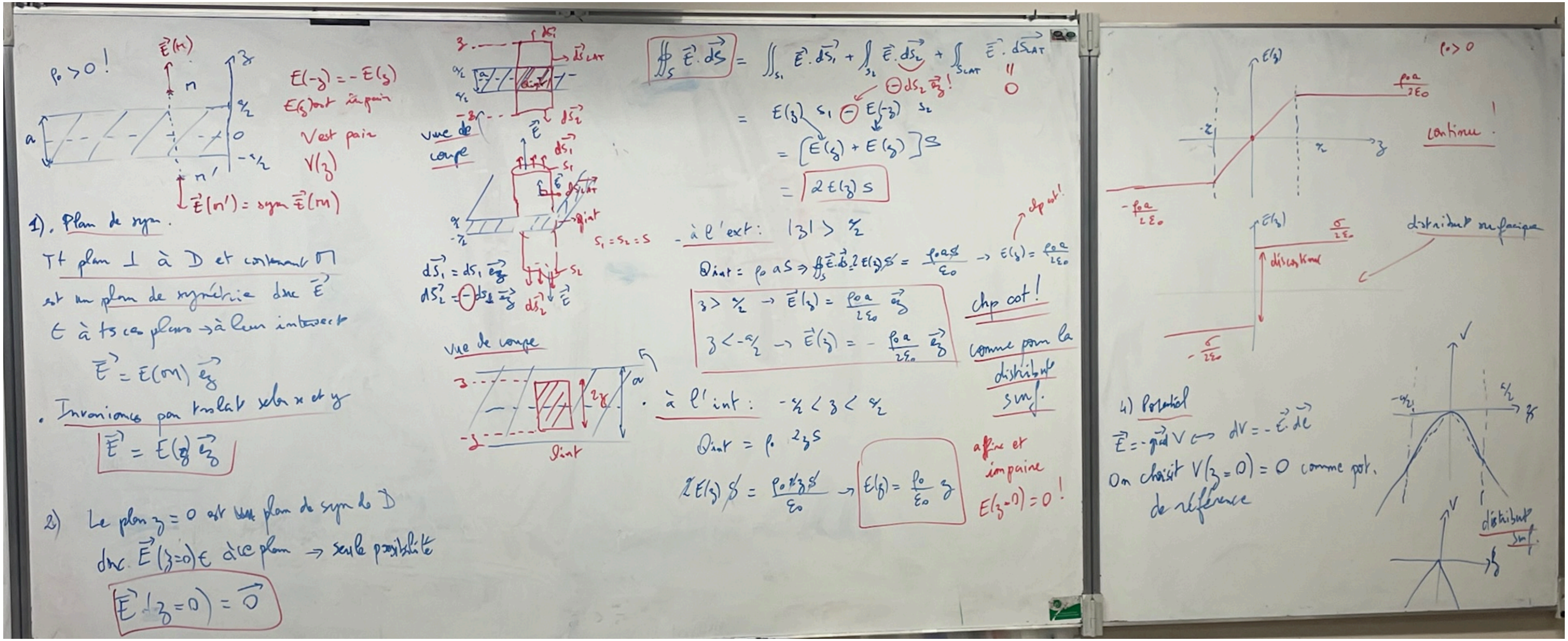
Exercice 1


ρ0 > 0 !
E(-z) = -E(z)
E(z) est impair
V est pair
V(z)
E(M') = sym E(M)
1). Plan de sym.
Tt plan ⊥ à D et contenant M
est un plan de symétrie donc E
∈ à ts ces plans → à leur intersect
E = E(M) ez
. Invariance par translat selon x et y
E = E(z) ez
2) Le plan z = 0 est un plan de sym de D
donc E(z=0) ∈ à ce plan → seule possibilité
E(z=0) = 0
vue de coupe
dS1 = dS1 ez
dS2 = (-) dS2 ez
S1 = S2 = S
Qint
∯S E.dS = ∬S1 E.dS1 + ∬S2 E.dS2 + ∬SLAT E.dSLAT
= E(z) S1 (-) E(-z) S2
= [E(z) + E(z)] S
= 2 E(z) S
- à l'ext : |z| > a/2
Qint = ρ0 a S ⇒ ∯S E.dS = 2 E(z) S = ρ0 a S / ε0 → E(z) = ρ0 a / 2ε0
chp cst!
z > a/2 → E(z) = ρ0 a / 2ε0 ez
z < -a/2 → E(z) = - ρ0 a / 2ε0 ez
chp cst !
comme pour la distribut surf.
. à l'int : -a/2 < z < a/2
Qint = ρ0 2z S
2 E(z) S = ρ0 2z S / ε0 → E(z) = ρ0/ε0 z
affine et impaire
E(z=0) = 0 !
(ρ0 > 0)
E(z)
ρ0 a / 2ε0
- ρ0 a / 2ε0
continue !
E(z)
σ / 2ε0
- σ / 2ε0
discontinue
distribut surfacique
4) Potentiel
E = - grad V ⟺ dV = - E. dl
On choisit V(z = 0) = 0 comme pot. de référence
distribut surf.

