

Partie I - Utilisation des métaux et contrôle non-destructif

CCINP PSI 2016

Structure cristallographique du fer et masse volumique

Q1 – 8 atomes aux coins appartenant à 8 cubes et 1 atome au centre appartenant en propre au centre soit $8/8 + 1 = 2$ atomes par maille. Les atomes se touchent le long de la grand diagonale, on a donc $a\sqrt{3} = 4R_{\text{Fe}}$.

Q2 – $\rho_{\text{Fe}} = \frac{m}{V} = \frac{2M_{\text{Fe}}}{N_A a^3}$, $n = 3$.

Paramètres électriques d'une bobine et courants de Foucault

Q8 – $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Le champ magnétique variable crée un champ électrique qui crée un courant d'après la loi d'Ohm. Soit un plan contenant l'axe Oz et le point courant M, ce plan est un plan de symétrie pour \vec{B} , vecteur axial, et donc d'antisymétrie pour \vec{j} , vecteur polaire. \vec{j} est donc perpendiculaire à ce plan donc orthoradial et porté par \vec{e}_θ .

Q9 – D'après $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$, l'unité de j est A/m^2 .

Équation de Maxwell-Faraday $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Soit \mathcal{C} , un cercle dans un plan perpendiculaire à l'axe Oz, de centre sur l'axe, parcouru dans le sens trigonométrique, $\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{\Sigma}$, $d\vec{\Sigma}$ a comme direction Oz d'après la règle du tire-bouchon. $\vec{E} = E\vec{e}_\theta$ et E est indépendant de θ par symétrie de révolution autour de l'axe Oz. On a donc $E2\pi r = -\frac{dB}{dt}\pi r^2$ et $E = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$. $\vec{j}_e = -\frac{\gamma r}{2} \frac{dB}{dt} \vec{e}_\theta$

Q10 – La puissance volumique est $\frac{j^2}{\gamma}$ et donc $P_{\text{c.F.}}(t) = \frac{j^2}{\gamma} 2\pi R_t H_t e = \frac{\pi R_t^3 H_t e \gamma}{2} \left(\frac{dB}{dt}\right)^2$ en grandeur instantanée. $P_{\text{c.F.}} = \frac{\pi R_t^3 H_t e \gamma}{2} (\mu_0 n \omega I_{\text{eff}})^2$ en grandeur moyenne, par définition d'une valeur efficace, qui est bien de la forme attendue avec $C = \frac{\pi R_t^3 H_t e \gamma}{2} (\mu_0 n)^2$. $P = R'_\Omega I_{\text{eff}}^2$, soit $R'_\Omega = R_\Omega + C\omega^2$. On a $R'_\Omega > R_\Omega$ et $R'_\Omega = f(\omega)$.

Q11 – Dans le cas a) la distribution n'est pas modifiée (fissure parallèle à \vec{j}), la puissance est quasiment inchangée, sur une coupe radiale du tube, la surface utile de passage du courant est diminuée de la section droite de la fissure. Dans le cas b) la fissure est perpendiculaire à \vec{j} , elle va modifier la structure du courant. En « oubliant » cette modification de structure, sur une coupe radiale du tube, la surface utile de passage du courant est diminuée de la section latérale de la fissure nettement plus importante. La fissure empêchant le courant de circuler, la puissance va diminuer.

Q12 – Loi de Lenz : « l'induction produit des effets qui s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance ». Dans le cas présent, les courants induits sont tels qu'ils créent un champ magnétique qui s'oppose à la variation du champ magnétique imposé; la variation du champ va donc diminuer et donc $L'_H < L_H$.

Diffusion d'un champ magnétique dans un matériau conducteur semi-infini

Q13 – cours ... En partant de l'équation de Maxwell-Ampère $\text{rot}(\vec{H}) = \vec{j}$, en remplaçant \vec{j} par $\gamma \vec{E}$ (loi d'Ohm locale), en tenant compte de $\vec{B} = \mu \vec{H}$, en prenant le rotationnel à l'aide de $\text{rot}(\text{rot}(\vec{B})) = \text{grad}(\text{div}(\vec{B})) - \Delta \vec{B}$, et en tenant compte de $\text{div}(\vec{B}) = 0$, on obtient $\Delta \vec{B} = \mu \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ qui est une équation de diffusion avec un coefficient de diffusion $D = \frac{1}{\mu \gamma}$ de dimension $L^2 T^{-1}$. On rencontre le même type d'équation dans le cadre de la diffusion de particules ou de l'énergie (conduction thermique).

