

**Sujet Mines 2016 PSI –  
plus complet**

**II. — Système élastique continu**

Les systèmes réels sont rarement discrets. Ainsi la poutre de structure d'une passerelle est déformable en tout point. Nous sommes donc en présence d'un problème de dynamique des milieux continus mais d'un point de vue pratique l'étude des systèmes continus se ramène finalement à celle liée aux systèmes discrets : c'est la discrétisation des systèmes continus.

On négligera dans la suite du problème l'action de la pesanteur.

On considère un solide homogène, de masse volumique  $\rho$  constante, qui a la forme d'un cylindre de section  $S$  et d'axe  $(O, \hat{u}_x)$  horizontal, le long duquel on étudie les petits mouvements de déformation.

Dans le domaine d'élasticité du matériau, la norme  $F$  de la force de traction permettant à un solide de longueur  $L$  de s'allonger de  $\Delta L$  est donnée par la loi de Hooke :  $F = ES \frac{\Delta L}{L}$  où  $E$  est une constante appelée module d'Young du matériau.

□ 10 — Quelle est l'unité d'un module d'Young ? On motivera sa réponse pour laquelle on utilisera une seule unité du système international.

□ 11 — On note  $X(x,t)$  le déplacement par rapport à la position de repos d'une section plane d'abscisse  $x$ . Calculer la variation relative de longueur d'une tranche élémentaire du cylindre de longueur au repos  $dx$  et en déduire la force de traction  $\vec{F}(x,t) = F(x,t)\hat{u}_x$  exercée par la partie « droite » (du côté des  $x$  croissants) sur la partie « gauche » (du côté des  $x$  décroissants) en fonction de  $E$ ,  $S$  et  $\frac{\partial X}{\partial x}$ . Écrire l'équation du mouvement de la tranche de longueur  $dx$  et en déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $X(x,t)$ .

Afin de prendre en compte le mouvement transverse de la passerelle on introduit un axe vertical dirigé selon le vecteur unitaire  $\hat{u}_y$  et on adopte le modèle de la corde. Dans ce modèle bidimensionnel, la passerelle est représentée à l'instant  $t$  par une ligne d'équation  $y(x,t)$  de masse linéique  $\mu$  uniforme.

En un point  $M(x,y)$  de la passerelle, on définit le vecteur unitaire tangent  $\hat{u}_\tau$  à la passerelle tel que  $\hat{u}_\tau(x,t) = \cos[\alpha(x,t)]\hat{u}_x + \sin[\alpha(x,t)]\hat{u}_y$ . Les déplacements sont contenus dans un plan vertical et sont de faible amplitude. On suppose donc qu'à chaque instant  $\alpha(x,t) \simeq \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \ll 1$ . Sous ces hypothèses, la longueur de la corde ne varie pas et chaque tronçon infinitésimal de la passerelle n'est déplacé que selon la verticale. En chaque point  $M(x,y)$  de la passerelle règne à chaque instant  $t$  une tension  $\vec{T}(x,t)$  portée par  $\hat{u}_\tau$ . Un tronçon de corde est représenté sur la figure 5.

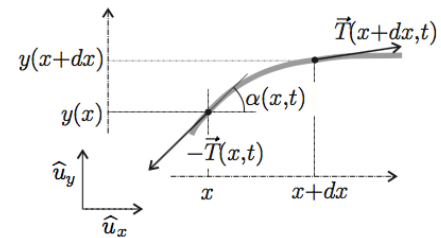


FIGURE 5 – Tronçon de corde élastique

□ 12 — En appliquant un théorème de mécanique à un tronçon de corde infinitésimal de longueur  $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , montrer que, sous les hypothèses effectuées, le module de la tension de la corde est indépendant de  $x$ . On le notera  $T_0$ .

□ 13 — En appliquant un théorème de mécanique à un tronçon de corde infinitésimal de longueur  $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , montrer que, sous les hypothèses effectuées, le module de la tension de la corde est indépendant de  $x$ . On le notera  $T_0$ .

□ 13 — Montrer alors que l'on peut écrire  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c_\ell^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  où l'on exprimera  $c_\ell$  en fonction de  $T_0$  et  $\mu$ .

### III. — Modèle de la poutre élancée

Dans un modèle couramment utilisé, on peut assimiler une passerelle à une poutre homogène de section rectangulaire de largeur  $b$  selon  $(O, \hat{u}_z)$  et de hauteur  $h$  selon  $(O, \hat{u}_y)$ . Pour des contraintes modérées, induisant un déplacement vertical petit devant les dimensions transversales de la poutre, c'est-à-dire  $y(x)$  très petit devant  $h$  ou  $b$ , on peut alors se placer dans une extension du modèle de la corde.

On considère une passerelle de section  $S$ , de masse volumique  $\rho$ , de module d'Young  $E$  et dont le moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe  $(O, \hat{u}_z)$  est  $I = \frac{1}{12}bh^3$ . L'écriture des contraintes conduit alors à une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + IE \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

□ 14 — On cherche des solutions sous la forme  $y(x,t) = f(x)g(t)$ . De quel type d'onde s'agit-il ? Sous quelles hypothèses de telles ondes apparaissent-elles dans ce genre de structure ?

□ 15 — Déterminer les équations différentielles vérifiées par  $f(x)$  et  $g(t)$ . En déduire que  $g(t)$  est une fonction périodique de pulsation  $\omega$  constante. Combien de constantes d'intégrations sont nécessaires à la détermination complète de la solution  $y(x,t)$  correspondant à la situation étudiée ?

