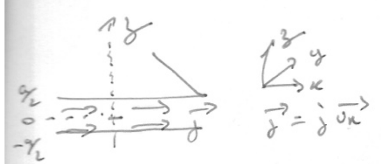
Ex1 Nappe de courants



1 – a) Invariance par translat° selon x et y

$\vec{B}(M) = \vec{B}(z)$

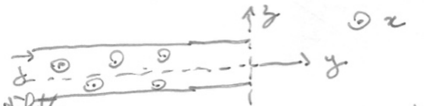
b) Tt plan x = cste est plan de sym. donc $\vec{B} \perp$ à ces plans → $\vec{B} = B(z)\,\vec{e_y}$

c) Plan de symétrie z = 0 → respecte la règle de la main droite

$\vec{B} \perp$ à ce plan et selon $\vec{e_y}$ → lignes de chp droite selon Oy

↳ seule possibilité $\vec{B}(z=0) = \vec{0}$!

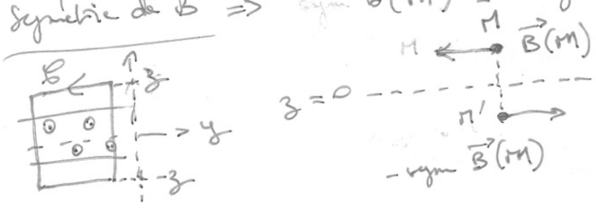
2 – a)



• Première possibilité

On choisit un contour d'Ampère avec des lignes de chp selon y, symétrique % à z = 0 pour exploiter les symétries de $\vec{B}$, contour qu'on referme ensuite.

Symétrie de $\vec{B}$ ⇒ $\vec{B}(M') = -\,\text{sym}(\vec{B}(M))$ avec M' = sym(M) % au plan z = 0



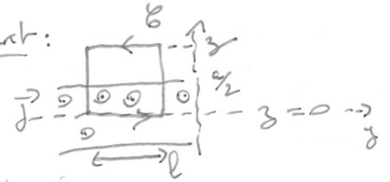
donc $B(-z) = -B(z)$

↳ f° impaire de z

• Deuxième possibilité qui respecte plus le sens de l'énoncé

b) On choisit le contour qui passe par z = 0 ! à l'ext puis à l'intérieur de la distribut°

• à l'ext :



$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \int_{z=0} \underbrace{\vec{B}(z=0)}_{0}\cdot\vec{dl} + \int_{z} \vec{B}\cdot\vec{dl}$$

$$= \int_{z} -B(z)\,dl \quad \text{car } \vec{dl} = +dl\,\vec{e_y}$$

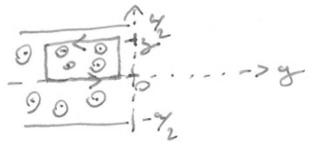
$$= B(z)\,l \quad \text{car } B(z) \text{ uniforme pour } z = \text{cst}$$

$I_{int} = j\,\frac{a}{2}\,l$

↳ $-B(z)\,l = \mu_0 j \frac{a}{2}\,l$

$$\boxed{\vec{B}(z) = -\mu_0 j \frac{a}{2}\,\vec{e_y}}$$

à l'intérieur :

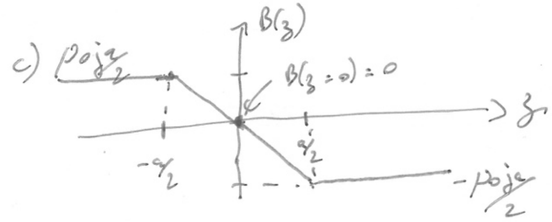


$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot\vec{dl} = -B(z)\,l$

$I_{int} = j\,z\,l$

$-B(z)\,l = \mu_0 j z l$ → $\boxed{\vec{B} = -\mu_0 j z\,\vec{e_y}}$

c)



Pour la partie z < 0 la f° B(z) est impaire

Ex3 – Modèle de fils

$I = j\pi R^2$

a) Voir cours

à l'ext : $\vec{B} = \frac{\mu_0 j R^2}{2}\,\frac{1}{r}\,\vec{e_\theta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{e_\theta}$

à l'int : $\vec{B} = \frac{\mu_0 j}{2}\,r\,\vec{e_\theta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}\,r\,\vec{e_\theta}$

b) Distribut° surfacique de courant ($di = \vec{j_s}.\vec{dl}\,\vec{n}$)

à l'int $\vec{B} = \vec{0}$

à l'ext : $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I_{int}$ avec $\vec{B} = B(r)\,\vec{e_\theta}$, $\vec{dl} = dl\,\vec{e_\theta}$

$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot\vec{dl} = B(r)\times 2\pi r$ et $I_{int} = I = j_s \times 2\pi R$

$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{e_\theta}$ → discontinuité en r = R car courants surfaciques

c) On utilise le théorème de superposit° avec le chp créé par un cylindre "plein" parcouru par $\vec{j}$ + le chp créé par un cylindre "plein" de rayon r parcouru par $-\vec{j}$!

$$\vec{B} = \left(\frac{\mu_0 j}{2}\,OM - \frac{\mu_0 j}{2}\,O'M\right)\vec{e_\theta}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 j}{2}\,(OM - O'M)\,\vec{e_\theta} = \frac{\mu_0 j}{2}\,OO'\,\vec{e_\theta} \rightarrow \text{uniforme}$$