Q14 – Réécrit en complexe, on obtient $\frac{d^2 \underline{B}}{dx^2} = \mu_0 \gamma j \omega \underline{B}$. On pose, en cohérence avec l'analyse dimensionnelle, $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ (la présence du 2 permet de simplifier la suite). L'équation caractéristique est alors $r^2 = 2j \frac{1}{\delta^2}$, soit $r = \pm \sqrt{2} e^{j\pi/4} \frac{1}{\delta}$ ou encore $r = \pm \frac{1+j}{\delta}$. La solution est donc $\underline{B} = \underline{A}_1 \exp(-jx/\delta) \exp(-x/\delta) + \underline{A}_2 \exp(+jx/\delta) \exp(x/\delta)$.

En absence de courants surfaciques, on a conservation de H tangentiel. On a donc $H_y(x=0^+) = H_0 \cos(\omega t)$. Remarque : le programme dit « Utiliser les relations de passage fournies ».

On peut utiliser l'approximation matériau semi-infini, si l'épaisseur e du matériau est suffisamment grande : $e \gg \delta$. Dans ce cas $H(e)$ fini impose $\underline{A}_2 = 0$. On a donc, en $x=0^+$, $\mu H_0 = \underline{A}_1$. Soit $\underline{B}(x) = \mu H_0 \exp(-j \frac{x}{\delta}) \exp(-\frac{x}{\delta})$, $\vec{B}(x, t) = \mu H_0 \exp(-j \frac{x}{\delta}) \exp(-\frac{x}{\delta}) \exp(j\omega t) \vec{e}_y$ et enfin $\vec{B}(x, t) = \mu H_0 \cos(\omega t - \frac{x}{\delta}) \exp(-\frac{x}{\delta}) \vec{e}_y$

Q15 – La puissance volumique moyenne vaut $\gamma E_{\text{eff}}^2 = \gamma \frac{\mu \omega}{2\gamma} H_0^2 \exp(-2 \frac{x}{\delta})$. On intègre sur le volume du matériau $P = \int_0^\infty \frac{\mu \omega}{2} H_0^2 \exp(-2 \frac{x}{\delta}) S dx = -\frac{\mu \omega \delta}{2 \times 2} S H_0^2 [\exp(-2 \frac{x}{\delta})]_0^\infty = \frac{\mu \omega \delta}{2 \times 2} S H_0^2$, soit en remplaçant δ : $P = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu \omega}{2\gamma}} S H_0^2$

Q16 – La dépendance en fréquence est en \sqrt{f} , ce que l'on peut vérifier avec le cuivre : $\frac{1,5}{0,2} = 7,5$, $\frac{41}{5,7} = 7,2$ et $\sqrt{\frac{100}{2}} = 7,1$ valeurs égales au vu de la précision des données. On a donc $x = 5 \times 7,1 = 35 \mu\text{m}$ et $y = 5,1 \cdot 10^{-5} / 7,1 = 7,2 \cdot 10^{-6} \text{WA}^{-2}$.

Partie II – Célérité de l'onde ultrasonore

E3A 2016 Physique et Modélisation

B1. L'air étant assimilé à un gaz parfait de masse molaire M_a , à la température T_0 supposée (dans un premier temps) constante, retrouver l'expression de la pression p de l'air en fonction de μ , M_a , T_0 et R . En déduire que l'approximation acoustique se traduit aussi par la relation $\mu_1 \ll \mu_0$.

Pour un gaz parfait :

$$P = \frac{nRT_0}{V} = \frac{mRT_0}{VM_a} = \frac{\mu RT_0}{M_a}$$

Avec $p = P_0 + p_1$, il vient :

$$\mu = \frac{(P_0 + p_1)M_a}{RT_0} = \frac{P_0 M_a}{RT_0} + \frac{p_1 M_a}{RT_0} = \mu_0 + \mu_1$$

Ainsi, si $p_1 \ll P_0$, alors $\mu_1 \ll \mu_0$

B2. Donner l'expression de la masse $dm(t)$ présente dans le volume $d\tau$ à l'instant t . De même pour la masse $dm(t + dt)$ présente dans le volume $d\tau$ à l'instant $t + dt$.

$$\begin{aligned} dm(t) &= \mu(x, t) d\tau \\ dm(t + dt) &= \mu(x, t + dt) d\tau \end{aligned}$$

B3. Exprimer la masse δm_e entrant dans $d\tau$ pendant la durée dt par la surface située en x . Même question pour la masse δm_s sortant de $d\tau$ pendant la durée dt par la surface située en $x + dx$.