□ 16 — Justifier précisément que l'on puisse écrire

$$f(x) = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) + C \operatorname{ch}(\beta x) + D \operatorname{sh}(\beta x)$$

où  $A, B, C$  et  $D$  sont des constantes d'intégration, on précisera l'expression de  $\beta$  en fonction des données du problème.

On se place dans l'hypothèse d'une passerelle de longueur  $L$  en appui simple à ses extrémités, les conditions aux limites s'écrivent  $y|_{x=0,t} = y|_{x=L,t} = 0$  et  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=0,t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=L,t} = 0$ .

□ 17 — Déterminer les pulsations propres  $\omega_n$  de vibration transversale d'une poutre en appui simple en fonction de  $L, E, I, \rho, S$  et d'un entier  $n$  caractérisant le mode.

□ 18 — Différents modes de vibrations d'une passerelle ont été représentés sur la figure 6, quels sont ceux correspondant à l'étude proposée dans cette section ? Identifier de façon argumentée pour chacun de ces modes, l'entier  $n$  le caractérisant.

La passerelle du Millennium Bridge est globalement une poutre en aluminium de 322 m de longueur, d'épaisseur  $h = 1,07$  m (42 pouces) et de largeur  $b = 4$  m (158 pouces). Elle repose sur 4 appuis en créant 3 travées solidaires de  $L_1 = 70$  m,  $L_2 = 144$  m et  $L_3 = 108$  m. On donne la masse volumique de l'aluminium  $\rho = 2700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et son module d'Young  $E = 69 \times 10^9 \text{ SI}$ .

□ 19 — Dans le cadre du modèle de la poutre sur appui simple, existe-t-il des modes de vibration transversale du Millennium Bridge susceptibles d'entrer en résonance avec un forçage par des piétons ? Discuter également de la possibilité d'une excitation résonante de certains modes de vibration latérale, c'est-à-dire dans le sens de la largeur  $b$ . On motivera ses réponses par une argumentation précise.

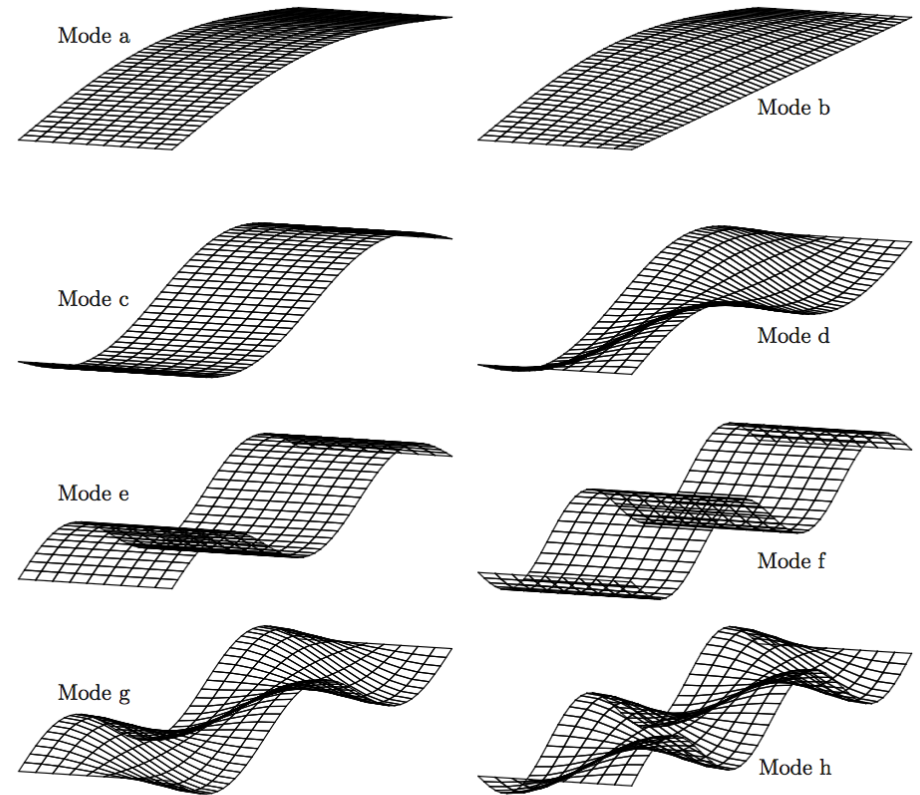


FIGURE 6 – Différents modes de vibration d'une passerelle en appui libre aux deux extrémités

**FIN DE LA PARTIE III**

**FIN DE L'ÉPREUVE**

## II. — Système élastique continu

□ 10 –  $[E] = \frac{[F][L]}{[S][\Delta L]} = \frac{[F]}{[S]}$ , donc le module d'Young est homogène à une pression, et a comme unité le pascal, de symbole Pa.

□ 11 – L'allongement vaut  $X(x+dx, t) - X(x, t) = \frac{\partial X}{\partial x} dx$ , soit une variation relative  $\frac{\partial X}{\partial x}$ . La force, d'après la loi de Hooke, vaut donc  $ES \frac{\partial X}{\partial x}$ ; l'orientation étant imposée par l'axe des  $x$ , cette force est une force de traction du côté  $x+dx$ .

Le solide est soumis à deux forces l'une en  $x$  (gauche/droite) et l'autre en  $x+dx$  (droite/gauche), la résultante vaut  $ES \left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)_{x+dx} - ES \left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)_x = ES \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} dx$ . En appliquant

la relation fondamentale de la dynamique, on obtient  $\rho S dx \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} dx$ , soit  $\frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0$ , i.e. une équation de d'Alembert de célérité  $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ .

