \eta \bar{v} dx \vec{u}_x$

10-  $\bar{v} = \frac{10^5}{16 \times 10^{-3} \times 4} \times (2 \cdot 10^{-5})^2 = \frac{10^{-4}}{16 \times 10^{-3}} = \frac{10^{-4}}{16} \approx 6 \cdot 10^{-8} \text{ m.s}^{-1}$

$Re = \frac{\rho \bar{v} \times 2a}{\eta} = \frac{10^3 \times 6 \times 10^{-8} \times 2 \times 2 \cdot 10^{-5}}{10^{-3}} = 0,24$

$Re < 2000/3000$  donc écoulement laminaire

I. C - la cavitation :

si profil turbulent le profil de vitesse ne dpd de  $r$   
 par au voisinage immédiat des parois

11-  $\vec{F} = \rho \omega^2 \vec{r}$  pour  $\rightarrow [F] = [\rho \omega^2 r]$

donc  $[\rho \omega^2 r] = \left[ \frac{\rho \omega^2}{v} \right] [r] = \frac{[F]}{v}$

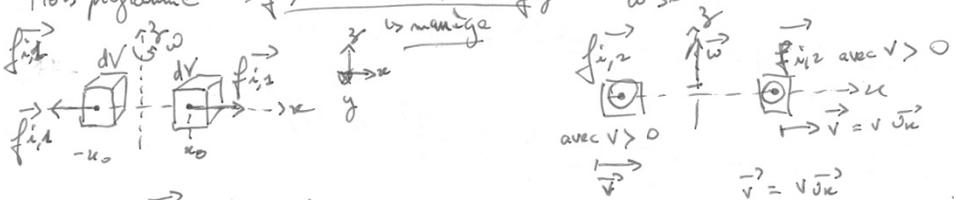
$\hookrightarrow$  dimension d'une force volumique

$[a] = \left[ \frac{dv}{dr} \right] = [\vec{\omega} \wedge \vec{v}]$

donc  $[m a] = [F] = [m \vec{\omega} \wedge \vec{v}]$  et  $[\rho \vec{\omega} \wedge \vec{v}] = \left[ \frac{m \vec{\omega} \wedge \vec{v}}{v} \right] = \frac{[F]}{v}$

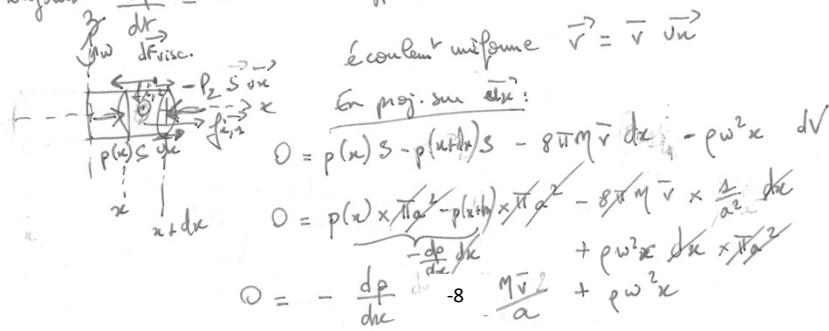
$\hookrightarrow$  dimension d'une force volumique.

"Hors programme" →  $f_{i,2} \rightarrow$  accélération centrifuge



des forces  $f_{i,2}$  sont opposées par  
2 points symétriques et de même

12- Avec toujours  $\frac{dp}{dx} = 0$  comme hypothèse



$$0 = p(x)S - p(x+dx)S - 8\pi M \bar{v} dx - \rho \omega^2 x dx$$

$$0 = p(x) \times \pi a^2 - p(x+dx) \times \pi a^2 - 8\pi M \bar{v} \times \frac{dx}{2} - \rho \omega^2 x dx \times \pi a^2$$

$$0 = - \frac{dp}{dx} dx - 8 \frac{M \bar{v}}{a} + \rho \omega^2 x$$

$$\frac{dp}{dx} = + \rho \omega^2 x - 8 \frac{M \bar{v}}{a}$$

$$\int_x^R \frac{dp}{dx} dx = + \rho \omega^2 \int_x^R x dx - \frac{8M \bar{v}}{a} \int_x^R dx$$

$$\frac{P(R) - P(x>0)}{P_2} = + \frac{\rho \omega^2}{2} (R^2 - x^2) - \frac{8M \bar{v}}{a^2} (R - x)$$

$$P(x>0) = P_2 - \frac{\rho \omega^2}{2} (R^2 - x^2) - \frac{8M \bar{v}}{a^2} (x - R)$$