(qe). Sous forme vectorielle, on remarquera

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \wedge \vec{OM} - \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \wedge \vec{O'M}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \wedge \vec{OO'}$$

. $\vec{B} \perp \vec{OO'}$ car (O, O', z) plan de symétrie

Ex 4 - Mesure de chp magnétique

1. Equilibre ds $\vec{B}$ ext

$E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -mB\cos\theta$

↳ point d'équilibre
$\theta = 0 \rightarrow$ point stable
$\theta = \pi \rightarrow$ point instable

2 - Vitesse angulaire

Mvt conservatif $\Rightarrow E_m = \text{cste} \rightarrow$ intégrale 1ère

$E_c = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \rightarrow E_c + E_p = \boxed{\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - mB\cos\theta = E_0}$

avec $\boxed{E_0} = -mB\cos\theta(t=0) = \boxed{0}$

La boussole oscille ds le plan horizontal autour de l'axe x soit de la direct du champ $\vec{B}$, avec $\theta_{max} = \pm \frac{\pi}{2}$

C'est l'analogue du pendule simple de longueur l

$$\frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta} - mgl\cos\theta = E_0$$

Pour le passage en $\theta = 0$, la vitesse est max avec

$\frac{1}{2} J \dot{\theta}_{max}^2 - mB = 0 \rightarrow \boxed{\dot{\theta}_{max} = \pm\sqrt{\frac{2mB}{J}}}$

4 - Mesure du chp $\vec{B}$ terrestre

a) Eq. du mvt $\rightarrow$ dérivat de l'intégrale 1ère (équivalent du TMC)

$J\ddot{\theta} + mB_0 \sin\theta = 0 \xrightarrow{\text{petites oscillat}} J\ddot{\theta} + mB_0\theta = 0$

$$\ddot{\theta} + \frac{mB_0}{J}\theta = 0$$

$\omega_0^2 = \frac{mB_0}{J}$
↳ OH

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mB_0}}}$$

↳ mais on ne connait pas m ! et J !

b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m(B_0+B_1)}}$
↳ B_0 et B_1 m̂ sens

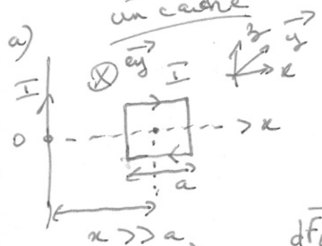
$T' = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m(B_0-B_1)}}$
↳ sens opposés

$\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{B_0+B_1}{B_0-B_1}} \rightarrow \boxed{B_0 = B_1 \frac{T'^2 + T^2}{T'^2 - T^2}}$

Pblème résolu (les paramètres m et J ne seraient pas déterminés avec grde précision)

Ex 5 - Interact entre un fil et un cadre

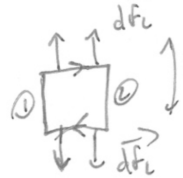
a)



$\vec{B}_{fil} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e_\theta}$

↳ $\vec{B}_{fil} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \vec{e_y}$ ici !

$\vec{dF_L} = I \vec{dl} \wedge \vec{B}_{fil}$



se compensent 2 à 2 pour les portions selon (Ox) (car $\vec{B}$ identique)

Pour les portions "verticales" $\vec{B}_{fil}(x)$ y prend des valeurs $\neq$ en $x - \frac{a}{2}$ et $x + \frac{a}{2}$.

avec sur la portion ① $\rightarrow \vec{dF_L} = I\, dl\, \vec{e_z} \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi(x - \frac{a}{2})} \vec{e_y}$

(point $x - \frac{a}{2}$ fixe sur ①) $\vec{F_L} = -\frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi} \frac{1}{x - \frac{a}{2}} \vec{e_x}$

Sur la portion (2) $\quad d\vec{F_2} = -I\,dl\,\vec{e_z} \wedge \dfrac{\mu_0 I}{2\pi(x+\frac{a}{2})}\vec{e_y}$

$$\vec{F_2} = \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi}\,\frac{1}{x+\frac{a}{2}}\,\vec{e_x}$$

$$\vec{F_L} = \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi}\left[\frac{1}{x+\frac{a}{2}} - \frac{1}{x-\frac{a}{2}}\right]\vec{e_x}$$

$$\frac{1}{x+\frac{a}{2}} = \frac{1}{x}\left[\frac{1}{1+\frac{a}{2x}}\right] \underset{\text{DL ordre 1}}{\simeq} \frac{1}{x}\left[1 - \frac{a}{2x}\right]$$

$$-\frac{1}{x-\frac{a}{2}} = -\frac{1}{x}\left[\frac{1}{1-\frac{a}{2x}}\right] \simeq -\frac{1}{x}\left[1+\frac{a}{2x}\right]$$

$$\boxed{\vec{F_L} = -\frac{\mu_0 I^2 a^2}{2\pi x^2}\,\vec{e_x}}$$

b) $E_p = -\vec{m}\cdot\vec{B}$ avec $\vec{m} = I\,a^2\,\vec{e_y}$

et $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_y} \simeq \vec{cst}$ sur la spire

$E_p \simeq -\dfrac{\mu_0 I^2 a^2}{2\pi r}$ et $\vec{F} = -\vec{\text{grad}}\,E_p = -\dfrac{dE_p}{dr}\vec{e_r}$ ici $\vec{e_r} = \vec{e_x}$

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{\mu_0 I^2 a^2}{2\pi r^2}\,\vec{e_x}}$$