

Exercice 5 : Energie et capacité d'un condensateur sphérique

- 3. a)** Dans ce problème à symétrie sphérique, le champ électrique est radial et ne dépend que de la distance r au centre :

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r.$$

En utilisant le théorème de Gauss pour une sphère de même centre que les conducteurs et de rayon r , on montre que le champ n'est non nul que dans l'espace interconducteurs, où son expression est donnée par la relation :

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

- b)** On reprend le calcul conduit dans le cours pour une boule chargée, en utilisant les éléments de volume $d\tau = 4\pi r^2 dr$ compris entre deux sphères de rayons voisins.

L'énergie totale s'obtient en limitant le domaine d'intégration à l'intervalle $[R_1, R_2]$:

$$U_E = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{Q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^4} 4\pi r^2 dr,$$

c'est-à-dire :

$$U_E = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

- c)** La différence de potentiel entre les conducteurs est :

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

ce qui correspond à une capacité :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}.$$

- d)** Ces relations conduisent au résultat attendu :

$U_E = \frac{Q^2}{2C}$ confirmant que l'énergie emmagasinée dans un condensateur est bien répartie dans tout le domaine de l'espace où règne le champ électrique.

Exercice 6 : Cohésion d'une goutte liquide

4. a) Le champ électrique dans tout l'espace est radial et ne dépend que de la distance au centre O de la sphère par raison de symétrie ; son expression s'obtient par application du théorème de Gauss à une sphère de centre O et rayon r . On doit distinguer les points à l'intérieur de la sphère ($r < R$), où le champ est nul et les points à l'extérieur ($r > R$), où $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ en coordonnées sphériques.

L'intégrale conduisant au calcul de l'énergie électrique totale peut se ramener à une intégrale à une dimension, si l'on considère comme volume élémentaire la portion de l'espace entre deux sphères de même centre O et de rayons voisins : r et $r + dr$. L'élément de volume est alors :

$$d\tau = d\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = 4\pi r^2 dr.$$

En sommant sur le domaine extérieur à la sphère où le champ est non nul, on aboutit à l'expression :

$$U_E = \int_R^{+\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{Q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^4} 4\pi r^2 dr.$$

Cette intégrale indéfinie converge car la fonction de r intégrée décroît à grande distance comme $\frac{1}{r^2}$. Le résultat est bien :

$$U_E = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

b) Lors de la division en deux gouttes identiques, la charge électrique totale est conservée, ainsi que le volume (incompressibilité du liquide). On en déduit que chaque nouvelle goutte porte la charge $Q' = Q/2$ et son rayon est $R' = R/\sqrt[3]{2}$. L'énergie du nouveau système est la somme de l'énergie de chaque demi-goutte, puisqu'elles n'interagissent pas :

$$U_{E'} = 2 \frac{Q'^2}{8\pi\epsilon_0 R'} = 2^{-2/3} U_E.$$

La nouvelle valeur d'énergie est inférieure à la précédente, signe que la transformation peut se faire spontanément avec libération d'énergie. Ce résultat est prévisible car les charges présentes sur la sphère se repoussent, favorisant donc la scission.

c) En réalité, il faut fournir une certaine énergie pour accroître la surface du système. Or si le rayon de chaque goutte est $R' = R/\sqrt[3]{2}$, on en déduit la nouvelle valeur de la surface :

$$S' = 2 \cdot 4\pi R'^2 = 2^{1/3} S.$$

Le travail nécessaire prend la valeur :

$$W = 4\pi R^2 A (2^{1/3} - 1).$$

d) L'égalité de la diminution d'énergie électrostatique et du travail nécessaire à l'accroissement de surface est obtenue lorsque l'identité suivante est satisfaite :

$$\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} (1 - 2^{-2/3}) = 4\pi R^2 A (2^{1/3} - 1).$$

Numériquement, $Q \approx 10^{-11} \text{ C}$.

