

Exercice 5 : Sources créant un champ donné

5. Chercher $\vec{j} = j(r) \vec{u}_z$ par analogie avec un fil infini et appliquer le théorème d'Ampère sur un cercle de rayon r ; pour le calcul du courant enlacé, découper le disque en couronnes comprises entre r' et $r' + dr'$; $2\pi r B(r) = 2\pi \mu_0 \int_0^r r' j(r') dr'$; dériver cette relation par rapport à r ; $\mu_0 r j(r) = d(r B(r))/dr$; $j(r > a) = 0$ et $j(r < a) = 3r B_0 / \mu_0 a^2$.

Une autre méthode consiste à utiliser l'équation de MA sous sa forme locale (forme intégrale -> théorème d'Ampère), en exploitant l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques.

Exercice 6 : Paratonnerre

6. a) Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie des sources donc $\vec{B}(M)$ lui est orthogonal donc parallèle à $\vec{u}_\phi$; les sources sont invariantes par toute rotation d'angle ϕ autour de Oz donc $B_\phi(r, \theta)$ ne dépend pas de ϕ .
- b) Appliquer le théorème d'Ampère sur un cercle de rayon $r \sin \theta$ centré sur Oz et passant par M ; $2\pi r \sin \theta B_\phi = \mu_0 I$.
- c) Traduire la nullité du flux rentrant sur une surface constituée d'une demi-sphère de centre O et de rayon r fermée par le disque de centre O et de rayon r situé dans le plan $z = 0$; $I - 2\pi r^2 j(r) = 0$. Choisir comme surface s'appuyant sur (C) la calotte sphérique (S) de centre O

et de rayon r et repérer un point P courant de (S) par ses coordonnées sphériques (r, θ', ϕ') ;

$$\iint_{(S)} (j \vec{u}_r) \cdot (dS \vec{u}_r) = \iint_{(S)} (I / 2\pi r^2) r^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' \\ = I \int_0^\theta \sin \theta' d\theta' = I (1 - \cos \theta).$$

- d) Appliquer le théorème d'Ampère sur le cercle (C) ; $B_\phi = \mu_0 I (1 - \cos \theta) / 2\pi r \sin \theta$; sur l'axe on a $\theta \rightarrow 0$ et $B_\phi = 0$ donc $\vec{B} = \vec{0}$ en accord avec l'existence d'une infinité de plans de symétrie.

Exercice 3 : Champ B créée par convection de charges dans un isolant

3. a) $q = 2\pi a h \sigma$; $I_{(C)} = q/T$ avec $T = 2\pi/\omega$ soit $I_{(C)} = a h \sigma \omega$; $B(r < a) = \mu_0 \sigma a \omega$.
- b) $U_m = (B_{int}^2 / 2\mu_0) \pi a^2 h = (1/2) \pi \mu_0 \sigma^2 a^4 h \omega^2 = (1/2) J^* \omega^2$.

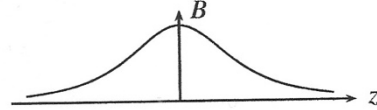
Champ B au voisinage de l'axe d'une spire

1. a. Tous les plans qui contiennent l'axe (Oz) sont plans d'antisymétrie de la distribution de courant. Le champ magnétique appartenant à tous ces plans, il est porté par $\vec{u}_z$: $\vec{B}(M) = B(M)\vec{u}_z$. De plus, le courant est invariant par rotation autour de l'axe (Oz), donc $B(M) = B(r=0, z)$, qu'on écrit $B(z)$.

b. Le plan de la spire est plan de symétrie de la distribution de courant, donc $\vec{B}(-z) = \vec{B}(z)$ donc $B(-z) = B(z)$.

c. $B(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$ peut être mis sous la forme $B(z) = B_0 f(u)$ avec $B_0 = B(0) = \frac{\mu_0 I}{2R}$ et $f(u) = (1 + u^2)^{-3/2}$ avec $u = z/R$.

d. Le graphe ci-contre représente l'évolution de la valeur du champ magnétique le long de (Oz).



2. a. Le plan contenant P et l'axe (Oz) est plan d'antisymétrie de la distribution de courant donc $\vec{B}(P)$ appartient à ce plan, il n'a pas de composante orthoradiale.

