

DS de Physique 8 janvier 2025

PSI - Lycée du Parc des Loges

Durée 4H – DS difficulté supérieure – calculatrices autorisées

Ce DS comporte deux problèmes totalement indépendants. Le barème tiendra compte de la longueur du deuxième problème.

→ II.B du problème 2 hors barème = bonus

Rendre avec copie : le **diagramme de Moody**, présenté en fin d'énoncé, si question traitée

Problème 1 – Impact d'un bolide avec la Terre

L'objet est ici d'étudier l'effet de l'atmosphère terrestre lors de l'entrée d'un bolide (astéroïde ou comète) dans cette zone.

II Traversée de l'atmosphère par le bolide – Cratère d'impact

Dans cette partie, on s'intéresse à la traversée de l'atmosphère terrestre par le bolide précédent (sphère pleine de rayon $r_b = 80$ m et de masse volumique $\rho_b = 2,5 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$). La courbure locale de la Terre est négligée et on confond sa surface, dans la région de l'impact, avec son plan tangent. On utilise une base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et un point de l'espace est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) . On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. Le champ de pesanteur, dirigé suivant la verticale descendante est supposé uniforme : $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ avec $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

II.A – Atmosphère isotherme

L'atmosphère terrestre est supposée être à l'équilibre isotherme de température uniforme T_0 . L'air est assimilé à un mélange de gaz parfaits. $\rho(z)$ et $P(z)$ représentent respectivement la masse volumique et la pression de l'air à l'altitude z . Ces grandeurs sont notées ρ_0 et P_0 au niveau du sol ($z = 0$).

II.A.1) Exprimer $P(z)$ en fonction de $\rho(z)$, T_0 , de la constante des gaz parfaits R et de la masse molaire de l'air M_{air} .

II.A.2) Montrer, en utilisant l'équilibre hydrostatique, que la masse volumique $\rho(z)$ vérifie la loi

$$\rho(z) = \rho_0 \exp\left(-\frac{z}{H_a}\right)$$

où l'on exprimera la hauteur caractéristique H_a en fonction de M_{air} , T_0 , R et g .

II.A.3) Applications numériques. Calculer la masse volumique de l'air ρ_0 au niveau du sol et la hauteur H_a . Données : $P_0 = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa}$ et $T_0 = 290 \text{ K}$.

II.B – Freinage atmosphérique

Le bolide entre dans l'atmosphère avec une vitesse $v_i = 20 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Durant la traversée de l'atmosphère, il est soumis à son poids et à la force de traînée de norme $F_t = \frac{1}{2}C\rho\pi r_b^2 v^2$ où $C = 2$ est le coefficient de traînée, ρ la masse volumique de l'air et v la vitesse instantanée du bolide. On suppose que le bolide conserve sa masse au cours de sa chute.

II.B.1) Pour les calculs d'ordre de grandeur de cette question, on utilisera ρ_0 comme valeur caractéristique de la masse volumique de l'air.

a) Justifier, en calculant le nombre de Reynolds associé à l'écoulement de l'air autour du bolide, le choix d'une loi quadratique en vitesse pour l'expression de la force de traînée. Donnée : viscosité dynamique de l'air $\eta_a = 1,8 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

b) Montrer qu'en terme d'ordres de grandeur, le poids du bolide est négligeable devant la force de traînée.

II.B.2) Dans ces conditions, il est possible de modéliser la trajectoire du bolide dans l'atmosphère par une droite inclinée d'un angle θ par rapport à la verticale \vec{e}_z . On choisit les axes du repère de telle manière que la trajectoire se situe dans le plan $y = 0$ (figure 2) :

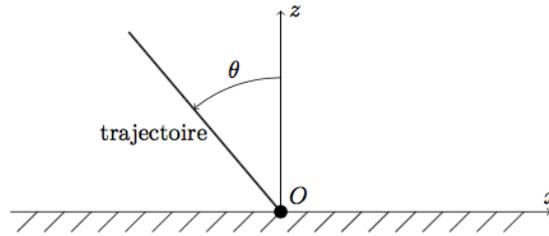


Figure 2 Trajectoire du bolide dans l'atmosphère terrestre

a) Exprimer l'accélération du bolide, $a = dv/dt$, en fonction de C , ρ_b , r_b , $\rho(z)$ (masse volumique de l'air à l'altitude z) et $v(t)$ (vitesse instantanée du bolide).