On en déduit une valeur initiale de densité superficielle de charge $\sigma \approx 8.10^{-5} \text{ C.m}^{-2}$. Le champ électrique qui régnerait au voisinage de cette goutte serait donné par la relation de discontinuité : $\sigma/\epsilon_0 \approx 10^7 \text{ V.m}^{-1}$. Cette valeur est considérable, supérieure au champ électrique provoquant le claquage de l'air : $E_{\text{disruptif}} \approx 3.10^6 \text{ V.m}^{-1}$ (Fig. 29). Ainsi, les forces de tension superficielles du liquide sont suffisantes pour assurer la cohésion des gouttes.

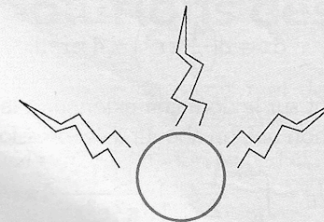


Figure 29

Sujet : Mesures par gravimétrie
CS MP 2018

Partie A - Champ gravitationnel et champ de pesanteur terrestre

1. Entre deux particules ponctuelles, les forces électrostatique et gravitationnelle s'écrivent respectivement :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2} \quad \text{et} \quad \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}.$$

Ainsi, les forces gravitationnelle et électrostatique sont formellement analogues, moyennant l'échange $q \leftrightarrow m$ et $1/4\pi\epsilon_0 \leftrightarrow -\mathcal{G}$. Par conséquent, le théorème de Gauss se transpose immédiatement à la gravitation par les mêmes échanges. Pour toute surface fermée (Σ) ,

$$\oiint_{(\Sigma)} \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi\mathcal{G} M_{\text{int}},$$

où M_{int} désigne la masse intérieure à la surface (Σ) .

2. La distribution de masse est à symétrie sphérique, si bien que ρ ne dépend que de r en coordonnées sphériques. D'après le principe de Curie, il en va de même pour \vec{G}_T .

Soit M un point quelconque de l'espace. Tous les plans passant par C et M sont des plans de symétrie de la distribution de masse, donc \vec{G}_T est porté par leur intersection. Ainsi, \vec{G}_T est dirigé selon \vec{u}_r .

$$\vec{G}_T = G_T(r) \vec{u}_r.$$

Le flux du champ gravitationnel à travers la sphère de rayon r choisie comme surface de Gauss vaut :

$$\oiint_{(\Sigma)} \vec{G}_T \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 G_T(r),$$

et par ailleurs $M_{\text{int}} = M_T$ lorsque $r > R_T$, c'est-à-dire $z > 0$. Finalement, le théorème de Gauss pour la gravitation fournit, en remarquant que localement $\vec{u}_r = \vec{u}_z$ et $r = R_T + z$:

$$\vec{G}_T = -\mathcal{G} \frac{M_T}{(R_T + z)^2} \vec{u}_z.$$

On remarque qu'il s'agit du champ créé par une masse ponctuelle M_T placée en C , conformément au résultat connu à l'extérieur d'une distribution de masse à symétrie sphérique.

3. L'intensité du champ gravitationnel s'écrit, d'après la question A.2,

$$G_T(z) = \mathcal{G} \frac{M_T}{(R_T + z)^2}.$$

Avec $z \ll R_T$, on fait un développement limité d'ordre 1 en z/R_T , ce qui donne :

$$\frac{1}{(R_T + z)^2} = \frac{1}{R_T^2} \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^{-2} \approx \frac{1}{R_T^2} \left(1 - \frac{2z}{R_T}\right).$$

Ainsi, pour des altitudes faibles devant le rayon de la Terre,

$$G_T(z) \approx \frac{\mathcal{G} M_T}{R_T^2} \left(1 - \frac{2z}{R_T}\right).$$

4. On cherche l'altitude z telle que $2z/R_T = 1\%$, d'où $z = 32$ km.

5. Le gradient du champ gravitationnel s'écrit, d'après l'expression approchée de la question A.3 :

$$\overrightarrow{\text{grad}} G_T = -\frac{2\mathcal{G} M_T}{R_T^3} \vec{u}_z.$$