13. En  $x=0$ , la pression doit être continue donc :

- Rq) question 12 : il existe bien des forces selon  $u_x$
- Force d'inertie de Coriolis  $f_{i,2}$
  - Force de pression exercée par la paroi sur le fluide

$$p(x=0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} p(x>0) = P_2 - \frac{\rho \omega^2}{2} R^2 + \frac{8M \bar{v}}{a^2} R \quad (1)$$

$$p(x=0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} p(x<0) = P_1 - \frac{\rho \omega^2}{2} R^2 - \frac{8M \bar{v}}{a^2} R \quad (2)$$

$$(1)+(2) \rightarrow 2p(x=0) = P_1 + P_2 - \rho \omega^2 R^2$$

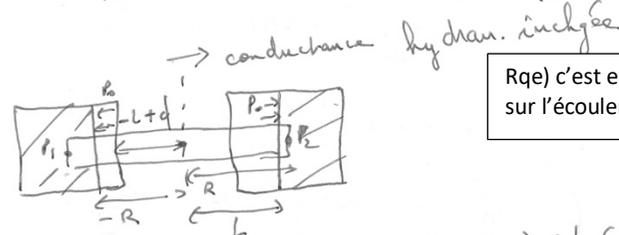
$$p(x=0) = \frac{P_1 + P_2}{2} - \frac{\rho \omega^2 R^2}{2}$$

$$(1)-(2) \rightarrow 0 = (P_2 - P_1) + \frac{16M \bar{v}}{a^2} R$$

$$\bar{v} = \frac{(P_1 - P_2) a^2}{16 M R}$$

$$GH = \frac{Dv}{P_1 - P_2} = \frac{\bar{v} \times \pi a^2}{P_1 - P_2} = \frac{\pi a^4}{16 M R}$$

14.



Rq) c'est en fait le résultat des hyp admises sur l'écoulement

On néglige la pesanteur donc pour le fluide à l'équilibre :

$$\vec{0} = - \text{grad} h dx + \rho \omega^2 x dx \vec{u}_x$$

sur  $\vec{u}_x \rightarrow 0 = - \frac{dp}{dx} + \rho \omega^2 x \rightarrow dp = \rho \omega^2 x dx$

Entre  $x=R$  et  $x=L \rightarrow \int_R^L dp = P(L) - P(R) = P_0 - P_2 = \rho \omega^2 \int_R^L x dx$

$$P_0 - P_2 = \frac{\rho \omega^2}{2} (L^2 - R^2)$$

Entre  $x = -R$  et  $x = -L + d$

$$\int_{-R}^{-L+d} dp = P_0 - P_2 = \frac{\rho v^2}{2} \int_{-R}^{-L+d} x dx = \frac{\rho v^2}{2} \left( -(L+d)^2 - R^2 \right)$$

$$\boxed{P_0 - P_2 = \frac{\rho v^2}{2} (L^2 - R^2)}$$

$$\boxed{P_0 - P_2 = \frac{\rho v^2}{2} ((L-d)^2 - R^2)}$$

$$P_2 - P_1 = \frac{\rho v^2}{2} (L^2 - R^2) - \frac{\rho v^2}{2} ((L-d)^2 - R^2)$$

$$P_2 - P_1 = \frac{\rho v^2}{2} \left( L^2 - \underbrace{(L-d)^2}_{-L^2 + 2Ld - d^2} \right)$$

ordre 2 avec  $d \ll L$

$$\boxed{P_2 - P_1 = \rho v^2 L d}$$

15.  $\delta b = 50\% \rightarrow \Delta p = -3 \cdot 10^5 = -\rho v^2 L^2$   
 $-\Delta p = \rho v^2 L^2 = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

$$P_2 - P_1 = -\Delta p \times \frac{d}{L} = 3 \cdot 10^5 \times \frac{10^{-2}}{3 \times 10^{-1}} = \frac{10^5}{1 \text{ bar}} \times 10^{-1}$$

$$\boxed{P_2 - P_1 = 0,1 \text{ Mpa} = 10^5 \text{ Pa}} \rightarrow \text{on retrouve la perte de charge du I.B.}$$