Soit $D_m = \mu v S$ le débit massique du fluide dans le cylindre :

$$\begin{aligned} \delta m_e &= D_m(x) dt = \mu(x, t) v(x, t) S dt \\ \delta m_s &= D_m(x + dx) dt = \mu(x + dx, t) v(x + dx, t) S dt \end{aligned}$$

B4. Montrer que, dans le cas de l'approximation acoustique, la conservation de la masse pour le système étudié se traduit par la relation (R1) :

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0. \quad (R1)$$

Effectuons un bilan de masse sur le système ouvert compris entre x et $x + dx$, pendant la durée dt :

$$dm(t + dt) = dm(t) + \delta m_e - \delta m_s$$

Soit, en remplaçant et en factorisant :

$$(\mu(t + dt, x) - \mu(t, x)) d\tau = (\mu(x, t) v(x, t) - \mu(x + dx, t) v(x + dx, t)) S dt$$

On reconnaît des développements de Taylor :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} dt d\tau = - \frac{\partial(\mu v)}{\partial x} dx S dt$$

Or $d\tau = S dx$

$$\frac{\partial(\mu_0 + \mu_1)}{\partial t} = - \frac{\partial(\mu_0 v)}{\partial x} - \frac{\partial(\mu_1 v)}{\partial x}$$

Or μ_0 est constante, et $v = v_1$ infiniment petit d'ordre 1. Le terme $\mu_1 v_1$ est alors un infiniment petit d'ordre 2, que l'on néglige dans l'approximation acoustique :

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = - \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x}$$

B5. Que devient l'expression précédente, dans le cas unidimensionnel et dans le cadre de l'approximation acoustique ? On appelle (R2) la relation ainsi obtenue.

L'opérateur gradient se simplifie en 1D cartésien :

$$(\mu_0 + \mu_1) \frac{\partial v_1}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (P_0 + p_1)$$

En négligeant le terme d'ordre 2, et avec P_0 constante :

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = - \frac{\partial p_1}{\partial x}$$

B6. On considère que, pour des ondes ultrasonores se propageant dans des fluides, l'hypothèse adiabatique est adéquate. Justifier succinctement et sans calculs, la raison de cette hypothèse.

La perturbation engendrée par une onde sonore **est rapide**, ainsi la transformation thermodynamique subie par une particule de fluide atteinte par l'onde sonore s'effectue sans transfert thermique (qui n'ont pas le temps d'avoir lieu) : on la modélise alors par une adiabatique.

B7. Établir, dans le cas de l'approximation acoustique, la relation liant μ_1 à μ_0 , p_1 et χ_s . Cette relation constitue la relation (R3).

$$\begin{aligned} \chi_s &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial P} = \frac{1}{\mu_0 + \mu_1} \frac{\mu_1}{p_1} \\ \mu_1 &= \chi_s (\mu_0 + \mu_1) p_1 \end{aligned}$$

Soit, en ne conservant que les termes d'ordre 1 :

$$\mu_1 = \mu_0 \chi_s p_1$$

B8. En utilisant les relations (R1), (R2) et (R3), montrer que la surpression p_1 vérifie l'équation de d'Alembert à une dimension :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0.$$

On donnera l'expression de la célérité c de l'onde ultrasonore en fonction de μ_0 et χ_s .

Dérivons (R2) par rapport à x :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} = -\mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \mu_1}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2}$$

En utilisant (R3), on déduit :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \mu_0 \chi_s \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$$

$$\Rightarrow \chi_s = \frac{M_a}{\gamma \mu_0 R T_0} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{M_a / \gamma R T_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M_a}}$$

B10. Sur l'intervalle envisagé de température (voir figure 2) l'évolution de la célérité des ultrasons est fonction de la température θ mesurée en degré Celsius suivant la relation : $c(\theta) = a \cdot \theta + b$. Déterminer graphiquement les valeurs de a et de b .

$$c(10^\circ) = 337 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ et } c(30^\circ) = 348.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\Rightarrow a = 0.59 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{deg}^{-1} \\ \Rightarrow b = 331 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