□ 12 – On applique le théorème du centre d'inertie au petit élément de longueur  $d\ell$  et de masse élémentaire  $dm = \mu d\ell = \mu \sqrt{dx^2 + dy^2} \approx \mu dx$ :

$$\mu d\ell \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{u}_y = \mu ds \vec{g} + \vec{T}(x+dx, t) - \vec{T}(x, t) = \mu d\ell \vec{g} + \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} dx$$

et, en remarquant **que l'on néglige le poids** dans la suite de l'analyse, on obtient donc :

$$\mu d\ell \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{u}_y = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} dx.$$

On voit que la projection sur l'axe horizontal donne  $T_x(x, t) = T_x(x+dx, t) \approx T_0$  ou bien, comme dans l'équation précédente  $\frac{\partial T_x}{\partial x} = 0$ .

La projection suivant  $y$  donne  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -g + \frac{1}{\mu} \frac{\partial T_y}{\partial x} \approx \frac{1}{\mu} \frac{\partial T_y}{\partial x}$ .

On a supposé que le déplacement latéral  $y(x, t)$  était faible, donc l'angle  $\alpha$  que fait la tangente à la corde avec l'horizontale est faible lui aussi :  $\tan \alpha = \frac{T_y}{T_x} = \frac{\partial y}{\partial x} \approx \frac{T_y}{T_0} \approx \alpha \ll 1$ .

On a donc  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial T_y}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left( T_x \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left( T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

□ 13 – On reconnaît dans l'équation de d'Alembert de la question précédente la célérité de l'onde :  $c_\ell = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ .

## III. — Modèle de la poutre élastique

□ 14 – Il s'agit d'ondes stationnaires. Les solutions de ce type correspondent à des systèmes finis avec des conditions aux limites de type grandeur constante (nulle le plus souvent).

□ 15 –  $\rho S \ddot{f} + IE g f^{iv} = 0$  soit, sans précaution mathématique,  $\frac{\rho S}{IE} \ddot{f} = -\frac{f^{iv}}{f} = C^{te}$  puisque les deux variables  $x$  et  $t$  sont indépendantes. Si la constante est négative, l'équation en  $g$  est celle d'un oscillateur harmonique. Le fait que la constante soit négative apparaît dans la question suivante!

L'équation en  $f$  est d'ordre 4, il y a donc quatre constantes d'intégration à déterminer. L'équation en  $g$  est d'ordre 2, il y a donc deux autres constantes d'intégration à déterminer.  $y$  s'obtenant comme un produit, on peut regrouper deux constantes multiplicatives, il y a donc cinq constantes à déterminer, tout ceci pour UN mode (c'est que veut dire « correspondant à la situation étudiée »?).

□ 16 – L'équation caractéristique s'écrit  $r^4 = -C^{te}$ . Si la constante est négative, on peut poser  $r^4 = \gamma^2$  et supposer sans perte de généralités que  $\gamma > 0$ . On a donc  $r^2 = \pm \gamma$  et  $r = \pm \sqrt{\gamma}$  et  $r = \pm j\sqrt{\gamma}$ . En posant  $\sqrt{\gamma} = \beta$ , on a bien quatre solutions exponentielles  $\exp(\beta x)$ ,  $\exp(-\beta x)$ ,  $\exp(j\beta x)$  et  $\exp(j\beta x)$  qui, combinées conduisent bien à la somme proposée. En reportant dans l'équation obtenue en 15, on a  $\beta = \left( \frac{\rho S}{IE} \right)^{1/4} \sqrt{\omega}$ .



Si la constante est positive, on peut poser  $r^4 = -\gamma^2$ , soit  $r = \pm \frac{1+j}{\sqrt{2}}\beta$  et  $r = \pm \frac{1-j}{\sqrt{2}}\beta$ ; tous les termes possèdent des parties exponentielles ce qui, avec des valeurs aux limites nulles, conduit à la seule solution  $f=0$ . La constante est bien négative.

□ 17 – Les quatre équations aux limites donnent :

$$y(x=0) = 0, A + C = 0; \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{x=0} = 0, \beta^2(A - C) = 0; \text{ soit } A = C = 0.$$

$$y(x=L) = 0, B \sin(\beta L) + D \sinh(\beta L) = 0; \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{x=L} = 0, \beta^2(B \sin(\beta L) - D \sinh(\beta L)) = 0,$$

système de Cramer qui donne une solution non nulle si le déterminant est nul :

$$2 \sin(\beta L) \sinh(\beta L) = 0 \text{ soit } \beta_n L = n\pi. \text{ Et donc } \omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{IE}{\rho S}}$$

□ 18 – On doit avoir aux extrémités une ligne horizontale ce qui est toujours le cas, et donc un noeud aux extrémités. La dérivée seconde nulle aux extrémités est également vérifiée dans tous les cas. On détermine  $n$  en comptant les ventres. Les cas qui ne correspondent pas à l'étude sont ceux de la déformation à deux dimensions de la plaque  $y = f(x, z)$ .

figure	a	b	c	d	e	f	g	h
n	1		2		3	4		
étude	Oui	Non	Oui	Non	Oui	Oui	Non	Non

□ 19 – Les fréquences des modes sont en Hz, les longueurs de travée en m.

longueur	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
70	0,50	2,0	4,5	8
144	0,12	0,47	1,06	1,9
108	0,21	0,84	1,9	3,4

Il y a donc résonance possible (fréquence proche de 2 Hz) pour le mode 2,3 ou 4 selon la travée.