b) Exprimer dv/dz en fonction de l'accélération $a = dv/dt$ et de la composante verticale de la vitesse du bolide $v_z = dz/dt$. En remarquant que $v_z = -v \cos \theta$, exprimer dv/dz en fonction de C , ρ_b , r_b , $\rho(z)$, v et θ .

c) En utilisant la condition $\lim_{z \rightarrow +\infty} v(z) = v_i$ (vitesse d'entrée dans l'atmosphère), déterminer la loi de variation de la vitesse du bolide en fonction de l'altitude z : $v = f(z)$.

II.B.3) Applications numériques

On pose $\theta = 45^\circ$.

a) Calculer la vitesse du bolide lorsqu'il atteint le sol ($z = 0$). L'atmosphère freine-t-elle efficacement ce bolide ?

b) Calculer l'énergie dissipée par le bolide dans l'atmosphère. La comparer avec l'énergie cinétique du bolide à l'entrée de l'atmosphère.

II.C – Cratère d'impact transitoire

Entre le moment où le bolide touche le sol et celui où il est stoppé, il ne s'écoule que quelques fractions de seconde pendant lesquelles son énergie cinétique est convertie en énergie interne. Cette énergie interne vaporise le bolide et des matériaux de la croûte terrestre, amenant l'ensemble à une température de l'ordre de 10×10^4 K sous une pression de plusieurs mégabars. Cette pression est très supérieure à ce que peuvent supporter les matériaux de la croûte terrestre. Puisque rien ne peut contenir la vapeur produite, il se produit une énorme explosion. Cette explosion provoque une intense onde de choc qui se propage à partir de la zone d'impact en pulvérisant les strates rocheuses et en éjectant les matériaux en partie sous la forme d'un magma ultra-chaud. L'intensité de l'onde de choc s'atténuant au cours de sa propagation, elle finit par se transformer en une « simple onde sismique ». La phase d'excavation s'achève par la formation d'un cratère transitoire qui évolue par la suite vers le cratère définitif. L'objectif de cette partie est d'estimer le diamètre D du cratère provisoire modélisé par une hémisphère (demi-sphère de la figure 3(b)). Pour cela, on considère que l'énergie cinétique du bolide sert, en première approximation, à fracturer les matériaux et à les éjecter en dehors du cratère.

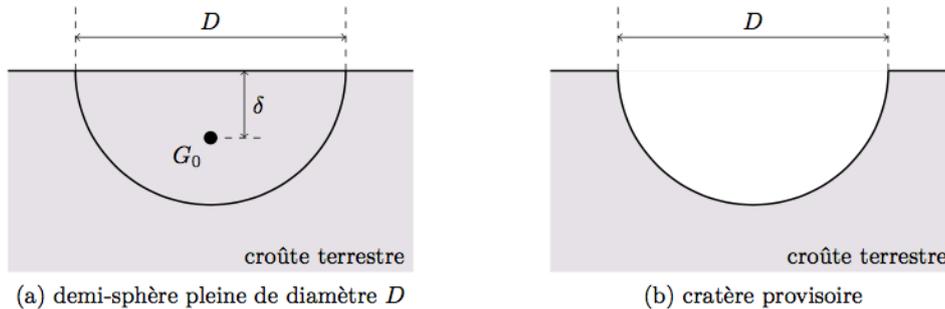


Figure 3

II.C.1) Calculer numériquement l'énergie cinétique massique du bolide. La comparer avec l'enthalpie massique de vaporisation des matériaux rocheux $h_v \simeq 8 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

II.C.2) a) L'énergie servant à fracturer les matériaux de la croûte, notée E_{coh} (énergie de cohésion), peut être estimée en multipliant le volume de la demi-sphère pleine de diamètre D de la figure 3(a) par une grandeur Y caractéristique de la résistance des matériaux constitutifs. Quelle est l'unité de Y ?

b) Le barycentre G_0 de la demi-sphère pleine (**figure 3(a)**) se trouve à la profondeur $\delta = \frac{3D}{16}$. On estime que l'énergie E_g nécessaire pour éjecter les matériaux est égale au travail du poids pour amener ce barycentre au niveau du sol. Exprimer E_g en fonction de la masse volumique de la croûte terrestre ρ_c , du diamètre D et du champ de pesanteur g .

c) Établir l'équation permettant de déterminer le diamètre D .

d) Données pour la croûte terrestre : $Y = 3,0 \times 10^7$ SI et $\rho_c = 2,7 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Résoudre de manière numérique ou graphique l'équation précédente. On pourra limiter la recherche de D à l'intervalle [2 km, 8 km]. Comparer le diamètre du cratère provisoire avec celui du bolide.