Le gradient vertical est la composante verticale du gradient, dont on peut noter qu'elle est constante aux faibles altitudes :

$$\frac{dG_T}{dz} = -\frac{2\mathcal{G} M_T}{R_T^3}.$$

6. Numériquement, $\frac{dG_T}{dz} = -3.10^{-6} \text{ s}^{-2} = -3 \mu\text{gal.cm}^{-1}$.

7. Le référentiel :

Partie B - Applications de la gravimétrie

1. En adaptant le résultat de la question A.2, il vient :

$$\vec{G}(r) = -\mathcal{G} \frac{4}{3} \pi \frac{R^3}{r^2} (\mu_m + \Delta\mu) \vec{u}_r.$$

2. Par définition, $g_z = \vec{G}(r) \cdot \vec{u}_z$. En lisant $r^2 = h^2 + x^2$ et $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z = -h/r$, on obtient la composante verticale du champ de pesanteur dû à la boule :

$$g_z = \mathcal{G} \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{h}{(h^2 + x^2)^{3/2}} (\mu_m + \Delta\mu).$$

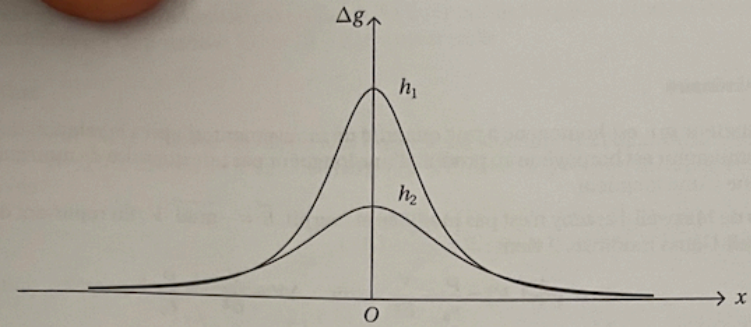
3. La distribution de masse réelle est la somme d'un sol homogène de masse volumique μ_m et d'une boule de masse volumique $\Delta\mu$. D'après le principe de superposition, le champ de pesanteur g_r dû à la distribution réelle est la somme du champ de pesanteur g_m qui serait créé par un sol homogène et de celui g'_z qui serait créé par une boule de masse volumique $\Delta\mu$. Ainsi,

$$g_r = g_m + g'_z \Rightarrow \Delta g = g'_z.$$

4. Avec le résultat de la question précédente, $\Delta g = g'_z$. Puis il suffit de reprendre le résultat de la question B.2 en changeant $\mu_m + \Delta\mu$ en $\Delta\mu$. Il suit :

$$\Delta g = \frac{4\pi \mathcal{G} \Delta\mu R^3 h}{3(x^2 + h^2)^{3/2}}.$$

5. Le tracé de $\Delta g(x)$ est celui d'une fonction paire de valeur maximale $\Delta g_{\max} = \frac{4\pi \mathcal{G} \Delta\mu R^3}{3h^2}$ atteinte en $x = 0$.



6. La largeur à mi-hauteur de la courbe vérifie $\Delta x = 2x_0$ avec $x_0^2 = (2^{2/3} - 1)h^2$ soit :

$$\Delta x = 2\sqrt{2^{2/3} - 1}h \approx 1,5h.$$

D'après la remarque de la question précédente, l'anomalie gravimétrique maximale est atteinte en $x = 0$, c'est-à-dire au plus près de la boule, et vaut :

$$\Delta g_{\max} = \frac{4\pi \mathcal{G} \Delta\mu R^3}{3h^2}.$$

7. Sur la courbe proposée, on lit la largeur à mi-hauteur $\Delta x = 120$ m donc $h = 80$ m et la valeur maximale $\Delta g_{\max} = 2,8 \cdot 10^{-9}$ m.s⁻² permet de déterminer :

$$R = \left(\frac{3h^2 \Delta g_{\max}}{4\pi \mathcal{G} \Delta\mu} \right)^{1/3} = 3,3 \text{ m}.$$

8. Pour que les effets cumulés de l'or et de la grotte s'annulent, il faut d'une part disposer l'or au centre et d'autre part faire en sorte que la masse d'or stockée soit la même que celle manquante dans la grotte.