Dans le cadre d'une vibration latérale, on intervient le rôle de  $b$  et  $h$ .

longueur	$n=1$	$n=2$
70	1,9	7,5
144	0,44	1,76
108	0,79	3,1

La vibration latérale suppose une excitation latérale, alternance droite gauche de la marche, donc à 1 Hz. Ce qui correspond à peu près à la fréquence due au premier mode de la travée de 108 m pour la vibration latérale, c'est ce mode qui a posé problème.

## Sujet Centrale PSI 2013 – progressif mais plutôt long !!! 😊 😊 😊

### I vibrations d'une corde de piano fixée à ses deux extrémités

#### I.A – mise en équation du mouvement transversal d'une corde de piano sans raideur

##### I.A.1)

- corde sans raideur : les actions entre deux portions de corde adjacentes se réduisent à leur point de contact à la force de tension tangente à la corde en ce point.
- dans l'hypothèse des petits mouvements, les déplacements de la corde par rapport à sa position d'équilibre sont suffisamment petits pour qu'à tout instant et en tout point l'angle entre la tangente à la corde en mouvement et la tangente à la corde à l'équilibre soit petit devant 1.

##### I.A.2)

On considère le segment de corde situé entre les abscisses  $x$  et  $x + \delta x$  à l'équilibre. Sa masse et son accélération ont pour expressions

$$\delta m = \mu \delta x; \vec{a} = \frac{\partial v_y}{\partial t} \vec{e}_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y$$

Il est soumis aux forces de tension  $\vec{T}(x + \delta x)$  et  $-\vec{T}(x)$  à ses deux extrémités, où  $\vec{T} = T_x \vec{e}_x + T_y \vec{e}_y$ . Le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$\mu \frac{\partial v_y}{\partial t} \vec{e}_y = \mu \delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y = \vec{T}(x + \delta x) - \vec{T}(x) = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} \delta x$$

En projection sur les axes  $x$  et  $y$

$$0 = \frac{\partial T_x}{\partial x}; \mu \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial T_y}{\partial x}$$

Pour une corde sans raideur, la tension en tout point est colinéaire à la corde

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

et dans l'hypothèse des petits mouvements

$$\left| \frac{T_y}{T_x} \right| \ll 1$$

soit

$$T_x \approx \|\vec{T}\|$$

La projection sur  $x$  du principe fondamental s'intègre en

$$T_x(x, t) = f(t) \approx \|\vec{T}\| = T_0$$

Par conséquent

$$T_y = T_x \frac{\partial y}{\partial x} = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$$

puis en dérivant par rapport au temps

$$\frac{\partial T_y}{\partial t} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} = T_0 \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

Les deux relations entre  $v_y$  et  $T_y$  sont

$$\mu \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial T_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial T_y}{\partial t} = T_0 \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

### I.A.3)

On repart des équations

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x}; \quad T_y = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$$

qui conduisent en éliminant  $T_y$  à l'équation de d'Alembert

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}; \quad c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

où  $c$  représente la célérité des ondes transversales sur la corde.

La propagation des ondes électromagnétiques dans le vide et des ondes de pression de faible amplitude dans un gaz parfait sont régies par la même équation.

### I.A.4)

On convertit la tension exprimée sous forme d'une masse équivalente  $m = 85 \text{ kg}$  en tension  $T_0 = mg = 850 \text{ N}$ . Pour la corde d'acier

$$\mu = s\rho = \frac{\pi d^2}{4} \rho = 7,4 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1}$$

D'où

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = \sqrt{\frac{4mg}{\pi \rho d^2}} = 3,4 \times 10^2 \text{ m s}^{-1}$$

## I.B – modes propres d'une corde de piano sans raideur, fixée aux deux extrémités. Position du marteau sur la corde

### I.B.1)

Une onde stationnaire est une onde pour laquelle les dépendances spatiale et temporelle sont séparées :  $s(x, t) = f(x) \cdot g(t)$  en notation réelle.

Le report de la forme précédente dans l'équation de d'Alembert conduit à l'équation

$$f''(x)g(t) = \frac{1}{c^2} f(x)g''(t)$$

soit en utilisant la propriété de séparation des variables

$$\frac{f''}{f} = \frac{1}{c^2} \frac{g''}{g} = cste$$

L'équation différentielle en  $f$  s'écrit

$$f'' - cste f = 0$$

et admet pour solution des fonctions harmoniques ( $cste < 0$ ), affine ( $cste = 0$ ) ou hyperboliques ( $cste > 0$ ). Comme la corde est fixée à ses deux extrémités, à tout instant  $y(0, t) = y(L, t) = 0$ , soit  $f(0) = f(L) = 0$ , condition qui ne peut être vérifiée, si  $f$  n'est pas identiquement nulle, que par les solutions harmoniques :

$$f(x) = f_0 \cos(kx + \psi)$$

où  $f_0$  est une constante arbitraire, et  $k$  et  $\psi$  dépendent des conditions aux limites et sont exprimées à la question suivante.

L'équation différentielle en  $g$  s'écrit alors

$$\frac{g''}{g} = c^2 \frac{f''}{f} = -(kc)^2; \quad g'' + (kc)^2 g = 0$$

et admet pour solution générale

$$g(t) = g_0 \cos(\omega t + \varphi); \quad \omega = kc$$

où  $g_0$  est une constante arbitraire.

Les solutions de l'équation de d'Alembert en ondes stationnaires compatibles avec les conditions aux limites sont de la forme

$$y(x, t) = y_0 \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi); \quad \omega = kc$$

### I.B.2)

Les modes propres de la corde vibrante sont les ondes stationnaires susceptibles d'exister sur la corde en l'absence d'excitation extérieure. Chaque mode propre a une dépendance temporelle sinusoïdale. Les fréquences propres de la corde sont les fréquences de ses modes propres.