Données

Constante des gaz parfaits	$R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse molaire moyenne de l'air	$M_{\text{air}} = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Problème 2 – Etude d'une pompe centrifuge

Fin 2012, une société gérant la production et la distribution d'eau de l'agglomération du Grand Angoulême (110 000 habitants sur 16 communes) a décidé de substituer les deux moteurs asynchrones entraînant la pompe alimentant le château d'eau de Ruelle sur Touvre par un seul moteur synchrone à aimants permanents de puissance 350 W à 1500 tr·min⁻¹ commandé par un variateur spécifique. Même s'il s'agit le plus souvent de régime continu, ce dernier participe à réduire la facture énergétique lors de variations de débit imposées. Les pertes rotoriques d'un moteur asynchrone (liées à la différence de vitesse entre le rotor et le champ statorique tournant (glissement)) représentent près du tiers des pertes totales. Les pertes dans un rotor à aimants permanents sont négligeables en comparaison et le variateur n'augmente la consommation énergétique que de 3%. La consommation énergétique de l'installation est réduite de 10% par mètre cube transféré et l'installation peut assurer un débit de 115% de son régime nominal pendant les 8 h de tarif de nuit de consommation électrique. Une étude a montré que le surcoût lié à la vitesse variable serait amorti en 14 mois.

Dans ce sujet, nous nous intéresserons à une autre installation de même type. Après avoir évalué les pertes de charge dans les 8400 m de conduit reliant la pompe au château d'eau, nous proposerons une pompe centrifuge au point de fonctionnement convenable compte tenu du débit et de la hauteur manométrique totale.

L'objet est ici d'étudier le fonctionnement de la pompe centrifuge, les moteurs asynchrones ne sont pas étudiés.

I Pertes de charge dans les conduites

Hormis la question I.B.3 sur les pertes singulières, nous considérerons dans toute cette partie des conduites rectilignes à section circulaire constante.

I.A – *Fluide en écoulement homogène incompressible laminaire*

I.A.1) Que devient la relation de Bernoulli d'un fluide visqueux en régime laminaire stationnaire ?

a) Rappeler les définitions d'un écoulement parfait de fluide, d'un écoulement homogène incompressible, d'un écoulement stationnaire.

b) Dans le cas d'un *fluide parfait* en écoulement homogène incompressible stationnaire, retrouver la relation de Bernoulli à partir du premier principe de la thermodynamique exprimé relativement à un système ouvert en régime permanent. Préciser alors la grandeur volumique énergétique e_T uniforme sur une ligne de courant.

On lui associera une hauteur H appelée hauteur manométrique ou charge totale :

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}$$

où z est l'altitude, p la pression et v la vitesse du fluide au point considéré, ρ sa masse volumique et g l'accélération de la pesanteur ($g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$). Préciser la relation entre e_T et H .

c) Dans quelles zones de l'écoulement laminaire d'un fluide réel, l'hypothèse d'un écoulement parfait est-elle inenvisageable ?

d) Si on tient compte de la viscosité du fluide incompressible et en postulant toujours un régime stationnaire, la grandeur volumique énergétique e_T définie précédemment diminue de A à B le long d'une ligne de courant. Relier cette variation d'énergie volumique à une intégrale de circulation de A à B de la densité volumique de force de viscosité \vec{f}_{visc} .

e) Dans un fluide incompressible visqueux, la densité volumique de force de viscosité s'écrit $\vec{f}_{\text{visc}} = \eta \Delta \vec{v}$, où η est la viscosité dynamique du fluide et $\Delta \vec{v}$ le laplacien vectoriel de la vitesse locale.

En déduire, sous forme intégrale, la variation $H(B) - H(A)$ de hauteur manométrique d'un point A à un point B le long d'une ligne de courant allant de A à B . La quantité $\Delta H = H(A) - H(B)$ (positive ou nulle) s'appelle la perte de charge.