4 - Potentiel électrique

. Pour $-\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2}$: $dV = -\vec{E}.\vec{dl} = -E\,dz = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} z\,dz$

$V(z) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} z^2 + K$ avec choix d'un potentiel $V(z=0) = 0$ $\Rightarrow K = 0$

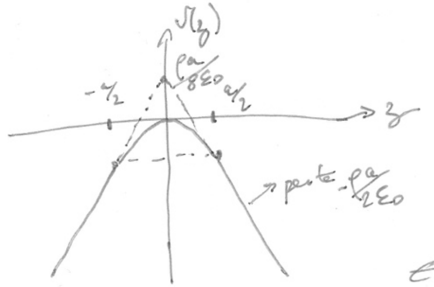
$\boxed{V(z) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} z^2}$ → parabolique

. Pour $z > \frac{a}{2}$: $dV = -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0} dz \rightarrow V(z) = -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0} z + C$

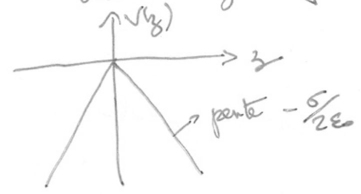
$V(z = a/2) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\frac{a^2}{4} = -\frac{\rho a^2}{4\varepsilon_0} + C \rightarrow C = \frac{\rho a^2}{8\varepsilon_0}$

$\boxed{V(z) = -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0} z + \frac{\rho a^2}{8\varepsilon_0}}$ → affine

. Pour $z < a/2$ → f° paire → $\boxed{V(z) = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0} z + \frac{\rho a^2}{8\varepsilon_0}}$



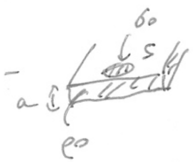
Potentiel ds le cas de la distrib de chges surf.



⟵⟶ m̂ comportement à l'ext. de la distribut

5 -

a)



$q = \sigma S$
$= \rho_0 S a$ → $\boxed{\sigma_0 = \rho_0 a}$

b) On retrouve les m̂ expressions avec $\sigma_0 = \rho_0 a$!

c) $\sigma_0 = \rho_0 a$ $a \rightarrow 0$ et $\rho \rightarrow +\infty$ la pente devient ∞

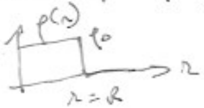
Ex 4) Modèle de l'orbitale atomique

a) La charge globale du nuage électrique est de $-e$ car l'atome d'H est constitué d'un seul proton (neutralité de l'édifice atomique)

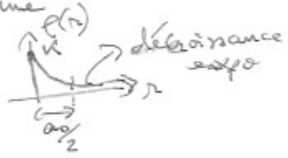
q_{tot} (nuage) $= -e = \iiint_V dq$ avec $dq = \rho_e dV$

$\boxed{-e = \iiint_V \rho_e\, dV}$ avec $\rho_e(r)$ qui dpd de r seulement
$dV = 4\pi r^2 dr$ (on intègre sur des calottes sphériques)

⚠ aux bornes d'intégrat pour une distribut "classique" de charges / uniforme



Ici distribut de charges / on doit intégrer de $r = 0$ à $+\infty$



$-e = 4\pi K \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2r}{a_0}} r^2 dr$

Primitive de $u^2 e^{-u} \rightarrow -(u^2 + 2u + 2)e^{-u}$
chgt de variable $\frac{2r}{a_0} = u$

$-e = \frac{\pi K a_0^3}{2}\left[-(u^2+2u+2)e^{-u}\right]_0^{+\infty}$

$-e = \pi K a_0^3 \rightarrow \boxed{K = -\frac{e}{\pi a_0^3}}$

b) . Tt plan passant par M et le centre de l'atome sont
c) ds plans de sym (distrib f pts sym. M et M' → $r(M') = r(M)$)
$\vec{E} = E(r)\vec{e_r}$