9. La masse maximale d'or est, d'après la question précédente :

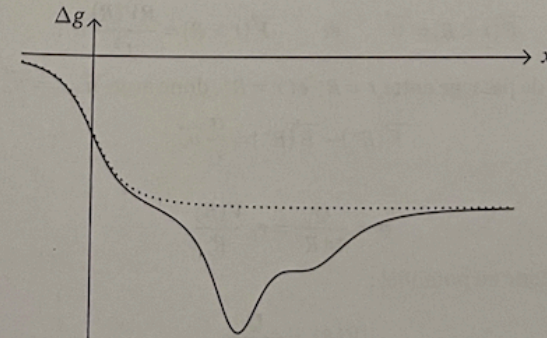
$$m_{\text{or}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \mu_m,$$

avec μ_m la masse volumique moyenne de la Terre, donnée par :

$$\mu_m = \frac{3M_T}{4\pi R_T^3} = 5,5 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}.$$

Ainsi la masse demandée est $m_{\text{or}} = 23$ tonnes.

10. Il faut superposer deux anomalies dues aux grottes à celle (en pointillés) due à la plaque de calcaire ; comme le calcaire est moins dense que le grès et que les grottes sont vides, les anomalies sont toutes deux négatives d'où l'allure de la courbe obtenue :



Exercice : Ecrantage dans un électrolyte

1. Les expressions proposées font intervenir l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p = qV$ d'un ion de charge q dans le potentiel V via un facteur de Boltzmann $\exp(-\mathcal{E}_p/k_B T)$. Ce facteur décrit quantitativement une évidence qualitative : les cations sont repoussés par la charge q positive placée en O alors que les anions sont attirés, ce qui rompt la neutralité locale de l'électrolyte et modifie ainsi le champ électrique créé.

2. La densité volumique de charges vaut :

$$\rho(r) = e n_+(r) + (-e) n_-(r) = n_0 e \exp\left(-\frac{eV(r)}{k_B T}\right) - n_0 e \exp\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right) = -2n_0 e \operatorname{sh}\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right). \quad (E)$$

En éliminant le champ électrique $\vec{E} = -\vec{\operatorname{grad}} V$ dans l'équation $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\epsilon_0$, on obtient l'équation de Poisson dont est solution le potentiel :

$$\operatorname{div}(-\vec{\operatorname{grad}} V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{puis} \quad \Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Soit, compte tenu du fait que le potentiel ne dépend que de r et en éliminant ρ via la relation (E) :

$$\frac{1}{r} \frac{d^2(rV)}{dr^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{2n_0 e}{\epsilon_0} \operatorname{sh}\left(\frac{eV}{k_B T}\right).$$

Avec $e|V| \ll k_B T$ on peut linéariser le sinus-hyperbolique et en multipliant par r , il vient :

$$\frac{d^2(rV)}{dr^2} - \frac{2n_0 e^2(rV)}{\epsilon_0 k_B T} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d^2(rV)}{dr^2} - \frac{rV}{D^2} = 0 \quad \text{avec} \quad D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{2n_0 e^2}}.$$

3. On reconnaît une équation du deuxième ordre linéaire à coefficients constants pour la fonction inconnue $f(r) = rV(r)$ dont la solution générale s'écrit :

$$f(r) = rV(r) = A \exp\left(-\frac{r}{D}\right) + B \exp\left(\frac{r}{D}\right) \quad \text{soit} \quad V(r) = \frac{A}{r} \exp\left(-\frac{r}{D}\right) + \frac{B}{r} \exp\left(\frac{r}{D}\right).$$

La condition aux limites $V(+\infty) = 0$ conduit immédiatement à $B = 0$. Dans la limite $r \rightarrow 0$, la condition fournie par l'énoncé s'écrit alors :

$$\frac{A}{r} \exp\left(-\frac{r}{D}\right) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{soit} \quad A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{puis} \quad V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{D}\right).$$

4. L'électrolyte a pour effet de multiplier le potentiel par $\exp(-r/D)$. Ce facteur est négligeable au-delà d'une distance de l'ordre de quelques D . L'électrolyte a pour effet d'écranter le potentiel créé par l'ion complexe.