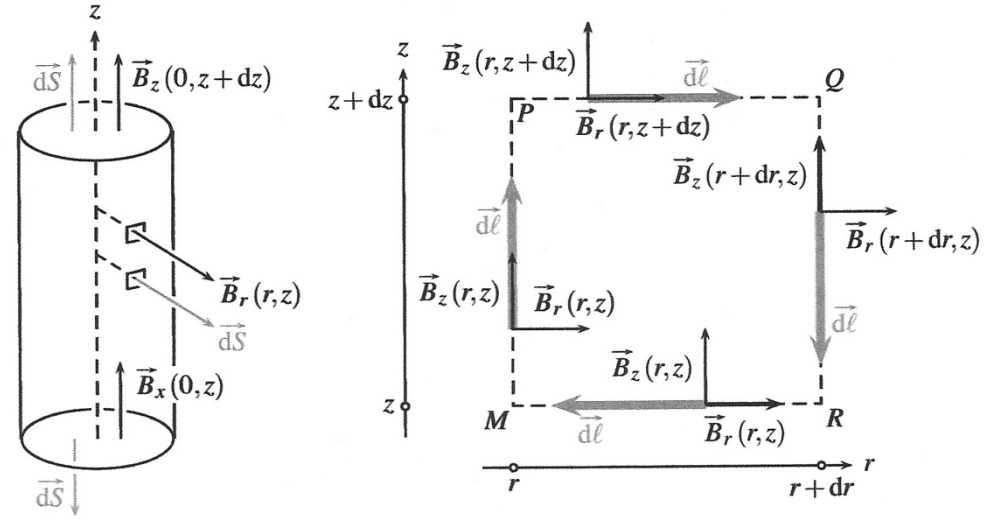
b. La distribution de courant est invariante par toute rotation d'axe (Oz) donc $\vec{B}(P) = \vec{B}(r, z)$.

c. Le flux de $\vec{B}$ à travers une surface fermée est nul.

d. Au voisinage de l'axe, il n'y a aucun courant. Le théorème d'Ampère appliqué à un contour voisin de l'axe montre que la circulation de $\vec{B}$ le long de ce contour est nulle. Quel que soit le contour, la circulation a toujours la même valeur : elle est conservative.

e. Solution rapide : le rayon r étant petit, on considère B_z uniforme sur les faces du cylindre pour le calcul du flux de $\vec{B}$. De plus, B_r est uniforme sur la surface latérale de ce cylindre. Le flux magnétique à travers une surface fermée est nul donc $-B_z(0, z)\pi r^2 + B_r(r, z)2\pi r dz + B_z(0, z + dz)\pi r^2 = 0$ et premier ordre en r : $B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}(0, z)$.

Solution plus détaillée : il y a invariance par rotation autour de l'axe (Oz), donc B_z est indépendant de θ . La valeur de B_z ne varie alors pas lors d'un demi tour, obtenu par rotation de π , ou changement de r en $-r$. Ainsi B_z est une fonction paire de r , car $B_z(r, z) = B_z(-r, z)$; son développement en série entière de r ne contient que des puissances paires de r . D'où, proche de l'axe, $B_z(r, z) = B_z(0, z) + \mathcal{O}(r^2)$, et donc immédiatement $B_z(r, z) = B_z(0, z) + o(r)$ au premier ordre en r .



Le flux total à travers le cylindre $\mathcal{S}$ est :

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \underbrace{B_z(0, z+dz)\pi r^2 - B_z(0, z)\pi r^2}_{dz \frac{\partial B_z}{\partial z}(0, z)\pi r^2} + B_r(r, z)2\pi r dz = 0.$$

Il reste donc, au premier ordre en r et dz : $B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}(0, z)$.

f. Le contour $\mathcal{C}$ n'entoure aucun courant, la circulation de $\vec{B}$ est nulle d'après le théorème d'Ampère. On calcule la circulation sur MP , puis PQ , QR et RM :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 = B_z(r, z)dz + B_r(r, z+dz)dr - B_z(r+dr, z)dz - B_r(r, z)dr.$$

Alors $\frac{B_r(r, z+dz) - B_r(r, z)}{dz} = \frac{B_z(r+dr, z) - B_z(r, z)}{dr}$ et, à la limite où $dr \rightarrow 0$ et $dz \rightarrow 0$:

$\frac{\partial B_r}{\partial z}(r, z) = \frac{\partial B_z}{\partial r}(r, z)$. On intègre ensuite cette équation par rapport à r entre $r=0$ et r , puis avec la question précédente (on utilise la notation r' afin que r ne soit pas simultanément borne d'intégration et variable d'intégration) :

$$\int_0^r \frac{\partial B_z}{\partial r}(r', z) dr' = \int_0^r \frac{\partial B_r}{\partial z}(r', z) dr' = \int_0^r -\frac{r'}{2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2}(0, z) dr' = \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2}(0, z) \int_0^r -\frac{r'}{2} dr',$$

$$B_z(r, z) - B_z(0, z) = \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2}(0, z) \left(-\frac{r^2}{4} + 0 \right) \Rightarrow B_z(r, z) = B_z(0, z) - \frac{r^2}{4} \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2}(0, z).$$

g. En utilisant les résultats précédents et les données de l'énoncé, on peut exprimer le champ magnétique dans le plan de la spire ($z=0$) : $B_z(r, 0) = B_0 \left(1 + \frac{3r^2}{4R^2} \right)$. On cherche r tel que $\frac{B_z(r, 0) - B_0}{B_0} \leq 10^{-2}$, on obtient $r \leq \frac{0.2}{\sqrt{3}} R = 0,115R$.