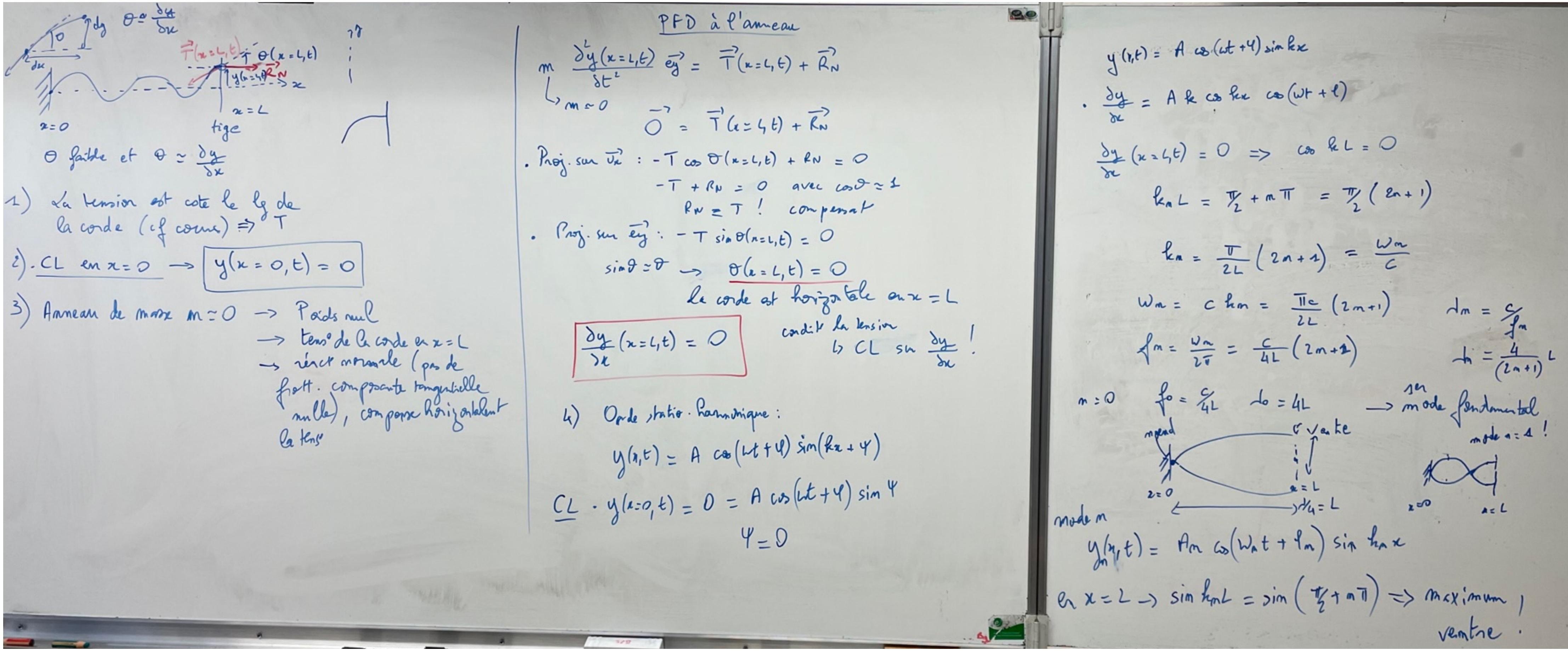
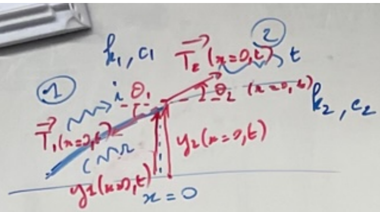
Exercice 1 : corde libre à une extrémité



Exercice 2 : réflexion entre deux cordes



$$y_r = \overbrace{\underline{r}\, y_{0i}}^{y_{0r}}\, e^{j(\omega t + k_1 x)}$$

$$y_t = \underbrace{\underline{t}\, y_{0i}}_{y_{0t}}\, e^{j(\omega t - k_2 x)}$$

2) CL sur la déformat° : déformat° continue à la jonct°

$$y_1(x=0,t) = y_2(x=0,t)$$

$$y_i(x=0,t) + y_r(x=0,t) = y_t(x=0,t)$$

⚠ erreur typique $\Rightarrow$ $y_r(x=0,t) + y_t(x=0,t) = y_i(x=0,t)$!!