B9. L'air étant assimilé à un gaz parfait de coefficient γ (rapport des capacités thermiques à pression et volume constant), exprimer χ_s en fonction de γ et p_0 et en déduire que l'expression de la célérité c est :

$$c(T_0) = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M_a}}$$

L'évolution étant adiabatique réversible pour l'air considéré comme gaz parfait, la loi de Laplace, dont on prend le logarithme, donne :

$$pV^\gamma = \text{cste} \Rightarrow \ln(p) + \gamma \ln(V) = \text{cste}$$

Différencions :

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

$$\text{Or } \mu = \frac{m}{V} \Rightarrow \ln(\mu) = \ln(m) - \ln(V) \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{dV}{V}$$

D'où :

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\mu}{\mu} \Rightarrow \frac{p_1}{p_0} = \gamma \frac{\mu_1}{\mu_0} = \gamma \chi_s p_1$$

Donc :

$$\chi_s = \frac{1}{\gamma p_0}$$

Or la loi des gaz parfaits donne :

$$p_0 = \frac{nRT_0}{V} = \frac{mRT_0}{M_a V} = \frac{\mu_0 RT_0}{M_a}$$

B11. Sur l'intervalle envisagé de température de la figure 2, linéariser la relation obtenue à la question B9. Déterminer les expressions de a et de b en fonction de c_0 et $T_{273} = 273 \text{ K}$. Déduire de b les valeurs numériques de c_0 et γ , sachant que dans le cas de l'air, $M_a = 29,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Sur l'intervalle considéré, $T_0 = T_{273} + dT$ avec $10\text{K} < dT < 30\text{K} \ll T_{273}$

On peut donc écrire :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma R}{M_a}} \sqrt{T_{273} + dT} = \sqrt{\frac{\gamma R T_{273}}{M_a}} \sqrt{1 + \frac{dT}{T_{273}}} = c_0 \sqrt{1 + \frac{dT}{T_{273}}}$$

Soit, en effectuant un DL à l'ordre 1 :

$$c \approx c_0 \left(1 + \frac{dT}{2T_{273}} \right) = \frac{c_0}{2T_{273}} dT + c_0$$

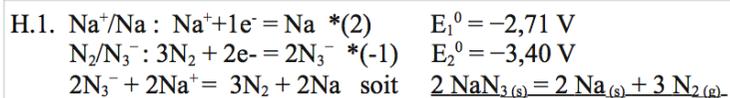
$$a = \frac{c_0}{2T_{273}} \\ b = c_0 = 331 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\gamma = \frac{c_0^2 M_a}{RT_{273}} = 1,4$$

Partie III – Chimie d'un airbag

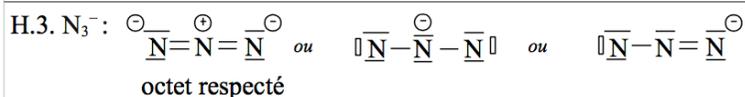
E3A 2018 MP

H. Formation du gaz



H.2. Deux électrons sont échangés donc : donc $K = 10^{\frac{E_1^0 - E_2^0}{0,03}}$

AN : $K = 10^{\frac{-2,71 + 3,40}{0,03}}$ soit $K = 10^{23} > 10^4$, la réaction sera quantitative.



H.4. Deux moles de NaN_3 donnent 3 moles de N_2 .

Donc $n_{\text{N}_2} = \frac{3}{2} n_{\text{NaN}_3}$ soit $n_{\text{N}_2} = \frac{3}{2} \frac{m_{\text{NaN}_3}}{(M_{\text{Na}} + 3M_{\text{N}})}$ AN : $n_{\text{N}_2} = 1,5 \text{ mol}$

H.5. Loi des gaz parfaits : $V = \frac{n_{\text{N}_2} RT}{P}$

volume occupé pour $P = P_{\text{atm}} = 1 \text{ bar}$. AN : $n_{\text{N}_2} = 37,4 \text{ L}$

Le sac de 35 L est donc rempli.

Autre approche : le sac est rempli si lorsque $V = 35 \text{ L}$, $P > P_{\text{atm}}$.