(1 bar)

lorsque des bulles de gaz se forment, la viscosité effective du fluide augmente

$\rightarrow$  multiplication des interfaces de frottement bulles/liquide

et diffusion multiples des bulles qui s'opposent au mouvement selon  $\vec{v} = \vec{v} \sin$

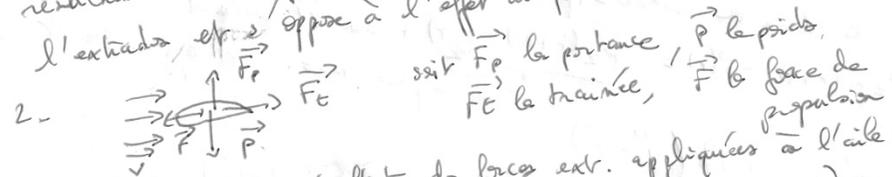
donc baisse de conductance

$\rightarrow$  la surface d'écoulement global diminue

## Partie II - Aspects aérodynamiques et aviation

Mins - Ponts 2011 - PC

1. Pour l'écoulement stationnaire d'un fluide parfait et incompressible autour de l'aile, le théorème de Bernoulli (qui exprime la conservation de l'énergie mécanique) impose la conservation de la quantité  $\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} v^2$ . Ainsi un débit d'air important sur l'extrados impose une pression + faible pour l'extrados que l'intrados. La portance résultant de ce différentiel de  $P$  est donc dirigée de l'intrados vers l'extrados, et s'oppose à l'effet du poids.



A vitesse constante, la résultante des forces ext. appliquées à l'aile est nulle ainsi  $\int C_p(\theta) \rho v^2 S = mg \rightarrow P = F_P$

$$\boxed{C_p(\theta) = \frac{2mg}{\rho v^2 S}}$$

AN:  $C_p(\theta) = 0,95$

3. la puissance motrice compense la puissance dissipative développée par la traînée  $\Rightarrow P = F_D(\text{aile}) v = F_D \times \frac{3}{2} v$

$$\boxed{F_D = \frac{2P}{3v}}$$

AN:  $F_D = 216 \cdot 10^4 \text{ N}$

$$\text{Avec } F_D = \frac{1}{2} C_x(\theta) \rho v^2 S \rightarrow \boxed{C_x(\theta) = \frac{2}{\rho v^2 S} F_D}$$

AN:  $C_x(\theta) = 0,10$

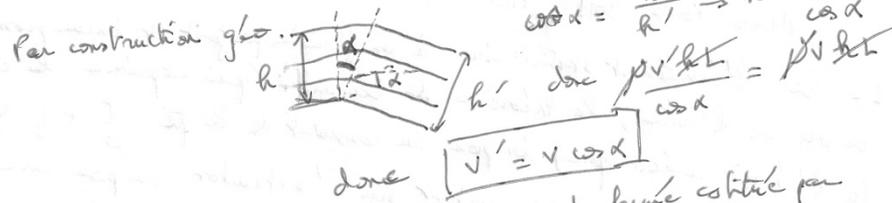
$$\boxed{D_m = \rho v S}$$

$$\boxed{= \rho v h L}$$

avec une vitesse uniforme sur  $S$   
car  $D_m = \int_{\text{aile}} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  avec  $\vec{s} = \rho \vec{v}$   
ou  $D_m = \rho \int dV$

En régime statio.  $D_m$  se conserve!

5. Débit de sortie:  $Dm = \rho v' S' = \rho v' h' l$



donc  $v' = v \cos \alpha$

6. Appliquons un bilan de qté de mat au syst. fermé isolé par  
- le volume de contrôle  $S$  + qté entrante au  $S$  par  $dt \rightarrow$  à  $t$   
- le volume de contrôle  $S'$  + qté sortante au  $S'$  par  $dt \rightarrow$  à  $t+dt$

$d\vec{p} = \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = \underbrace{\vec{p}_2(t+dt) - \vec{p}_1(t)}_{\vec{0}}$  en régime statio. et  $dm = Dm dt$