$(\forall t)$ $\quad y_{0i}\, e^{j\omega_i t} + \underline{y_{0r}}\, e^{j\omega_r t} = \underline{y_{0t}}\, e^{j\omega_t t}$

↳ impose $\omega_i = \omega_r = \omega_t$ → condit° qu'on aurait pu imposer dès le départ.

en $x=0$!

$\%\, y_{0i}$ $\quad y_{0i} + \underline{y_{0r}} = \underline{y_{0t}}$ $\quad$ avec $\underline{r} = \dfrac{\underline{y_{0r}}}{y_{0i}}$ $\quad \underline{t} = \dfrac{\underline{y_{0t}}}{y_{0i}}$

$$\boxed{1 + \underline{r} = \underline{t}} \quad (1)$$

$\omega_i = \omega_r = \omega \longrightarrow k_i = \dfrac{\omega}{c_1}$; $k_r = \dfrac{\omega}{c_1}$ $\quad$ Vecteurs d'onde

$$k_i = k_r = k_1$$

On appelle $k_t = k_2 = \dfrac{\omega}{c_2}$

3) CL sur la tension : tension continue à la jonction

Pour la jonction $\Rightarrow$ $\vec{T_1}(x=0,t) + \vec{T_2}(x=0,t) = \vec{0}$

Pour le justifier (si on veut) PFD sur la jonction de masse nulle ! à la limite

$$\vec{0} = \overrightarrow{\text{accélérat°}} = \sum \vec{F} = \vec{T_1}(x=0,t) + \vec{T_2}(x=0,t)$$

- Project° sur $\vec{e_x}$: $-T_1(x=0,t)\cos\theta_1(x=0,t) + T_2(x=0,t)\cos\theta_2(x=0,t) = 0$

$\cos\theta \simeq 1 \Rightarrow \quad T_1(x=0,t) = T_2(x=0,t) = T$!

La norme de la tension est la m̂ dans les 2 cordes

- Project° sur $\vec{e_y}$: $-\cancel{T}\sin\theta_1(x=0,t) + \cancel{T}\sin\theta_2(x=0,t) = 0$

$\theta_1(x=0,t) = \theta_2(x=0,t)$ les angles st égaux

$$\boxed{\frac{\partial y_1}{\partial x}(x=0,t) = \frac{\partial y_2}{\partial x}(x=0,t)}$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial x} + \frac{\partial \underline{y_r}}{\partial x}(x=0,t) = \frac{\partial \underline{y_t}}{\partial x}(x=0,t)$$

$$-\cancel{j} k_1 y_i + \cancel{j} k_1 \underline{y_r} = -\cancel{j} k_2 \underline{y_t}$$

$\%\, y_{i0}$

$$-k_1 + k_1 \underline{r} = -k_2 \underline{t}$$

$$\boxed{1 - \underline{r} = \frac{k_2}{k_1}\underline{t}} \quad (2)$$

3) $\begin{cases} 1 + \underline{r} = \underline{t} \\ 1 - \underline{r} = \dfrac{k_2}{k_1}\,\underline{t} = \dfrac{c_1}{c_2}\,\underline{t} \end{cases}$ avec $\dfrac{k_2}{k_1} = \dfrac{\omega/c_2}{\omega/c_1} = \dfrac{c_1}{c_2}$