I.A.2) Écoulement de Poiseuille

On étudie le cas particulier de l'écoulement laminaire d'un fluide visqueux incompressible dans une conduite rectiligne, de direction \vec{e}_x horizontale, de section circulaire S constante (de rayon r_0). Compte tenu des symétries du problème, le champ des vitesses s'exprime sous la forme $\vec{v}(M) = v(r, x)\vec{e}_x$ où $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ est la distance du point M à l'axe de révolution de la conduite.

a) Montrer que la vitesse $v(r, x)$ ne peut dépendre de x .

b) En supposant la perte de charge linéique uniforme tout au long de la conduite et en notant $\frac{\partial H}{\partial x} = -a$ (avec $a > 0$), montrer que

$$v(r) = v_{\max} \left(1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right) \quad \text{avec} \quad v_{\max} = \frac{\rho g a}{4\eta} r_0^2$$

Dans la symétrie du problème, on a

$$\Delta \vec{v} = \Delta v_x \vec{e}_x = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \vec{e}_x$$

c) La vitesse débitante U sur une section droite est la vitesse qui, uniforme sur la section S , correspond au même débit volumique Q .

Exprimer cette vitesse en fonction de v_{\max} et en déduire $v(r)$ en fonction du débit volumique Q de fluide dans la conduite.

d) On souhaite un débit d'environ $30 \text{ L}\cdot\text{s}^{-1}$ dans une conduite de diamètre $D = 20 \text{ cm}$. Dans une conduite cylindrique, la transition laminaire turbulente se situe aux alentours de nombres de Reynolds de 2300 (dans l'expression du nombre de Reynolds, on choisira respectivement U et D comme ordres de grandeur de la vitesse du fluide et de la dimension transversale de l'écoulement).

- Cas d'une huile (SAE-90) pour laquelle $\eta = 0,17 \text{ Pa}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\rho = 880 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
 - Calculer la perte de charge linéique et donc la surpression nécessaire pour le transport de cette huile sur un tronçon de 50 m.
 - Calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement. Conclure.
- Cas de l'eau : $\eta = 1,0 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\rho = 1,0 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.
 - Calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement. Conclure.

I.B – Fluide visqueux homogène incompressible en régime turbulent

I.B.1) Charge moyenne dans une section à symétrie de révolution

La charge H , exprimée en un point M de l'écoulement, apparait comme une fonction $H(x, r)$ de x et de r . On définit une charge moyenne $\bar{H}(x)$ moyennée sur une section de conduite par

$$\bar{H}(x) = \iint_{\text{section}} H(x, r) \frac{dQ}{Q}$$

où dQ est le débit volumique traversant un élément de surface dS de la section de la conduite et Q le débit volumique total de la conduite.

Pour exprimer le terme cinétique de la charge en fonction de la vitesse débitante U , on introduit le coefficient de Coriolis : $\alpha = \frac{P_{c \text{ réelle}}}{P_{c \text{ uniforme}}}$, où $P_{c \text{ réelle}}$ est la puissance cinétique traversant la section S de conduite et $P_{c \text{ uniforme}}$ la puissance cinétique qui traverserait cette section pour une vitesse uniforme U (chaque particule de fluide traverse la section S à la vitesse $v(r)$, emportant avec elle son énergie cinétique volumique locale $\frac{1}{2}\rho v^2(r)$).

a) Montrer que $\alpha = \frac{1}{U^3 S} \iint_{\text{section}} v^3(r) dS$.

b) En déduire que la charge moyenne sur une section de l'écoulement (laminaire ou turbulent) s'écrit

$$\bar{H} = z + \frac{p}{\rho g} + \alpha \frac{U^2}{2g}$$

c) Calculer numériquement le coefficient de Coriolis pour l'écoulement uniforme et pour l'écoulement laminaire de Poiseuille.

d) Dans le cas de régimes turbulents courants, les valeurs du coefficient oscillent entre 1,05 et 1,20. Commenter.

