Partie IV : Peut-on se passer de batterie ?

29. – La résistance R est liée à l'effet Joule qui se produit dans le conducteur du fait du déplacement des porteurs de charge.
    – L'inductance propre L est liée à l'induction propre qui se produit à travers les spires de la bobine. En effet, la bobine, parcourue par un courant variable, crée un champ magnétique variable donc le flux à travers la bobine est variable.
    – La capacité C est liée à l'existence d'"armatures" chargées se faisant face (les spires de la bobine), comme dans un condensateur.

30. En modélisation la bobine avec le modèle (b), on obtient l'équation différentielle suivante :

$$(R_g + R + R_c)i + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = e(t)$$

En prenant $e(t) = E$ (pendant la demi-période où le signal créneau est positif), on a :

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R_{tot}}{L}i = \frac{E}{L} \qquad \text{avec} \quad R_{tot} = R_g + R + R_c$$

On pose $\tau = \dfrac{L}{R_{tot}}$ et on obtient : $u_R(t) = R\left(A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \dfrac{E}{R_{tot}}\right)$

Or, $i(t=0^-) = i(t=0^+) = 0$ par continuité du courant dans la bobine (on pose $t = 0$ l'instant où la tension $e(t)$ passe de 0 à $+E$). Ainsi, on a :

$$\boxed{u_R(t) = \frac{ER}{R_{tot}}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$$

On est en présence d'un système d'ordre 1 avec le modèle (b).

Graphiquement, on remarque :
– une pente à l'origine non nulle ;
– l'absence de dépassement ;
– l'absence d'oscillations.

Ces différentes observations confirment que le système étudié est d'ordre 1. Le modèle (b) est donc cohérent avec la réponse observée.

Valeur de l'inductance L :
Afin de déterminer L, on déterminer d'abord τ graphiquement. Pour cela, on trace la tangente à l'origine (l'origine étant l'instant où $e(t)$ passe de 0 à $+E$) et on mesure le temps t_{inter} pour lequel elle coupe l'asymptote $u_R = u_{R,\infty}$.
On a alors : $\tau = t_{inter} - t_{initial} = 7,6.10^{-3}$ ms.

On trouve ensuite $\boxed{L = \tau\, R_{tot}}$ $L = 8,0$ mH. Cette valeur semble cohérente pour une bobine de ce type.

31. Le modèle (a) donne $|\underline{Z}| = R$. Il reste valide tant que $|\underline{Z}|$ est indépendant de la fréquence. On voit sur la figure 24 que $|\underline{Z}|$ reste constante jusqu'à environ $f_{max,1} = 1.10^2$ Hz.

Le modèle (b) donne $|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + (2\pi f L)^2}$ soit $\ln(|\underline{Z}|) = \dfrac{1}{2}\ln(R^2 + (2\pi f L)^2)$.

Si on s'intéresse aux fréquences supérieures à 1 kHz, on a $R^2 \ll (2\pi f L)^2$ avec les valeurs de R et L dont on dispose. On pourra donc faire la simplification suivante :

$$\boxed{\ln(|\underline{Z}|) \simeq \frac{1}{2}\ln((2\pi f L)^2) \simeq \ln(2\pi L) + \ln(f)}$$

On cherche donc jusqu'à quelle fréquence la courbe de la figure 24 est une droite de pente 1. On voit que ceci est vrai jusqu'à $f_{max,2} \simeq 5.10^4$ Hz.

32. $\underline{Y} = jC\omega + \dfrac{1}{R + jL\omega} = \dfrac{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}{R + jL\omega}$ d'où

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}}$$

33. On lit graphiquement $f_0 \simeq 1,6.10^5$ Hz. Pour une telle fréquence, on a bien $\underbrace{R}_{6,2\,\Omega} \ll \underbrace{2\pi f L}_{8.10^3\,\Omega}$.

On a alors $|\underline{Z}| = \dfrac{L\omega}{|1 - LC\omega^2|}$ qui atteint un maximum (infini !) lorsque le dénominateur s'annule. Ainsi, $\boxed{f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$ puis $\boxed{C = \dfrac{1}{(2\pi f_0)^2\,L}}$ A.N. : $C = 1,3.10^{-10}$ F $= 0,13$ nF.

Cette valeur est faible mais c'est logique car une bobine a un faible comportement capacitif.