$\hookrightarrow 2 = \underline{t}\left(1 + \dfrac{c_1}{c_2}\right) \longrightarrow \boxed{\underline{t} = \dfrac{2}{1 + c_1/c_2} = \dfrac{2c_2}{c_1 + c_2}}$ $\underline{t}$ et $\underline{r}$ st réels

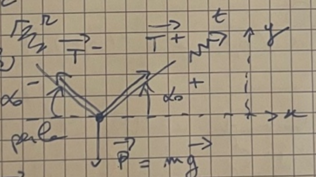
$\hookrightarrow \underline{r} = \underline{t} - 1 = \dfrac{2c_2}{c_1 + c_2} - 1 \Rightarrow \boxed{\underline{r} = \dfrac{c_2}{c_1 + c_2}}$

Rqe) Si on avait défini les impédances des milieux Z_1 et Z_2 on aurait une relat° "classique" et analogue

$$\underline{r} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Exercice 4 : réflexion et transmission sur une perle

1) Les pulsat° st identiques, car l'onde incidente donne naissance aux ondes réfléchie et transmise à la m̂ pulsat° (système linéaire).
Ensuite, $k_r = \omega/c = k_i = k_t$ car le milieu est identique (m̂ c !)



2) A l'équilibre
PFD appliqué à la perle

$\vec{0} = \vec{P} + \vec{T}^- + \vec{T}^+$

- en proj. sur $Ox \Rightarrow 0 = T^+ \cos\alpha_0^+ - T^- \cos\alpha_0^-$
  $\cos\alpha \simeq 1 \Rightarrow 0 = T^+ - T^- \Rightarrow \underline{T^+ = T^- = T}$ m̂ tens° !
- en proj. sur $Oy \Rightarrow T \sin\alpha_0^+ - T \sin\alpha_0^- - mg = 0$
  $\sin\alpha \simeq \alpha$ $\quad \underline{T(\alpha_0^+ - \alpha_0^-) - mg = 0}$

⚠ ici $\alpha_0^+ > 0$ et $\alpha_0^- < 0$ et $-T\sin\alpha_0^- > 0$!

3) La position de la perle est la m̂ des "2 côtés"
$y^+(0,t) = y^-(0,t) \Rightarrow \underline{y_t}(0,t) = \underline{y_i}(t=0) + \underline{y_r}(t=0)$

$$\boxed{1 + \underline{r} = \underline{t}}$$

Pour la deuxième CL appliquons le PFD à la perle

$m \dfrac{d^2y}{dt^2}\vec{u_y} = m\dfrac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}\vec{u_y} = m\vec{g} + \vec{T}^+ + \vec{T}^-$

$y_{perle} = y^t(x=0,t)$
$(= y_i + y_r$ aussi en $x=0)$

- En proj. sur $\vec{e_x}$: $0 = T^+\cos(\alpha_0^+ + \alpha^+(0,t)) - T^-\cos(-\alpha_0^- + \alpha^-(0,t))$

$\cos\alpha \simeq 1 \Rightarrow T^+ = T^- = T$ tjs !

$\alpha^-(0,t) > 0$

- En proj. sur $\vec{e_y}$:

$m\dfrac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} = -mg + T\left[\sin(\alpha_0^+ + \alpha^+(0,t)) + \sin(-\alpha_0^+ - \alpha^-(0,t))\right]$

$= \underbrace{-mg + T(\alpha_0^+ - \alpha_0^-)}_{0} + T\left[\alpha^+(0,t) - \alpha^-(0,t)\right]$

$= T\left[\alpha^+(0,t) - \alpha^-(0,t)\right]$

Naturellement la masse impose les angles initiaux par l'intermédiaire de son poids puis il y a vibrat° autour de cette posit° d'éq., pour les vibrat° on peut considérer autour de cette posit° le poids comme nul.

donc $-m\omega^2 \underline{y_t}(0,t) = T\left[\dfrac{\partial \underline{y_t}}{\partial x}(0,t) - \dfrac{\partial(\underline{y_i} + \underline{y_r})}{\partial x}(0,t)\right]$