I.B.2) Rugosité, diagramme de Moody

La perte de charge régulière moyenne, pour un écoulement incompressible dans une conduite circulaire rectiligne de longueur L et de diamètre D , est donnée par

$$\Delta \bar{H}_l = f \left(R_e, \frac{\varepsilon}{D} \right) \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g}$$

définissant ainsi le coefficient de perte de charge $f(R_e, \varepsilon/D)$ qui dépend du nombre de Reynolds R_e , et par conséquent du régime d'écoulement, et de la rugosité relative ε/D de la conduite. La valeur numérique de ce coefficient est donnée par le diagramme de Moody (figure 7), en fonction du nombre de Reynolds, pour différentes valeurs de la rugosité relative ε/D (lue à droite du graphe).

La rugosité absolue ε a la dimension d'une hauteur sans toutefois représenter une hauteur moyenne des aspérités de la surface intérieure de la conduite : par exemple, pour des conduites métalliques rivetées, le revêtement a peu d'importance devant le nombre et l'écartement des files longitudinales et transversales de rivets.

a) Montrer que l'écoulement de Poiseuille conduit à $f \left(R_e, \frac{\varepsilon}{D} \right) = \frac{64}{R_e}$.

Interpréter le fait que le coefficient de perte de charge ainsi obtenu ne dépend pas de la rugosité.

b) Pour relier la station de pompage au château d'eau, on installe une conduite en fonte de diamètre $D = 20$ cm, de longueur $L = 8,345$ km. Dans les conditions nominales de fonctionnement, cette conduite débite $Q = 30 \text{ L}\cdot\text{s}^{-1}$ d'eau. La rugosité de la conduite en fonte dépend de son état de surface, selon qu'elle est neuve ou plus ou moins corrodée. On distingue trois cas

- F1 « fonte neuve » : $\varepsilon_1 = 0,4$ mm ;
- F2 « fonte corrodée » : $\varepsilon_2 = 1,2$ mm ;

En utilisant l'abaque de Moody, évaluer dans chacun de ces cas la perte de charge moyenne $\Delta \bar{H}_l$ de cette conduite dans ses conditions nominales d'utilisation ($Q = 30 \text{ L}\cdot\text{s}^{-1}$).

II Point de fonctionnement hydraulique d'une installation

II.A – Caractéristiques hydrauliques d'une pompe centrifuge

Une pompe centrifuge est caractérisée à minima par trois paramètres : son débit volumique nominal Q_p , sa hauteur manométrique totale nominale H_{mt} qui est la variation de hauteur manométrique engendrée par la pompe (usuellement exprimée en mètre de colonne d'eau : mCE) et son rendement hydraulique nominal $R = P_h/P_m$ où P_h est la puissance hydraulique fournie par la pompe et P_m la puissance mécanique fournie à la pompe. Le constructeur fournit les courbes $H_{mt}(Q_p)$ et $R(Q_p)$. On dispose (figure 2) de la caractéristique hydraulique du type de pompe retenue (WDE 32). Il s'agit d'une pompe centrifuge multi-étages dont le fonctionnement ne sera pas étudié ici.

Cette pompe étant fabriquée aux USA, la documentation fournie par le constructeur utilise des unités anglo-saxonnes : on notera que, dans la figure 2, la hauteur manométrique totale H_{mt} (« head ») est exprimée en pieds (ft) (à gauche de la figure) et le débit volumique Q_p (« capacity ») en gallons US par minute (USgpm). Pour convertir ces unités anglo-saxonnes, on utilisera les facteurs de conversion indiqués en bas à droite de la figure 2.

II.A.1) La puissance hydraulique d'une pompe s'écrit $P_h = \rho g H_{mt} Q_p$. Justifier cette expression.

II.A.2) Calculer la puissance mécanique P_m à fournir sur l'axe de la pompe pour le point de fonctionnement $H_{mt}(Q_p)$ envisagé, repéré par le point F sur la figure 2, en utilisant le rendement hydraulique en ce point.