$\frac{d\vec{p}}{dt} = Dm dt (\vec{v}' - \vec{v})$   
 $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\rho v S}{Dm} (v'(\cos \alpha \vec{u}_x - \sin \alpha \vec{u}_y) - v \vec{u}_x)$

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \rho v S \left( \frac{(\cos \alpha - 1)}{-\sin^2 \alpha} \vec{u}_x - \cos \alpha \sin \alpha \vec{u}_y \right)$

$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\rho v^2 S \sin \alpha (\sin \alpha \vec{u}_x + \cos \alpha \vec{u}_y)$

Par application du PFD à ce syst. fermé  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F}_{ext}$   
avec  $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{a/a} + \vec{F}_{pression}$  ici pression uniforme sur l'air  
 $\vec{0}$   $\hookrightarrow$  résultante nulle

donc  $\vec{F}_{a/c} = -\rho v^2 S \sin \alpha (\sin \alpha \vec{u}_x + \cos \alpha \vec{u}_y)$   
 $\vec{m}$  vect. norm. unitaire à l'aile

$\vec{F}_{a/c} = -\rho v^2 S \sin \alpha \vec{m}$

7. Act réciproques  $\vec{F}_{c/a} = \rho v^2 S \sin \alpha \vec{m}$

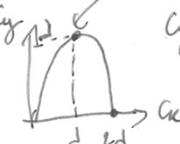
$\vec{F}_{c/a} = \rho v^2 h l \sin \alpha (\sin \alpha \vec{u}_x + \cos \alpha \vec{u}_y)$   
 $\vec{F}_{c/a} = \rho v^2 l L \sin \alpha (\sin \alpha \vec{u}_x + \cos \alpha \vec{u}_y)$  avec  $l = \frac{h}{\ell}$

Par identification  $\rightarrow C_x = 2L \sin^2 \alpha$  et  $C_y = 2L \sin \alpha \cos \alpha$

8.  $C_y = L \sin 2\alpha \rightarrow \frac{C_y}{L} = \sin 2\alpha$   
 $C_x = 2L \sin^2 \alpha = 2L \frac{(1 - \cos 2\alpha)}{2} = L(1 - \cos 2\alpha)$

$\frac{C_x}{L} - 1 = -\cos 2\alpha \rightarrow \cos 2\alpha = 1 - \frac{C_x}{L}$

donc  $\left(\frac{C_x}{L} - 1\right)^2 + \left(\frac{C_y}{L}\right)^2 = 1$  ou  $C_y = \sqrt{L^2 - (C_x - L)^2}$   
en levant au carré  $C_y = \sqrt{-C_x^2 + 2LC_x}$

L'allure de la polaire est donc linéaire!  
un arc de cercle d'ellipse.   $C_{y,max}$  pour  $C_x = L$   
et  $C_{y,max} = L$

9.  $C_p = C_y = 2L \sin \alpha \cos \alpha = L \sin 2\alpha$

aux incidences faibles  $\sin \alpha \sim \alpha$

donc  $C_p(\alpha) \approx 2L\alpha \rightarrow$  comportement linéaire

$\alpha \rightarrow$  à partir de  $2\alpha_c = \pi/2 \rightarrow \alpha_c = \pi/4 \rightarrow$  linéarisation

10.  $\frac{C_p}{C_t}$  doit être optimisé  $\frac{C_p}{C_t} = \frac{C_y}{C_x} = \frac{2L \sin \alpha \cos \alpha}{2L \sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$   
 $= \frac{1}{\tan \alpha}$  optimisé aux faibles  $\alpha$

mais alors la portance est faible!!

Contradict ds la quest la portance est optimisée qd  $\alpha \uparrow$   
s'approchant de  $\alpha_c$  et la traînée  $\uparrow$  aussi qd  $\alpha \uparrow$ !! (jusqu'à  $\pi/4$ )

11. On attend il faut perdre de la portance donc  $\downarrow$  l'angle  $\alpha$   
ce qui est l'un des objectifs de l'ouverture des volets sur les ailes.

Partie III - Fonctionnement d'une lance à incendie

Sting Pontis PC 2010 → Partie 0 guidée!! (voir aussi contrôle 2021!)