$\%\, y_0$ $\left\{ -\dfrac{m\omega^2}{T}\underline{y_t}(0,t) = \left[-jk\,\underline{y_t}(0,t) + jk\,\underline{y_i}(0,t) - jk\,\underline{y_r}(0,t)\right] \right.$

$-\dfrac{m\omega^2}{T}\underline{t} = -jk\,\underline{t} + jk - jk\,\underline{r}$

$\%\, jk$ $\quad \boxed{\left(\dfrac{m\omega^2}{kT}j + 1\right)\underline{t} = 1 - \underline{r}}$

$$\boxed{\underline{t} = \frac{1}{1 + j\frac{m\omega^2}{2kT}} = \frac{1}{1 + j\frac{mkc^2}{2T}}}$$

$\omega^2 = k^2c^2$

$\underline{t}$ comme $\underline{r} \in \mathbb{C}$

$$\boxed{\underline{r} = 1 - \underline{t} = \frac{j\frac{m\omega^2}{2kT}}{1 + j\frac{m\omega^2}{2kT}}}$$

Rq) si $m \to \infty$ $\underline{t} \to 0$ et $\underline{r} \to 1$!
si $m \to 0$ $\underline{t} \to 1$ et $\underline{r} \to 0$! } cohérent !

Reprenons l'exercice 2) avec 2 corde ≠ et une jonction entre 2 cordes ≠ constituée par 1 perle de masse m

$$-m\omega^2 \underline{y_t}(0,t) = T\left[-jk_2 \underline{y_t}(0,t) + jk_1 \underline{y_i}(0,t) - jk_1 \underline{y_r}(0,t)\right]$$

$$-\frac{m\omega^2}{T}\underline{t} = -jk_2\underline{t} + jk_1 - jk_1\underline{r}$$

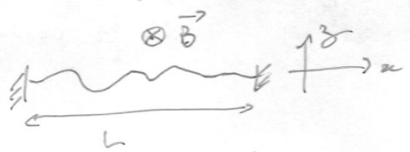
$\div jk_1$

$$\left(+\frac{m\omega^2}{Tk_1}j + \frac{k_2}{k_1}\right)\underline{t} = 1 - \underline{r}$$

et $\underline{t} = 1 + \underline{r}$

$$\boxed{\underline{t} = \frac{2}{\frac{m\omega^2}{Tk_1}j + \frac{k_2}{k_1} + 1} = \frac{2jk_1}{-\frac{m\omega^2}{T} + (k_2 + k_1)j}}$$

Ex 3 - Corde vibrante conductrice



$\vec{B} = B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\vec{u_y}$

$i(t) = i_0 \cos\omega t$

$\vec{dl} = dz\,\vec{u_z} + dx\,\vec{u_x}$

avec $dx = dl\cos\theta \simeq dl$

$dz = dl\sin\theta \simeq dl\,\theta$ ↳ ordre 2 !

donc $\vec{dl} \simeq dx\,\vec{u_x}$

1) $\vec{dF_L} = i\,\vec{dl} \wedge \vec{B}$
$= i_0\cos\omega t\, dx\,\vec{u_x} \wedge B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\vec{u_y}$
$= i_0\cos(\omega t) \times B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx\,\vec{u_z}$

PFD appliqué à un morceau élémentaire dl de corde en proj sur $\vec{u_z}$:

$$\mu\, \cancel{dx}\, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cancel{dx} + i_0 B_0 \cos\omega t \sin\frac{\pi x}{L}\, \cancel{dx}$$

masse linéique

La tension T est uniforme le long de la corde (cf cours car ajout ici d'une force selon $\vec{u_z}$!) → résultat de la projection selon $\vec{u_x}$!