(figures 1 et 2 en page suivante)

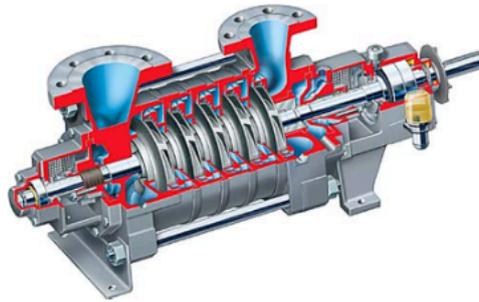
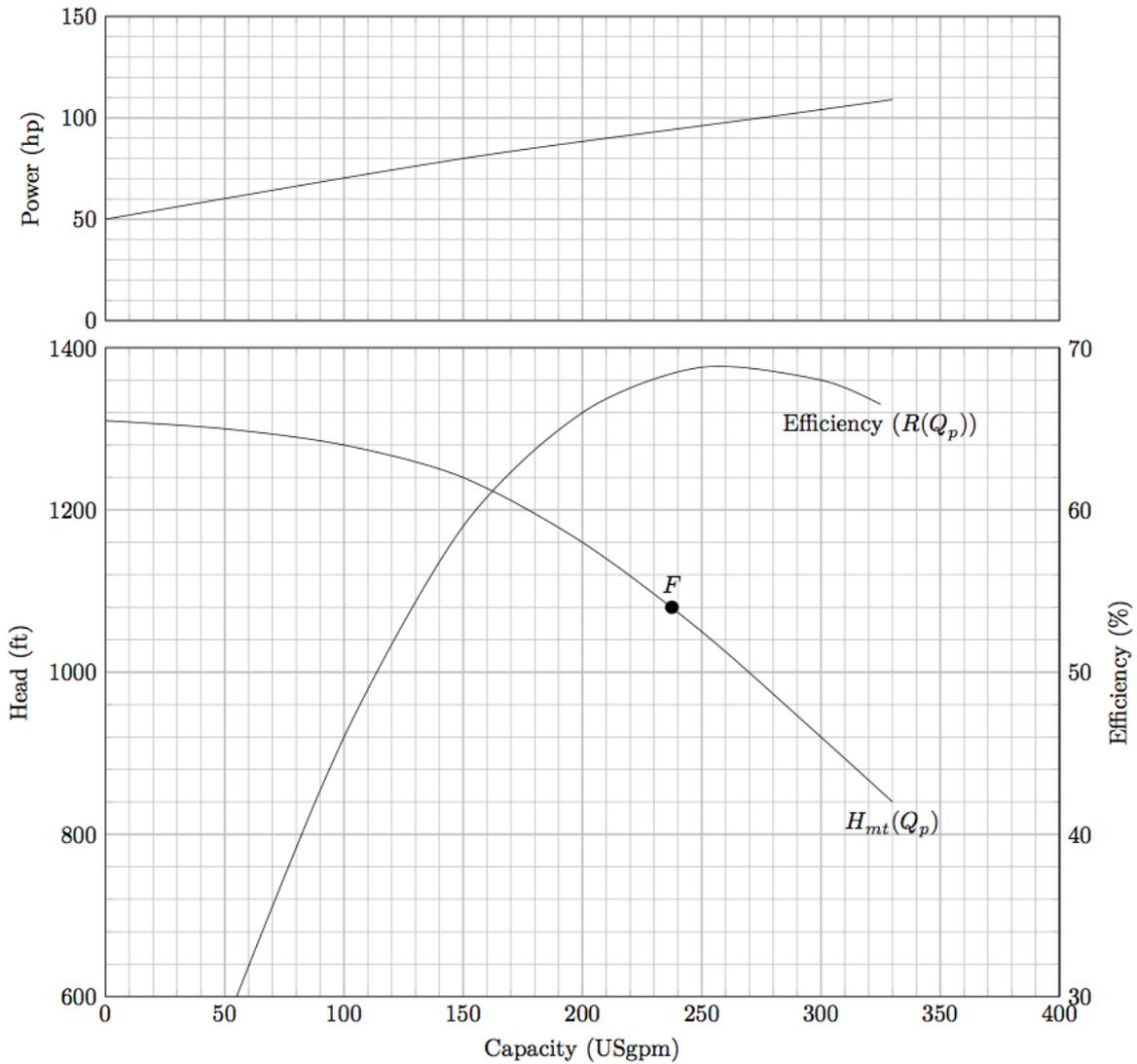


Figure 1 Schéma d'une pompe centrifuge



Point de fonctionnement envisagé

Hydraulic power	63.7 hp
Pump speed	3200 rpm
Efficiency (CE=1.00)	68.3%
Rated power	93.3 hp
Maximum power	108 hp
Driver power	125 hp / 93.2 kW

Conversion des unités (à 3 chiffres significatifs)

100 USgpm (gallon per minute)	= 6,31 L·s ⁻¹
1 rpm	= 1 tr·min ⁻¹
100 ft	= 30,5 m

Figure 2 Caractéristiques de la pompe WDE 32

Hors barème

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Elles sont très significativement valorisées dans le barème. Même si elles n'ont pas abouti, les pistes de recherche doivent être consignées par le candidat et seront valorisées si elles sont pertinentes. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement.