En l'absence d'électrolyte, deux ions complexes portant la même charge q se repoussent donc ne peuvent pas s'agréger. En écrantant ces interactions répulsives, un électrolyte favorise l'aggrégation de deux ions complexes. C'est ce qui se produit à l'embouchure des fleuves où l'eau devient salée, ce qui revient à augmenter la concentration en ions c'est-à-dire à augmenter n_0 et donc à diminuer D dans le modèle adopté. Pour interpréter la forte sédimentation à l'embouchure des fleuves, il reste juste à remarquer que celle-ci est d'autant plus facile que la particule qui sédimente est plus grosse puisque le poids croît comme r^3 alors que le module $6\pi\eta r v$ de la traînée de Stokes ne croît que comme r .

Exercice : Problème de Laplace en cylindrique

4. a) Le dispositif est invariant par translation le long de l'axe du cylindre, on en déduit que les grandeurs physiques à déterminer ne dépendent que des coordonnées dans un plan de cote constante. On raisonnera en coordonnées polaires r et θ . D'autre part, tout plan de cote z constante étant plan de symétrie, le champ électrique y est son propre symétrique, donc est contenu dans le plan. Enfin, le plan yOz est un plan d'antisymétrie pour le champ appliqué, tandis que xOz est plan de symétrie pour le problème. Ces propriétés se manifesteront dans la dépendance en θ . $V(r, \theta)$ est nécessairement paire en θ , alors que $V(r, \pi - \theta) = -V(r, \theta)$ (Fig. 29).

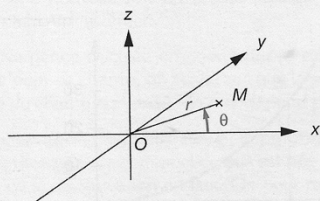


Figure 29

b) L'équation de Laplace peut s'exprimer en coordonnées cylindriques, à l'aide du formulaire. Pour la forme proposée, on aboutit à l'équation suivante, où l'on note f' la dérivée première de la fonction f :

$$f''g + \frac{1}{r}f'g + \frac{1}{r^2}fg'' = 0.$$

Aux points où le potentiel ne s'annule pas, il est possible de séparer les variables :

$\frac{r^2 f'' + r f'}{f}(r) = -\frac{g''}{g}(\theta)$. Or, puisque les variables r et θ varient indépendamment l'une de l'autre, cette égalité ne peut être vraie en tout point que si les deux membres de l'équation sont constants. Notons K la valeur commune.

c) Pour les raisons liées aux propriétés de symétries évoquées ci-dessus, il est naturel de proposer la solution : $g(\theta) = \cos \theta$, qui correspond à la valeur $K = 1$. Dans ce cas, en substituant r^n à $f(r)$ dans l'équation ci-dessus, on aboutit à l'équation suivante en n : $n^2 = 1$. Les deux valeurs correspondantes : $n = \pm 1$ permettent de construire une solution générale qui soit combinaison linéaire de chaque solution prise isolément :

$$V(r, \theta) = \left[Ar + \frac{B}{r} \right] \cos \theta.$$

d) Les conditions aux limites sont de deux natures : sur le cylindre et loin de celui-ci. Dans un premier temps la continuité du potentiel permet d'imposer la relation $V(R, \theta) = 0 \forall \theta$. On en déduit : $B = -AR^2$. Ensuite, loin du cylindre, le champ créé par les charges superficielles s'estompe et on retrouve le champ extérieur appliqué :

$$\vec{E} = E_0 \cdot \vec{u}_x = E_0 \cos \theta \cdot \vec{u}_r - E_0 \sin \theta \cdot \vec{u}_\theta.$$

Or le gradient du potentiel proposé à pour coordonnées polaires : $\frac{\partial V}{\partial r} \cdot \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \cdot \vec{u}_\theta$. On déduit de la limite $r \gg R$ la relation $A = -E_0$. Finalement, le potentiel solution s'écrit :

$$V(r, \theta) = E_0 \left[-r + \frac{R^2}{r} \right] \cos \theta.$$

e) Le champ total se calcule par la relation locale

$\vec{E} = -\text{grad } V$, ce qui donne ici :

$$\vec{E} = E_0 (1 + R^2/r^2) \cos \theta \cdot \vec{u}_r - E_0 (1 - R^2/r^2) \sin \theta \cdot \vec{u}_\theta.$$

Au voisinage extérieur du cylindre, $r \rightarrow R^+$, on peut écrire $\vec{E} \approx E_0 2 \cos \theta \cdot \vec{u}_r$. Le champ électrique est normal au conducteur (Fig. 30).