Les conditions aux limites de la corde s'écrivent  $y(0, t) = y(L, t) = 0$  à tout instant, soit, comme le terme  $y_0 \cos(\omega t + \varphi)$  n'est pas identiquement nul

$$\cos(\psi) = \cos(kL + \psi) = 0$$

on en déduit

$$\psi = \frac{\pi}{2}[\pi]; \quad kL = n\pi; \quad k_n = n \frac{\pi}{L}$$

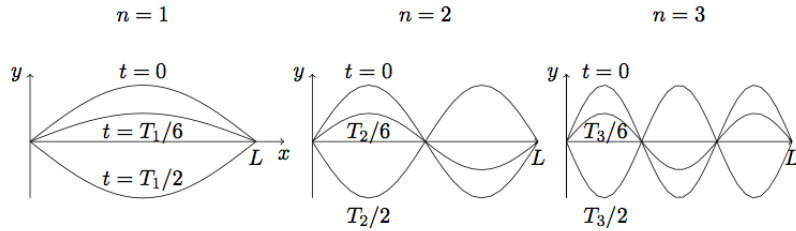
où  $n$  est un entier non nul. Les fréquences propres ont pour expression

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{k_n c}{2\pi} = \frac{nc}{2L}$$

Si on choisit  $\psi = -\pi/2$ ,  $\cos(kx + \psi) = \sin(kx)$ , et les modes propres sont de la forme

$$y_n(x, t) = y_{0,n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi n c t}{L} + \varphi\right)$$

À un instant où le terme temporel est maximal, l'allure de la corde pour les trois premiers modes est la suivante



### I.B.3)

a) La largeur  $a$  du marteau influence l'amplitude des harmoniques via le facteur

$$\frac{\sin(n\pi a/L)}{n\pi a/L}$$

Qualitativement ce facteur prend des valeurs notables si

$$n \frac{\pi a}{L} < \pi$$

et devient négligeable au-delà.

La largeur  $a$  du marteau intervient en limitant l'ordre de grandeur du rang maximal des harmoniques présents dans la vibration de la corde à

$$n < n_{\max} = \frac{L}{a}$$

En particulier, plus la taille du marteau est petite, plus le spectre est riche en harmoniques. La fréquence caractéristique au-delà de laquelle les harmoniques ne sont pas excités par le marteau a pour expression

$$f = n f_1 = \frac{L}{a} f_1$$

correspondant à une longueur d'onde minimale

$$\lambda_{\min} = \frac{c}{f_{\max}} = \frac{ca}{L f_1} = 2a$$

Qualitativement le marteau n'excite que les modes de longueurs d'onde supérieures à sa largeur.

Pour une corde de longueur  $L = 65$  cm, de fréquence fondamentale  $f_1 = 262$  Hz et un marteau de largeur  $2a = 2$  cm

$$n_{\max} \approx 65 ; f_{\max} = 17 \text{ kHz}$$

Les modes excités sont situés dans le spectre audible.

La taille des marteaux résulte d'un compromis :

- une augmentation de la taille du marteau conduit à une augmentation de l'amplitude des vibrations ( $y$  est proportionnel à  $a$ ), donc à un son plus puissant
- une diminution de la taille de marteau permet d'augmenter le nombre de modes excités, donc favorise la richesse spectrale du son émis et sa qualité.

La taille du marteau indiquée correspond à ce compromis, car les modes excités couvrent pratiquement l'ensemble du spectre audible : diminuer sa taille conduirait à une diminution de l'amplitude du son sans amélioration audible de sa richesse.

b) La position  $x_0$  du point d'attaque intervient dans l'expression de la vibration par le facteur multiplicatif

$$\frac{\sin(n\pi x_0/L)}{n\pi x_0/L}$$

Pour supprimer l'harmonique de rang  $n$  il suffit que  $x_0$  soit choisi de manière à annuler ce facteur. Pour éviter de supprimer des harmoniques de rang inférieur à  $n$ , il faut prendre la première annulation du sinus-cardinal

$$\frac{n\pi x_0}{L} = \pi ; x_0 = \frac{L}{n}$$

### I.C – Conséquences sur la conception des cordes d'un piano

#### I.C.1)

D'après la question, la fréquence fondamentale de la corde vérifie  $f = c/2L$ , soit

$$L = \frac{c}{2f}$$

En l'absence d'autre information, il faut supposer que la célérité est la même pour les différentes cordes (ce qui est critiquable, en pratique la tension est pratiquement identique mais la masse linéique varie). Dans cette hypothèse, le produit  $Lf$  se conserve et, connaissant  $f_{D_{o4}} = 262$  Hz et  $L_{D_{o4}} = 65$  cm, on détermine les valeurs

$$L_{La0} = \frac{f_{D_{o4}}}{f_{La0}} L_{D_{o4}} = 6,1 \text{ m} ; L_{D_{o8}} = \frac{f_{D_{o4}}}{f_{D_{o8}}} L_{D_{o4}} = 4,1 \text{ cm}$$

#### I.C.2)

On reprend la relation précédente en exprimant la célérité  $c = \sqrt{T_0/\mu}$

$$f = \frac{c}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

En augmentant la masse linéique des cordes, il est possible, à tension et longueur fixées, de diminuer leur fréquence fondamentale, et ainsi produire les notes graves sans augmentation de la longueur des cordes.