Dans la question **II.B.2** ne traiter qu'un seul type de fonte au choix :
neuve ou corrodée

II.B – Point de fonctionnement hydraulique et consommation électrique

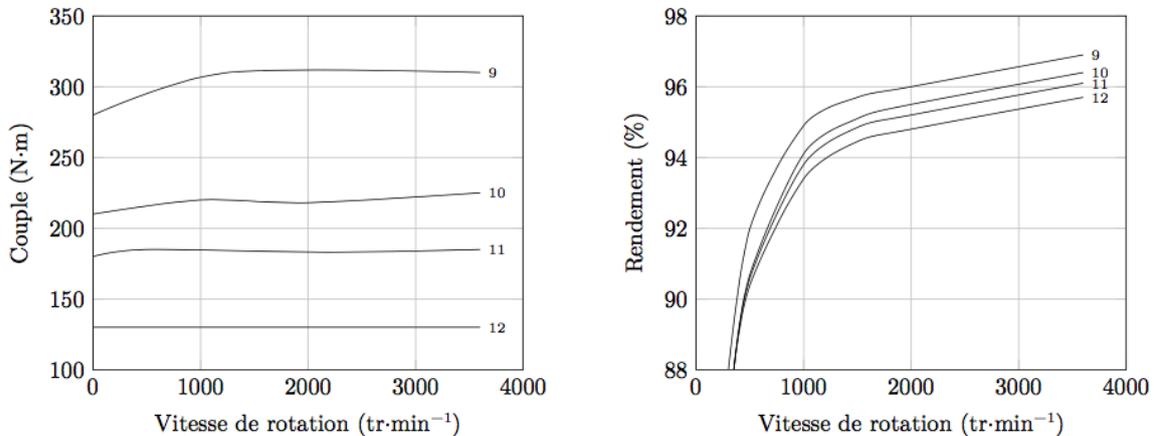
L'alimentation en eau potable d'un village nécessite un volume d'eau de 2600 m³ par jour. On décide de faire le traitement de l'eau directement à côté de la prise d'aspiration (altitude 502 m) et de transporter l'eau potable au château d'eau du village (altitude 767 m) par une conduite de refoulement en fonte de diamètre nominal 200 mm et de longueur 8,345 km. On négligera les pertes singulières devant les pertes linéaires ainsi que les pertes à l'aspiration devant les pertes au refoulement.

II.B.1) Montrer que deux exemplaires de la pompe WDE 32 doivent nécessairement être montés en parallèle.

II.B.2) En utilisant les valeurs des pertes régulières $\Delta\bar{H}_l$, calculées à la question I.B.2, ainsi que les figures 2 et 7, déterminer le point de fonctionnement (Q et H_{mt}) suivant l'état de rugosité de la fonte (neuve, corrodée ou déposée).

II.B.3) Dans un premier temps, les pompes sont entraînées par des moteurs asynchrones dont le rendement électromagnétique est de 80%. Calculer, dans les trois situations précédentes, la puissance électrique consommée. Commenter l'effet du « vieillissement » de la surface intérieure de la canalisation sur la puissance électrique demandée et sur le rendement énergétique global.

II.B.4) Compte tenu de la vitesse de rotation des pompes, estimer le couple moteur mécanique de chaque moteur entraînant la pompe. Choisir le moteur synchrone à aimants permanents le plus approprié parmi les quatre décrits en figure 3 et utiliser son rendement à la vitesse de rotation de la pompe pour déterminer la puissance électrique consommée. Comparer à la puissance électrique consommée par un moteur asynchrone.