12 - Appliquons le théorème de Bernoulli généralisé pour l'écoulement statio. parfait et incompressible entre entrée et sortie :

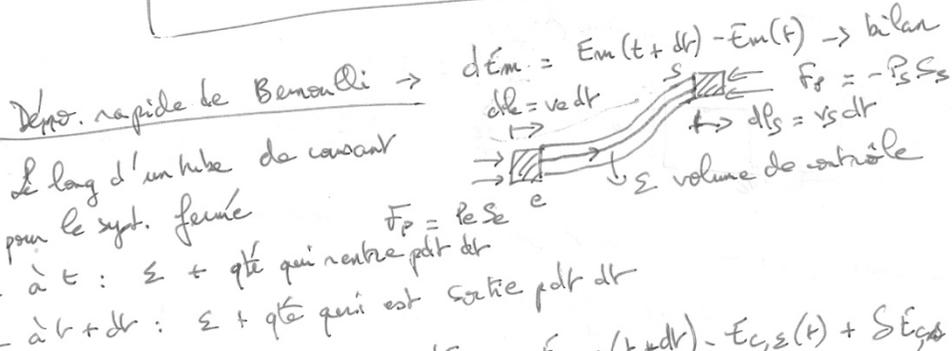
$$\frac{v_s^2 - v_e^2}{2} + g(z_s - z_e) + \frac{p_s - p_e}{\rho} = w$$

$\frac{v_s^2 - v_e^2}{2}$  : travail massique des forces de pression  
 $g(z_s - z_e)$  : travail massique de pesanteur  
 $\frac{p_s - p_e}{\rho}$  : travail massique de la pompe ici

Avec  $dm \cdot w = P dt$  et  $dm = \frac{dm}{dt} = \rho DV \rightarrow dm = \rho DV dt$

$\rho DV dt \cdot w = P dt \rightarrow w = \frac{P}{\rho DV}$

donc  $\rho DV \left[ \frac{v_s^2 - v_e^2}{2} + g(z_s - z_e) + \frac{p_s - p_e}{\rho} \right] = P$



$dE_m = dE_c + dE_p$  avec  $dE_c = E_{c,z}(t+dt) - E_{c,z}(t) + \Sigma E_{gs} - E_{ge}$

$dE_c = dm_s e_{c,s} - dm_e e_{c,e}$

En régime statio →  $dm_s = dm_e = Dm dt$

donc  $dE_c = Dm dt (e_{c,s} - e_{c,e}) = \frac{Dm dt}{\rho} \left( \frac{v_s^2}{2} - \frac{v_e^2}{2} \right)$

de m avec  $e_p = gz \rightarrow dE_p = Dm dt (gz_s - gz_e)$

donc  $\frac{dE_m}{dt} = Dm \left( \frac{v_s^2 - v_e^2}{2} + g(z_s - z_e) \right)$

des variab d'Em résulte uniquement du travail des forces de pression et du travail utile apporté par la pompe ici.

(Travail interne nul → fluide incomp., écoulement parfait - act latérale + à la surface de contrôle et à la vitesse → travail nul)

$$SW_E = -P_s S_s ds + P_e S_e dl$$

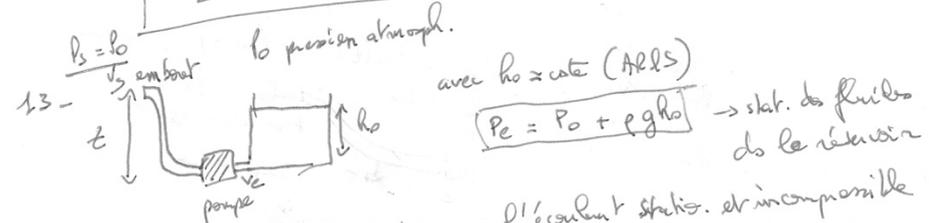
$$= (-P_s S_s v_s + P_e S_e v_e) dt \text{ avec } Dm = \rho v_s S_s = \rho v_e S_e$$

$$SW_P = \left( \frac{P_s - P_e}{\rho} \right) Dm dt \text{ et } SW_0 = w_0 Dm dt$$

donc  $\frac{dE_m}{dt} = \left[ \frac{v_s^2 - v_e^2}{2} + g(z_s - z_e) \right] Dm = \frac{dSW_P}{dt} + \frac{dSW_0}{dt}$