On peut envisager de diminuer la tension des cordes pour produire les notes graves (procédé utilisé pour l'accord du piano et des instruments à corde). Cependant il y a un risque de mauvaise répartition des contraintes sur le cadre du piano.

#### I.C.3)

La masse linéique de la corde filée a pour expression

$$\mu = s_{Fe} \rho_{Fe} + s_{Cu} \rho_{Cu} = \frac{\pi}{4} (D^2 \rho_{Fe} + ((D+2e)^2 - D^2) \rho_{Cu}) = 89,2 \text{ g m}^{-1}$$

On en déduit pour le La 0 de fréquence  $f = 28$  Hz

$$L = \frac{1}{2f} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = 1,74 \text{ m}$$

## I.D – Prise en compte de la raideur : dispersion et inharmonicité

### I.D.1)

a) L'équation aux dimensions s'écrit

$$[\Gamma] = \frac{L^4 \text{Pression} L}{L^2} = \text{Pression} L^3 = \text{Force} L = \text{Couple}$$

b) Le principe fondamental de la dynamique est inchangé par rapport à la question I.1), et conduit aux deux équations scalaires

$$0 = \frac{\partial T_x}{\partial x}; \quad \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x}$$

La première équation s'intègre comme précédemment en

$$T_x = f(t) = T_0$$

c) Le mouvement de la corde se fait dans le plan  $Oxy$ , donc le vecteur rotation du segment de corde de longueur  $\delta x$ , de barycentre  $G$  considéré est dirigé selon  $\vec{e}_z$ . La distance maximale des points de ce segment à l'axe  $Gz$  est  $\delta x/2$ , donc le moment d'inertie du segment par rapport à  $Gz$  vérifie

$$J_{Gz} \propto \delta m \delta x^2 = \mu \delta x^3 \left( J_{Gz} = \frac{\delta m \delta x^2}{12} \right)$$

Il s'agit donc d'une quantité du troisième ordre en  $\delta x$ . Le moment cinétique barycentrique vérifie la même propriété et sera donc négligeable si on se limite au premier ordre dans l'expression du théorème du moment cinétique.

Le moment en  $G$  des actions s'appliquant sur le segment de corde à ses extrémités  $A$  d'abscisse  $x$  et  $B$  d'abscisse  $x + \delta x$  a pour expression

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{GB} \wedge \vec{T}_d(x + \delta x) + \vec{\Gamma}(x + \delta x) + \vec{GA} \wedge -\vec{T}_g(x) - \vec{\Gamma}(x); \quad \vec{GB} = -\vec{GA} = \frac{\delta x \vec{e}_x + \delta y \vec{e}_y}{2}$$

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{\delta x e_x + \delta y e_y}{2} \wedge (2T_0 \vec{e}_x + (T_y(x + \delta x) + T_y(x)) \vec{e}_y) + \vec{\Gamma}(x + \delta x) - \vec{\Gamma}(x) = \left( \frac{\delta x}{2} (T_y(x + \delta x) + T_y(x)) - \delta y T_0 + \Gamma(x + \delta x) - \Gamma(x) \right) \vec{e}_z$$

soit à l'ordre 1 en  $\delta x$

$$\vec{\mathcal{M}} = \left( T_y - \frac{\partial y}{\partial x} T_0 + \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right) \delta x \vec{e}_z$$

Ce moment est d'ordre 1 en  $\delta x$ , donc le moment cinétique d'ordre 3 est bien négligeable. Le théorème du moment cinétique barycentrique s'écrit alors  $\vec{\mathcal{M}} = \vec{0}$ , soit

$$T_y - \frac{\partial y}{\partial x} T_0 + \frac{\partial \Gamma}{\partial x} = 0; \quad T_y = T_0 \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma}{\partial x}$$

d) On déduit du principe fondamental de la dynamique et de l'expression précédente de  $T_y$  l'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $y(x, t)$

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}$$

soit, d'après l'expression de  $\Gamma(x, t)$

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\pi r^4}{4} E \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}; \quad \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + E \frac{\pi r^4}{4} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

### I.D.2)

a) L'expression proposée pour  $y(x, t)$  conduit aux relations

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 y; \quad \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = k^4 y$$

soit en reportant dans l'équation des mouvements de la corde

$$\omega^2 = \frac{T_0}{\mu} k^2 + E \frac{\pi r^4}{4\mu} k^4 = c^2 k^2 \left( 1 + E \frac{\pi r^4}{4T_0} k^2 \right)$$

b) Les conditions aux limites en  $x = 0$  et  $x = L$  sont inchangées par rapport à la première partie, donc  $k$  vérifie toujours la relation

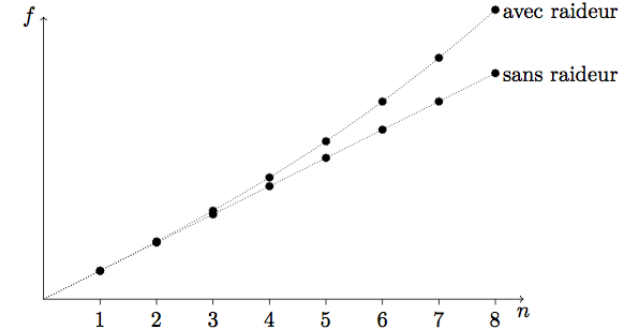
$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

Par conséquent, d'après la question précédente

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{ck_n}{2\pi} \sqrt{1 + E \frac{\pi r^4}{4T_0} E k_n^2} = n \frac{c}{2L} \sqrt{1 + E \frac{\pi^3 r^4}{4T_0 L^2} n^2} = n \frac{c}{2L} \sqrt{1 + B n^2}; \quad B = \frac{\pi^3 E r^4}{4T_0 L^2}$$

Il faut savoir que les cordes d'un piano à queue sont plus longues que celles d'un piano droit, donc la valeur de  $B$  est plus petite pour un piano à queue, et l'effet de la raideur des cordes est plus faible : la déviation des fréquences des harmoniques par rapport à une série arithmétique est plus petite.

c)



Les fréquences propres de la corde sans raideur forment une suite arithmétique. Celles de la corde avec raideur sont plus élevées et s'en écartent d'autant plus que leur rang  $n$  est élevé.

d) Application numérique :  $B = 3,75 \times 10^{-4}$ .