9 LSRPM 200 LU2 : 3600 tr.min⁻¹ / 115 kW / 213 A
10 LSRPM 200 L1 : 3600 tr.min⁻¹ / 85 kW / 158 A
11 LSRPM 200 L1 : 3600 tr.min⁻¹ / 70 kW / 130 A
12 LSRPM 200 L1 : 3600 tr.min⁻¹ / 50 kW / 97 A

Figure 3 Caractéristiques de 4 moteurs

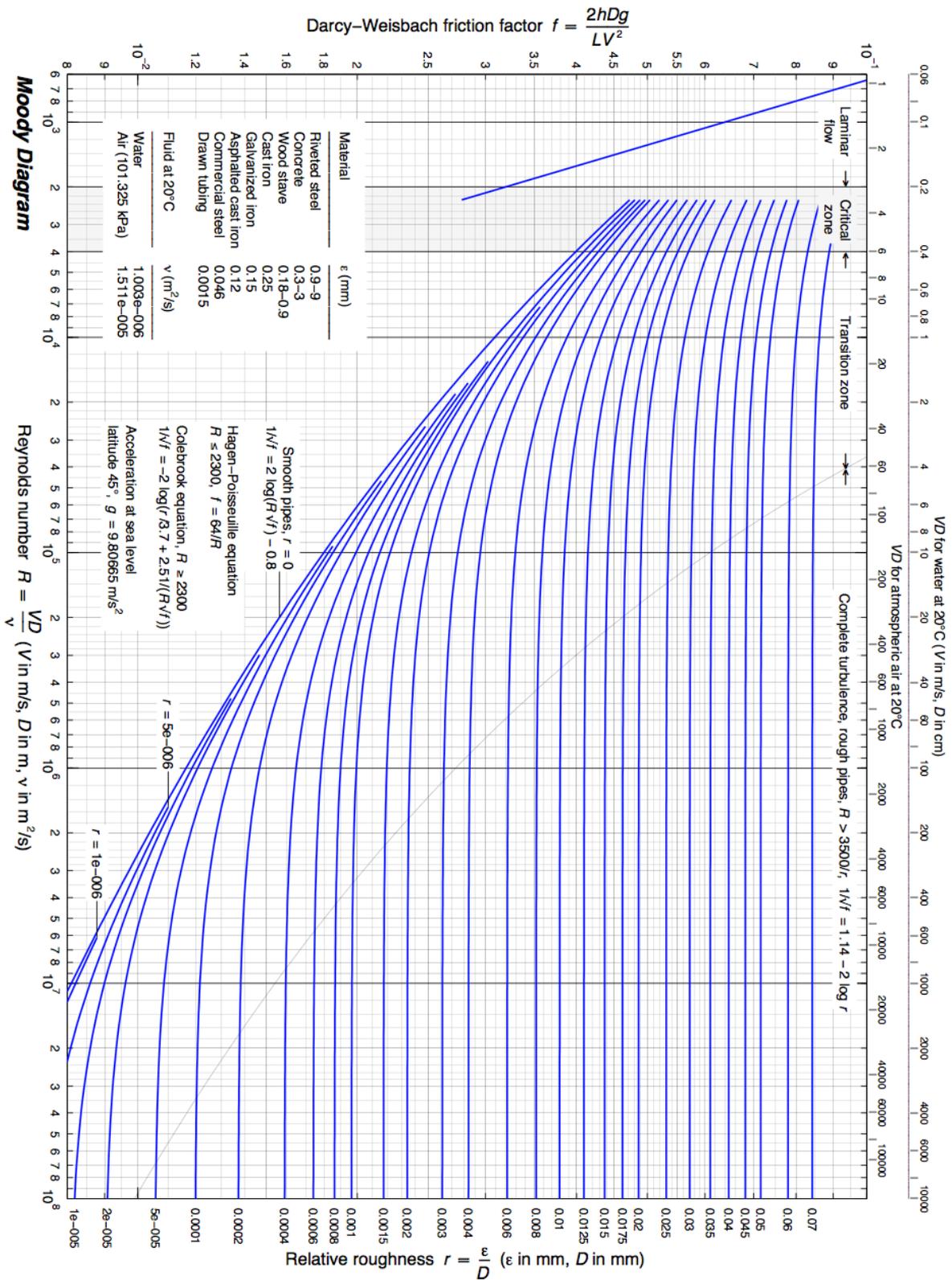


Figure 7 Diagramme de Moody