$$= -\frac{P_s + P_e}{\rho} Dm + w_0 Dm$$

donc  $\frac{v_s^2 - v_e^2}{2} + g(z_s - z_e) + \frac{P_s - P_e}{\rho} = w_0$



de débit volumique est constant pour l'écoulement statio. et incompressible

$$Dv = v_s S_s = v_s \frac{\pi d_s^2}{4} = v_e \frac{\pi d_e^2}{4}$$

$$v_s = \frac{4 Dv}{\pi d_s^2} \text{ et } v_e = \frac{4 Dv}{\pi d_e^2}$$

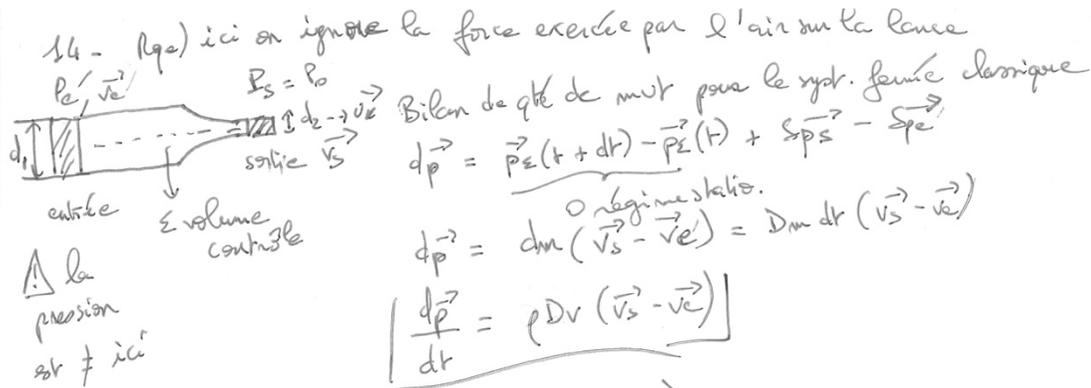
$$P = \rho DV \left[ \rho DV^2 \times \frac{8}{\pi^2} \left( \frac{1}{d_s^2} - \frac{1}{d_e^2} \right) + g z + g h_0 \right]$$

$$P = \frac{8 \rho}{\pi^2} \left( \frac{1}{d_s^2} - \frac{1}{d_e^2} \right) DV^3 + \rho g (z + h_0) DV$$

↳ résolvat numérique de l'éq. du 3ème degré

$DV_{max} = 3,02 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$  de vitesse max. en sortie

$$V_{max} = \frac{4 DV_{max}}{\pi d^2} = 19,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$



Applicat du RFD

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{pression}} + \vec{F}_{\text{eau}} \rightarrow \text{eau}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{pression}} - \vec{F}_e = \rho Dv (\vec{v}_s - \vec{v}_e)$$

avec  $\vec{F}_{\text{pression}} = p_e' \frac{\pi d_1^2}{4} - p_0 \frac{\pi d_2^2}{4}$

et par applicat du ths. de Bernoulli le long d'une ligne de courant  $\rightarrow \frac{p_e'}{\rho} + \frac{v_e^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_s^2}{2}$

$$p_e' = p_0 + \frac{\rho}{2} (v_s^2 - v_e^2)$$

$$\vec{F}_{\text{pression}} = \left[ p_0 \left( \frac{\pi d_1^2}{4} - \frac{\pi d_2^2}{4} \right) + \frac{\rho}{2} (v_s^2 - v_e^2) \frac{\pi d_1^2}{4} \right] \vec{v}_e$$

$$\vec{F}_e = \left[ p_0 \left( \frac{\pi d_1^2}{4} - \frac{\pi d_2^2}{4} \right) + \frac{\rho}{2} (v_s^2 - v_e^2) \frac{\pi d_1^2}{4} + \rho Dv (v_e - v_s) \right] \vec{v}_e$$

(1pt) si l'on calcule la force exercée par l'air et l'eau, la lame on  $p_0$  disparaît.

avec  $v_e = v_s \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^2 = 19,6 \times \left( \frac{14}{32} \right)^2 = 3,75 \text{ m.s}^{-1} \rightarrow \boxed{F_e = 167 \text{ N}}$

force dirigée vers l'avant ( $+\vec{v}_e$ )

(force exercée par l'eau et l'air 107N)