Pour les harmoniques de rang inférieur à 20, le facteur correctif  $Bn^2$  est petit devant 1, et de manière approchée

$$f_n = n \frac{c}{2L} \sqrt{1 + B n^2} = f_n^0 \sqrt{1 + B n^2} \approx f_n^0 \left( 1 + \frac{B n^2}{2} \right)$$



On en déduit l'inharmonicité

$$i_n = \frac{f_n - f_n^0}{f_n^0} = \frac{Bn^2}{2}$$

e) On cherche à déterminer le rang  $n$  à partir duquel

$$\frac{f_n}{f_n^0} = \sqrt{1 + Bn^2} > 2^{1/12}; \quad n > \sqrt{\frac{2^{1/6} - 1}{B}} = 18$$

L'écart sera supérieur au demi-ton à partir de l'harmonique de rang 18.

## II Couplage entre une corde de piano et la table d'harmonie : le rôle du chevalet

### II.A – Impédance caractéristique d'une corde vibrante

#### II.A.1)

La vitesse de déplacement transversal associée à une onde progressive sinusoïdale se propageant selon les  $x$  croissants est de la forme

$$v_y(x, y) = v_0^+ \cos(\omega t - kx)$$

D'après la question I.A.2

$$\frac{\partial T_y}{\partial x} = \mu \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\mu \omega v_0^+ \sin(\omega t - kx)$$

relation qui s'intègre en

$$T_y = -\frac{\mu \omega}{k} v_0^+ \cos(\omega t - kx) = -\mu c v_y$$

$$\frac{T_y}{v_y} = -\mu c = -Z_C$$

$$Z_C = \text{masse} \times \text{temps}$$

#### II.A.2)

Si l'onde se propage selon les  $z$  décroissants

$$v_y = v_y^- \cos(\omega t + kx)$$

Le changement de signe dans le terme de propagation se traduit par un changement de signe de l'impédance caractéristique

$$\frac{T_y^-}{v_y^-} = \mu c = Z_C$$

### II.B – Couplage corde-chevalet

#### II.B.1)

Cette condition à la limite  $x = L$  traduit le couplage entre la corde et l'ensemble chevalet, table d'harmonie. De point de vue énergétique, la puissance transmise par la corde au chevalet a pour expression

$$P = \vec{T}_y(L, t) \cdot \vec{v}(L, t) = -T_y(L, t)v_y(L, t) = Rv_y(L, t)^2 > 0$$

donc il existe un transfert énergétique net de la corde vers le chevalet et la table d'harmonie, qui va permettre à la table d'harmonie de rayonner de l'énergie sonore grâce à son excitation par la corde.

Je ne vois pas d'autre argument simple justifiant la cohérence de ce modèle.

#### II.B.2)

Les vibrations de la corde sont décrites par l'équation de d'Alembert et les conditions aux limites en  $x = 0$  et  $x = L$ .

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \quad y(0, t) = 0; \quad \frac{T_y(L, t)}{v_y(L, t)} = T_0 \frac{\frac{\partial y}{\partial x}(L, t)}{\frac{\partial y}{\partial t}(L, t)} = -R$$

en utilisant la relation

$$T_y = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$$

pour relier  $T_y$  et  $y$ .

On considère dans un premier temps l'équation de d'Alembert et la condition en  $x = 0$

$$s^2 \exp(st)f(x) = c^2 \exp(st)f''(x); \quad f(0) \exp(st) = 0$$

soit les équations

$$f'' - \left(\frac{s}{c}\right)^2 f = 0; \quad f(0) = 0$$

L'équation différentielle en  $f$  admet la solution générale

$$f(x) = a \exp\left(\frac{sx}{c}\right) + b \exp\left(-\frac{sx}{c}\right)$$

les constantes d'intégration  $a$  et  $b$  étant liées par la condition

$$f(0) = a + b = 0; \quad b = -a$$

soit, en considérant l'extension aux arguments complexes de la fonction sinh

$$f(x) = a \left( \exp\left(\frac{sx}{c}\right) - \exp\left(-\frac{sx}{c}\right) \right) = A \sinh\left(\frac{sx}{c}\right)$$

La condition à la limite  $x = L$  s'écrit alors

$$-R = T_0 \frac{\frac{\partial y}{\partial x}(L, t)}{\frac{\partial y}{\partial t}(L, t)} = \frac{T_0 s \cosh(sL/c)}{cs \sinh(sL/c)} = \frac{T_0}{c \tanh(sL/c)}$$

soit, comme  $T_0 = \mu c^2$

$$\tanh\left(\frac{sL}{c}\right) = -\frac{T_0}{Rc} = -\frac{\mu c}{R} = -\frac{Z_C}{R} = -\frac{1}{r}$$