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{i_0 B_0}{\mu}\cos\omega t \sin\frac{\pi x}{L}} \qquad \boxed{c^2 = \frac{T}{\mu}}$$

2) L'équation précédente correspond à l'équation d'Alembert en régime forcé à la pulsation ω → la force de Laplace impose naturellement sa pulsation aux oscillations de la corde (comme ds le dispositif de la corde de Melde avec le vibreur). De +, le terme en $\sin\frac{\pi x}{L}$ impose la pulsation spatiale ie le vecteur d'onde ici.

3) → Exploitons les CL :

- en $x = 0$ → $z(0,t) = 0 = z_0 \sin\psi \cos(\omega t + \varphi)$ $(\forall t)$
  $\Rightarrow \psi = 0$
- en $x = L$ ⇒ $z(L,t) = 0 = z_0 \sin\left(\frac{\pi L}{L}\right)\cos(\omega t + \varphi)$
  ↳ aucune incidence directe

→ Exploitons alors l'éq. différentielle de propagation

$$-\omega^2 z_0 \sin\frac{\pi x}{L}\cos(\omega t+\varphi) + \left(\frac{\pi c}{L}\right)^2 z_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos(\omega t+\varphi) = \frac{i_0 B_0}{\mu}\sin\frac{\pi x}{L}\cos\omega t$$

↳ $\varphi = 0$

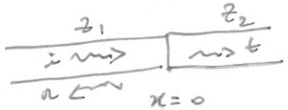
et $$\boxed{z_0 = \frac{i_0 B_0}{\mu\left(\left(\frac{\pi c}{L}\right)^2 - \omega^2\right)}}$$

$(z_0 \to +\infty)$ ↗ $L = \lambda/2$

Il y a résonance qd $\omega = \frac{\pi c}{L} \iff k = \pi/L$ qui est la pulsat° du mode propre fondamental ! de la corde accrochée à ses 2 extrémités. Les dissipat° et phénomènes non-linéaires limiteront l'amplitude des oscillat°.

Câble coaxial

Ex 1 : réflexion et transmission entre deux câbles



1) $u_i = U_0 e^{j(\omega t - k_1 x)}$

$u_r = U_r e^{j(\omega t + k_1 x)}$ avec $U_r = r U_0$

$u_t = U_t e^{j(\omega t - k_2 x)}$ avec $U_t = t U_0$

2) En $x=0$ la tension est continue $u_1(x=0,t) = u_2(x=0,t)$

comme l'intensité $i_1(x=0,t) = i_2(x=0,t)$

3) Tension ⇒ $U_0 + r U_0 = t U_0 \to \boxed{1+r=t}$

Intensité ⇒ $i_i(x=0,t) + i_r(x=0,t) = i_t(x=0,t)$

$$\frac{u_i(x=0,t)}{Z_1} - \frac{u_r}{Z_1}(x=0,t) = \frac{u_t}{Z_2}(x=0,t)$$

$$\frac{1}{Z_1} - \frac{r}{Z_1} = \frac{t}{Z_2} \to \boxed{1 - r = \frac{Z_1}{Z_2}\, t}$$

$$2 = \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) t \to \boxed{t = \frac{2Z_2}{Z_1+Z_2}} \quad t \in \mathbb{R}\ !$$

et $r = t - 1 \to \boxed{r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1+Z_2}}$ $r\in\mathbb{R}$!

↳ $r = 0$ si $Z_1 = Z_2$! adaptat° d'impédance

4). Coeff. de réflexion en puissance

$$R = \frac{|\langle P_r\rangle|}{\langle P_i\rangle} \quad \text{avec } \langle P_i\rangle = \langle u_i i_i\rangle = \left\langle \frac{u_i^2}{Z_1}\right\rangle \quad \left(= \frac{U_0^2}{2Z_1}\right)$$

et $\langle P_r\rangle = \langle u_r i_r\rangle = \left\langle r u_i \times \frac{u_r}{-Z_1}\right\rangle$

$= -r^2\langle u_i i_i\rangle$

$$\boxed{R = r^2 = \frac{(Z_2-Z_1)^2}{(Z_1+Z_2)^2}}$$

• Coeff. de transmission en puissance

$$T = \frac{\langle P_t\rangle}{\langle P_i\rangle}$$

$P_t = u_t i_t = t u_i \times \frac{u_t}{Z_2}$

$= t^2 u_i i_i \times \frac{Z_1}{Z_2}$

$= t^2 \frac{Z_1}{Z_2} \times u_i i_i$

$$\boxed{T = \frac{Z_1}{Z_2}t^2 = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1+Z_2)^2}}$$

avec $R + T = 1$ par conservat° de l'énergie à l'interface.