34. Dans l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS), on néglige le temps de propagation du signal devant sa période soit $\tau_{propagation} \ll T$.

Cela revient à vérifier l'inégalité : $\ell \ll \lambda$ avec ℓ la distance caractéristique de propagation et λ la longueur d'onde du signal.

Ici, $\ell = r_0 \simeq 1$ à 10 m et $\lambda = \dfrac{c}{f} \simeq 3$ km. On a donc bien $\boxed{r_0 \ll \lambda}$ et on peut donc bien supposer que l'ARQS est vérifiée.

35. Norme du moment magnétique :
Par définition, on a $\boxed{\mathcal{M}_1 = N_1 S_1 i_1}$

Définition de l'inductance mutuelle :
Le flux, à travers le circuit 2, du champ magnétique créé par le circuit 1 s'écrit : $\boxed{\Phi_{1\to2} = M\,i_1}$.
De même, $\boxed{\Phi_{2\to1} = M\,i_2}$.

Expression de l'inductance mutuelle :
Calculons le flux de $\overrightarrow{B}_1$ à travers le circuit 2 :

$$\begin{aligned}
\Phi_{1\to2} &= \iint_{N_2\,spires} \overrightarrow{B}_1 \cdot \mathrm{d}^2\overrightarrow{S_2} \\
&= N_2\,\overrightarrow{B}_1 \cdot S_2\,\vec{u}_z \\
&= N_2 S_2 \frac{\mu_0 \mathcal{M}_1}{4\pi r_0^3}\left(2\cos\theta_0\,\underbrace{\vec{u_r}\cdot\vec{u}_z}_{\cos\theta_0} + \sin\theta\,\underbrace{\vec{u}_\theta\cdot\vec{u}_z}_{-\sin\theta_0}\right) \\
&= \frac{N_2 S_2 \mu_0 N_1 S_1 i_1}{4\pi r_0^3}\left(2\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0\right)
\end{aligned}$$

Par identification, on trouve $\boxed{M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_1 S_2}{4\pi r_0^3}\left(2\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0\right)}$

L'expression est homogène car μ_0 s'exprime en $\mathrm{H.m^{-1}}$ et M en H.

36. Le modèle du champ créé par un dipôle magnétique n'est valable que loin du dipôle, c'est-à-dire pour $r_0 \gg a_1$ où a_1 est le rayon de la spire constituant le dipôle magnétique.
Ici, $a_1 = 10$ cm, donc l'expression du champ n'est pas valable pour des distances inférieures à 1 m. C'est bien ce qu'on observe sur la figure 26.

Pour l'application étudiée, on a $r_0 \sim 1$ à 10 m. Pour ces valeurs de r_0, l'approximation dipolaire est valable. Le modèle analytique est donc pertinent dans ce cas (on voit sur la figure 26 qu'il est en bon accord avec l'expérience pour $r > 1$ m).

37. On écrit deux lois des mailles :

$$\begin{aligned}
\underline{e} &= \left(R_1 + jL_1\omega + \frac{1}{jC_1\omega}\right)\underline{i_1} + jM\omega\underline{i_2} \\
0 &= \left(R_2 + R_c + jL_2\omega + \frac{1}{jC_2\omega}\right)\underline{i_2} + jM\omega\underline{i_1}
\end{aligned}$$

38. Quand $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}$, on a $\boxed{\underline{i_2} = \frac{Mj\omega_0\,\underline{e}}{M^2\omega_0^2 + R_1(R_2+R_c)}}$

Puissance transmise à la charge :

$$\boxed{P = R_c\,I_{eff}^2 = R_c\,\frac{(M\omega_0 E_{eff})^2}{(M^2\omega_0^2 + R_1(R_2+R_c))^2}}$$

39. On synthétise les résultats dans le tableau suivant :

r_0 (m)	1	3	10
P_{max} (W)	$1{,}3.10^3$	$2{,}5.10^1$	$2{,}5.10^{-3}$

La puissance d'alimentation en vol stationnaire étant d'environ 50 W (d'après la formule trouvée à la question 7, pour une masse de 500 g), ce dispositif devrait se limiter à des vols à basse altitude (inférieure à 2 m), ce qui paraît inadapté à l'utilisation du drone.
Ce système ne paraît donc pas pertinent pour alimenter un drone.