REMARQUE - Le champ électrique est nul à l'intérieur du conducteur (volume équipotentiel).

La valeur de la discontinuité du champ est liée à celle de la densité surfacique de charge par la relation $\vec{E} \approx \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \vec{u}_r$, on obtient l'expression de cette densité :

$$\sigma = 2\epsilon_0 E_0 \cos \theta.$$

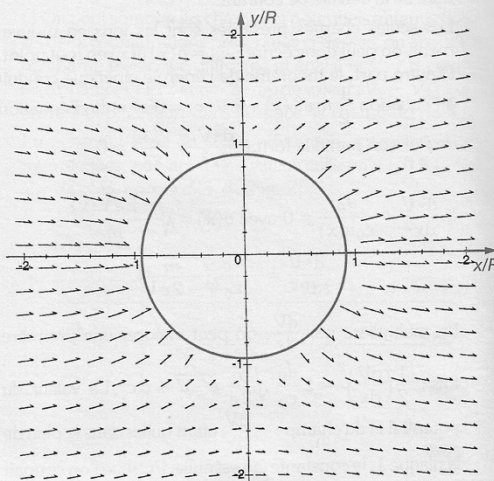


Figure 30

Notons que les symétries et antisymétries prévues initialement sont toutes respectées ! Ainsi, deux points symétriques l'un de l'autre par rapport au plan yOz portent des densités de charge opposées (Fig. 31) ; on en déduit que toute portion de cylindre est globalement neutre.

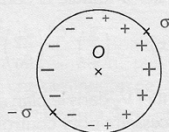


Figure 31

Exercice : Effets de bord dans un condensateur

- Les lignes de champ sont dirigées vers les potentiels décroissants, donc vers le haut avec $U > 0$.
 - Les armatures sont des équipotentielles. Les lignes de champ étant orthogonales aux équipotentielles, le champ est orthogonal aux armatures lorsqu'il les rejoint.
 - Le plan $z = 0$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de charges. En tout point de ce plan, le champ électrostatique est donc orthogonal au plan.
 - Loin du bord $x = 0$, les lignes de champ sont parallèles ce qui signifie que le champ est uniforme. L'évasement des tubes de champ qui sortent du condensateur près de son bord est à associer à la diminution du champ en norme lorsqu'on s'éloigne de ses sources.
- Les équations (MG) et (MF) s'écrivent $\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ et $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ soit $\vec{E} = -\text{grad } V$. Il vient $\text{div}(-\text{grad } V) = \rho/\epsilon_0$ soit $\Delta V = -\rho/\epsilon_0$ (équation de Poisson). L'espace entre les armatures étant dépourvu de charge, cette équation se simplifie en $\Delta V = 0$ (équation de Laplace). La distribution de charges étant antisymétrique par rapport au plan $z = 0$, le potentiel électrostatique possède la même propriété de symétrie : il est donc impair en z .
 - En coordonnées cartésiennes, $\Delta V_0(z) = d^2 V_0/dz^2 = 0$ d'où $V_0(z) = az + b$ avec a et b des constantes. L'impairité de $V_0(z)$ donne $b = 0$, puis les conditions aux limites sur les armatures $a = -U/e$, soit enfin :

$$V_0(z) = -\frac{Uz}{e} \quad \text{puis} \quad \vec{E}_0 = -\text{grad } V_0 = -\frac{dV_0}{dz} \vec{u}_z = \frac{U}{e} \vec{u}_z.$$

- Les conditions aux limites imposent $V^*(x, z = \pm e/2) = 0$.