La forme équivalente donnée dans l'énoncé découle de la relation

$$\tanh(x) = \frac{\exp(2x) - 1}{\exp(2x) + 1}$$



### II.B.3)

On recherche  $s$  sous la forme  $s = \alpha + j\omega$ , soit, comme  $r$  est réel et  $r > 1$

$$\exp\left(\frac{2L\alpha}{c}\right) \exp\left(j\frac{2L\omega}{c}\right) = \frac{r-1}{r+1} \in \mathbb{R}^+$$

On en déduit les deux équations

$$\exp\left(j\frac{2L\omega}{c}\right) = 1 ; \exp\left(\frac{2L\alpha}{c}\right) = \frac{r-1}{r+1}$$

La première équation impose les valeurs de  $\omega$

$$\frac{2L\omega}{c} = 2\pi n ; \omega = n\frac{\pi c}{L} = 2\pi f_n^0$$

Les solutions constituent un ensemble de modes propres de fréquence identiques aux fréquences propres de la corde vibrante non couplée au chevalet.

D'autre part, comme  $r > 1$ ,  $0 < (r-1)/(r+1) < 1$

$$\alpha = \ln\left(\frac{r-1}{r+1}\right) \frac{c}{2L} = \ln\left(\frac{r-1}{r+1}\right) f_0 < 0$$

La dépendance temporelle de  $y(x, t)$  est de la forme

$$\exp(st) = \exp(\alpha t) \exp(j\omega t)$$

Comme  $\alpha < 0$ ,  $\exp(st)$  est amortie exponentiellement avec le temps, ce qui est cohérent avec la perte d'énergie de la corde au profit de l'ensemble chevalet, table d'harmonie.

### II.B.4)

On reporte  $s = \alpha + j\omega$  dans l'expression de la solution, en développant  $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$

$$y(x, t) = \frac{A}{2} \left( \exp\left(\frac{\alpha x}{c}\right) \exp\left(j\frac{\omega x}{c}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha x}{c}\right) \exp\left(-j\frac{\omega x}{c}\right) \right) \exp(\alpha t) \exp(j\omega t)$$

en regroupant les exponentielles complexes

$$y(x, t) = \frac{A}{2} \left( \exp\left(\frac{\alpha x}{c}\right) \exp\left(j\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)\right) - \exp\left(-\frac{\alpha x}{c}\right) \exp\left(j\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \right) \exp(-\alpha t)$$

et en notant  $F(u) = (A/2) \exp(j\omega u)$

$$y(x, t) = \exp(\alpha t) \left( \exp\left(\frac{\alpha x}{c}\right) F\left(t + \frac{x}{c}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha x}{c}\right) F\left(t - \frac{x}{c}\right) \right)$$

Il s'agit de la superposition de deux ondes progressives se propageant en sens inverses, amplifiées ( $\alpha < 0$ ) dans le sens de la propagation et atténuées temporellement. Ce n'est donc plus une onde stationnaire, puisque les dépendances spatiales et temporelles ne sont plus séparées.

### II.B.5)

Le temps caractéristique d'atténuation de l'onde est

$$\tau = -\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{f_0 \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right)}$$

Ce temps est d'autant plus court que la fréquence fondamentale de la corde est plus élevée, donc que le son émis est plus aigu. L'atténuation des sons aigus est donc plus rapide que celle des sons graves, ce qui est cohérent avec les constatations expérimentales.

La première amélioration possible pour le modèle serait la modélisation de l'ensemble chevalet, table d'harmonie par un oscillateur amorti, pour tenir compte des deux sens de transfert énergétique possible, et non du seul sens corde  $\rightarrow$  chevalet. En effet quand on excite la table d'harmonie (en la frappant par exemple, l'expérience étant encore plus démonstrative avec une guitare), elle transmet de l'énergie aux cordes qui se mettent à vibrer. L'amortissement de l'oscillateur modélisant la table rend compte du rayonnement d'énergie sonore par cette dernière.

La seconde amélioration possible consisterait à modéliser l'ensemble des cordes du piano, qui sont en réalité couplées par l'intermédiaire du cadre du piano et de la table d'harmonie (principe d'émission de sons harmoniques par un piano : enfoncer sans la jouer une note pour permettre la vibration de la corde associée, puis jouer et relâcher immédiatement une note située par exemple une octave au-dessus ou au-dessous : la corde libérée est mise en vibration)

Modéliser mécaniquement la table d'harmonie, qui se comporte comme une surface vibrante et possède donc différents modes propres de vibration, ainsi que ses interactions avec les cordes (excitation de la table d'harmonie) et interaction avec l'air qui l'entoure (rayonnement de puissance sonore).

Pour avoir une idée de ce type de modélisation, on peut consulter par exemple les thèses de G. Derveaux (2002) pour une guitare, de J. Chabassier (2012) pour un piano, en accès libre aux adresses <http://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00002585/> et <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00662740/>.

## III Corrosion des cordes de piano

### III.A – L'acier : constituant essentiel des cordes de piano

#### III.A.1) Le fer $\alpha$

a) Une maille élémentaire est le plus petit motif permettant de reconstruire le cristal par translations successives.

b) La maille conventionnelle du fer  $\alpha$  contient :

- un atome à chacun des 8 sommets, partagé entre 8 mailles, soit 1 atome en propre ;
  - un atome au sommet de la maille, appartenant en propre à la maille.
- soit au total deux atomes par maille conventionnelle.

c) Dans la maille conventionnelle du fer  $\alpha$  les atomes sont tangents le long de la grande diagonale de la maille, donc

$$4R_{Fe} = \sqrt{3}a_\alpha$$

$$R_{Fe} = \frac{\sqrt{3}}{4}a_\alpha = 124 \text{ pm}$$