Ex 2 - câble coaxial alimenté par GBF

1 - Les condit° aux limites sont

$v(0,t) = e(t) = E_0 \cos \omega_0 t$ et $i(L,t) = 0$ $(\forall t)$

Réflexion à l'extrémité du câble → solut° en onde stationnaire

$v(x,t) = v_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$

↳ Déterminons $i(x,t)$ en premier lieu :

avec $-\frac{\partial i}{\partial x} = \Gamma \frac{\partial v}{\partial t} \rightarrow -\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma\omega\, v_0 \sin(\omega t+\varphi)\cos(kx+\psi)$

Intégrat° $i(x,t) = +\frac{\Gamma\omega}{k} v_0 \sin(\omega t + \varphi)\sin(kx+\psi) + f(t)$

avec $\frac{\omega}{k} = c = \frac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}$

avec $f(t) = 0$ voir cours ! ne représente pas une onde !

$$\frac{\Gamma\omega}{k} = \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} = \frac{1}{Z_c}$$

$$i(x,t) = \frac{v_0}{Z_c}\sin(\omega t+\varphi)\sin(kx+\psi)$$

Rque) ⚠ pour l'onde stationnaire $i(x,t) \neq \frac{v(x,t)}{Z_c}$!

cL :

- $v(0,t) = e(t) = E_0 \cos\omega_0 t = v_0 \cos(\omega t + \varphi)\cos\psi$ $(\forall t)$

↳ $\omega = \omega_0$ → la pulsat° est imposée par le géné. en régime forcé

$\varphi = 0$

$v_0 \cos\psi = E_0 \rightarrow v_0 = \frac{E_0}{\cos\psi}$

donc $v(x,t) = \frac{E_0}{\cos\psi}\cos\omega_0 t \cos(kx+\psi)$

- $i(L,t) = 0 = \frac{v_0}{Z_c}\sin\omega_0 t \sin(kL+\psi)$ $(\forall t)$

$kL + \psi = n\pi$

$\psi = n\pi - kL$

$\cos(kx+\psi) = \cos(kx - kL + n\pi)$
$= \cos(k(x-L) + n\pi) = (-1)^n \cos[k(x-L)]$

Le signe ⊖ pourra tjs être absorbé ds l'amplitude

$\cos\psi = \cos(n\pi - kL) = (-1)^n \cos kL$

donc $\boxed{v(x,t) = \frac{E_0}{\cos kL}\cos\omega_0 t \cos(k(x-L))}$

de m^ $\boxed{i(x,t) = \frac{E_0}{Z_c \cos kL}\sin\omega_0 t \sin(k(x-L))}$

Autre méthode ⇒ on considère 2 OPPH de sens opposés

$\underline{v}(x,t) = v_1 e^{j(\omega t - kx)} + v_2 e^{j(\omega t + kx)}$

et $\underline{i}(x,t) = \frac{v_1}{Z_c} e^{j(\omega t - kx)} - \frac{v_2}{Z_c} e^{j(\omega t + kx)}$

et on exploite les condit° aux limites

2 - Résonances : $\cos kL = 0 \Rightarrow k_n L = \frac{\pi}{2} + n\pi$

$k_n L = \frac{\pi}{2}(2n+1)$

$\rightarrow \omega_0 = \omega_n = \frac{(2n+1)\pi c}{2L}$

résonances lqe la pulsat° du géné est égale à celle d'1 mode propre