(d) Reportons la forme proposée dans l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad g \frac{d^2 f}{dx^2} + f \frac{d^2 g}{dz^2} = 0.$$

Puis, en divisant l'égalité par le produit $f(x)g(z)$, il vient :

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dz^2}.$$

Dans cette égalité, le membre de gauche ne dépend pas de z tandis que le membre de droite dépend pas de x . Puisque ces deux membres sont égaux, c'est qu'il s'agit d'une vraie constante qu'on notera C . f et g sont donc solutions de deux équations différentielles indépendantes :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - Cf = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 g}{dz^2} + Cg = 0.$$

Pour satisfaire aux conditions aux limites, la fonction $g(z)$ doit s'annuler deux fois, ce qui n'est possible que si $C > 0$.



Conseils méthodologiques

L'énoncé propose de chercher des solutions de la forme $V^*(x, z) = f(x)g(z)$: il s'agit de la méthode de séparation des variables qui sera aussi très utile en physique des ondes. Celle-ci consiste d'abord à reporter la forme de la solution cherchée dans l'équation aux dérivées partielles. Puis, on tire deux équations différentielles découplées portant respectivement sur $f(x)$ et sur $g(z)$, en faisant apparaître une égalité du type :

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dz^2},$$

dans laquelle le membre de gauche ne dépend pas de z tandis que le membre de droite ne dépend pas de x . On conclut alors au fait qu'aucun des deux membres ne dépend ni de x , ni de z , mais que chacun est égal à une vraie constante, ici notée C . Les conditions aux limites ou les conditions initiales permettent de déterminer le signe de cette constante.

(e) On résout les équations différentielles obtenues précédemment : $f(x) = A \exp(-x/\delta) + B \exp(x/\delta)$ et $g(z) = \alpha \sin(z/\delta) + \beta \cos(z/\delta)$ où A , B , α et β sont des constantes et $\delta = 1/\sqrt{C}$. Pour assurer l'impairité de V et donc celle de V^* qui en découle, il vient $\beta = 0$. Le potentiel doit rester borné, donc $B = 0$. En conséquence,

$$V^*(x, z) = D \exp(-x/\delta) \sin(z/\delta),$$

où $D = A\alpha$ est une constante. $V^*(x, z)$ s'annulant en $z = \pm e/2$, on tire en outre $\sin(e/2\delta) = 0$ soit $\delta = e/2n\pi$ avec n entier. En conclusion, on a trouvé une famille de solutions satisfaisant aux conditions aux limites sous la forme :

$$V_n^*(x, z) = A_n \sin\left(2n\pi \frac{z}{e}\right) \exp\left(-2n\pi \frac{x}{e}\right) \quad \text{avec } n \text{ entier et } A_n \text{ réel.}$$

3. L'énoncé propose de considérer que $V(x, z) = U \sin\left(2\pi \frac{z}{e}\right) \exp\left(-2\pi \frac{x}{e}\right) - \frac{Uz}{e}$.

(a) Les composantes du champ électrostatique s'obtiennent en calculant celles du gradient :

$$\begin{cases} E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2\pi U}{e} \sin\left(2\pi \frac{z}{e}\right) \exp\left(-2\pi \frac{x}{e}\right) \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{U}{e} - \frac{2\pi U}{e} \cos\left(2\pi \frac{z}{e}\right) \exp\left(-2\pi \frac{x}{e}\right) \end{cases}.$$

(b) Ainsi $\vec{E} - \vec{E}_0 = (2\pi U/e) \exp(-2\pi x/e) (\sin(2\pi x/e) \vec{u}_x - \cos(2\pi x/e) \vec{u}_z)$, d'où :

$$\frac{\|\vec{E} - \vec{E}_0\|}{\|\vec{E}_0\|} = 2\pi \exp\left(-2\pi \frac{x}{e}\right).$$

L'erreur commise en négligeant les effets de bord est donc inférieure à 10^{-3} lorsque :

$$\frac{x}{e} > \frac{\ln(10^{-3}/2\pi)}{2\pi} \approx 1,4.$$