. Invariance par rotat selon φ et θ → $\vec{E} = E(r)\vec{e_r}$

$\oiint_S \vec{E}.\vec{dS} = E \times 4\pi r^2 = Q_{int}$

Attent ⚠ contrairement au cas classique la charge intérieure ne sera nulle "catégoriquement" que pour $r \to +\infty$ où au moins $Q \simeq 0$ pour $r \gg a_0$. On ne peut plus distinguer avec la frontière $r = R$ l'int. et l'ext. de la distribut! de charges

$$Q_{int} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{proton}}}{+e} + 4\pi K \iiint_{V_{int}} e^{-2r/a_0} r^2 dr$$

$$Q_{int} = e + \frac{\pi K a_0^3}{2}\left[-(u^2+2u+2)e^{-u}\right]_0^r$$

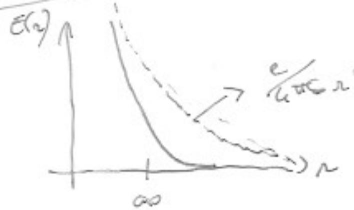
$$= e + \underbrace{\pi K a_0^3}_{-e} - \frac{\pi K a_0^3}{2}\left[\frac{4r^2}{a_0^2}+\frac{4r}{a_0}+2\right]e^{-2r/a_0}$$

valeur pour 0 !

$$Q_{int} = +\frac{e}{2}\left[\frac{4r^2}{a_0^2}+\frac{4r}{a_0}+2\right]e^{-2r/a_0}$$

$$E \times 4\pi r^2 = \frac{e}{2\varepsilon_0}\left[\frac{4r^2}{a_0^2}+\frac{4r}{a_0}+2\right]e^{-2r/a_0}$$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\frac{2r^2}{a_0^2}+\frac{2r}{a_0}+1\right]e^{-2r/a_0}\,\vec{e_r}}$$

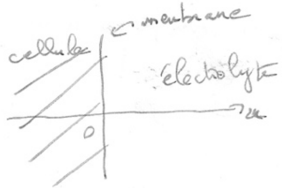


terme en e^{-2r/a_0} → décroissance bien + rapide en présence du nuage électronique (décrit par l'orbitale atomique)

Sans le nuage $E = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

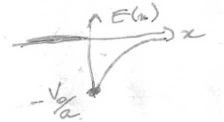
Il y a donc un phénomène d'écrantage de la charge +e du noyau par le nuage électronique.

Ex3 _ Étude d'une membrane cellulaire



$$\begin{cases} V(x) = -V_0 & \text{pour } x \leq 0 \\ V(x) = -V_0\, e^{-x/a} & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

avec $V_0 > 0$

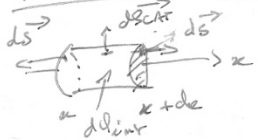


a) Pour $x \leq 0$: $V(x) = -V_0 \to \vec{E} = \vec{0}$

Pour $x > 0$: $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V = -\frac{V_0}{a} e^{-x/a}\,\vec{e_x}$

discontinuité de $\vec{E}$ sur la membrane selon cette modélisation

b)



Th. de Gauss

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{dQ_{int}}{\varepsilon_0}$$ → charge élémentaire du volume dV

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = -E(x)S + E(x+dx)S + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{surf. latérale}}}{0} \overset{DL}{\simeq} \frac{dE}{dx}\,dx\,S$$

E(x) uniforme

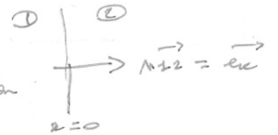
$$dQ_{int} = \rho\, dV = \rho\, S\, dx \to \frac{dE}{dx}\cancel{dx\,S} = \frac{\rho\,\cancel{S\,dx}}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\frac{dE}{dx} = \rho/\varepsilon_0}$$ → en effet on aurait pu exploiter directement $\text{div}\,\vec{E} = \frac{dE}{dx} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$! (MG)

- pour $x \leq 0$ → $\boxed{\rho = 0}$
- pour $x > 0$ → $\boxed{\rho = \frac{\varepsilon_0 V_0}{a^2} e^{-x/a}} > 0$

Ce qui signifie qu'il y a au total un excès de cations par rapport aux anions.

c) $\vec{E_2} - \vec{E_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n_{12}}$ en $x = 0$ et en proj. selon $\vec{e_x}$



$$-\frac{V_0}{a} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Leftarrow$$

$$\boxed{\sigma = -\varepsilon_0 \frac{V_0}{a}}$$ → excès d'anions sur la membrane qui attire un excès de cations local au voisinage de la membrane ds l'électrolyte.

d) Charge totale $Q = \iint_{\text{membrane}} \sigma \, dS + \iiint_{x>0} \rho(x) \, dx \, dS$

$$Q = \sigma S + S \int_{x=0^+}^{x=+\infty} \rho(x) \, dx$$

$$\frac{Q}{S} = \sigma + \int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon_0 V_0}{a^2} e^{-x/a} \, dx$$

$$\frac{Q}{S} = -\varepsilon_0 \frac{V_0}{a} - \left[\frac{\varepsilon_0 V_0}{a} e^{-x/a} \right]_0^{+\infty}$$

$\frac{\varepsilon_0 V_0}{a}$

$\frac{Q}{S} = 0$! le milieu demeure globalement neutre, il y a des répartit° spatiales différentes des charges seulement.