H.6. Une mole de NaN_3 produit une mole de Na . Puis 10 moles de Na

produisent une mole de N_2 . Donc $n_{\text{N}_2}' = \frac{n_{\text{NaN}_3}}{10}$ soit $n_{\text{N}_2}' = \frac{m_{\text{NaN}_3}}{10(M_{\text{Na}} + 3M_{\text{N}})}$ AN :

$n_{\text{N}_2}' = 0,1 \text{ mol}$

H.7. Il s'agit d'une réaction de sécurité car $\text{Na}(\text{s})$ est à éliminer car dangereux car c'est un réducteur puissant qui réagit très violemment avec l'eau.

H.8. $\text{Na}_2\text{O} + \text{H}_2\text{O} = 2\text{Na}^+ + 2\text{HO}^-$

I. Cinétique de décomposition du pentaoxyde d'azote

I.1. En notant $c = [\text{N}_2\text{O}_5]$, la vitesse de réaction vérifie :

$$v = -\frac{dc}{dt} = kc \text{ donc } \frac{dc}{dt} + kc = 0$$

I.2. Solution de l'équation : $c = Ae^{-kt}$ or $c(0) = [\text{N}_2\text{O}_5]_0 = A$

$$\text{donc } [\text{N}_2\text{O}_5] = [\text{N}_2\text{O}_5]_0 e^{-kt}$$

I.3. Loi des gaz parfaits : $P_{\text{N}_2\text{O}_5} = \frac{n_{\text{N}_2\text{O}_5} RT}{V}$ soit $P_{\text{N}_2\text{O}_5} = [\text{N}_2\text{O}_5] RT$

donc : $P_{\text{N}_2\text{O}_5} = RT [\text{N}_2\text{O}_5]_0 e^{-kt}$ soit $P_{\text{N}_2\text{O}_5} = P_0 e^{-kt}$ car T est constante.

I.4.

(mol)	$\text{N}_2\text{O}_5 \rightarrow 2\text{NO}_2 + \frac{1}{2}\text{O}_2$		
État initial	n_0	0	0
État intermédiaire	$n_0 - \xi$	2ξ	$\frac{1}{2}\xi$

Donc $n_{\text{tot}} = n_0 + 3/2\xi$ or $[\text{N}_2\text{O}_5]V = n_0 - \xi = n_0 e^{-kt}$ donc $\xi = n_0(1 - e^{-kt})$

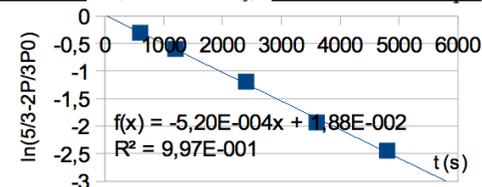
donc $n_{\text{tot}} = (5 + 3e^{-kt})n_0/2$

Or $P = \frac{n_{\text{tot}} RT}{V} = \frac{(5 + 3e^{-kt})n_0 RT}{2V}$ soit $P = \frac{P_0}{2}(5 + 3e^{-kt})$

I.5. $P = \frac{P_0}{2}(5 + 3e^{-kt})$ donc $\frac{5}{3} - \frac{2P}{3P_0} = e^{-kt}$ donc $\ln\left(\frac{5}{3} - \frac{2P}{3P_0}\right) = -kt$

Pour obtenir une droite il faut tracer $\ln(5/3 - 2P/3P_0)$ en fonction du temps.

t (s)	P (bar)	$\ln(5/3 - 2P/3P_0)$
0	0,46	0,00
600	0,64	-0,30
1200	0,77	-0,60
2400	0,94	-1,19
3600	1,05	-1,93
4800	1,09	-2,44



On obtient bien une droite (coef de corrélation = 0,997) ce qui valide l'ordre 1 de la réaction.

I.6. De l'équation de la régression linéaire on en déduit que $k = 5,2 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

I.7. Soit k' la constante de vitesse à la nouvelle température.

95 % du réactif soit transformé au bout de 30 minutes si : $0,05 n_0 = n_0 e^{-k' t_{30}}$

soit $k' = \frac{-\ln(0,05)}{t_{30}}$

D'après la loi d'Arrhénius : $k = A e^{-E_a/RT}$ donc $\frac{k'}{k} = e^{\frac{E_a}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'} \right)}$

soit $\ln\left(\frac{k'}{k}\right) = \frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'}\right)$ donc $T' = \left[\frac{1}{T} - \frac{R}{E_a} \ln\left(\frac{-\ln(0,05)}{k t_{30}}\right)\right]^{-1}$

AN : $T' = 451 \text{ K} = 178^\circ \text{ C}$

I.8. Notons $t' = 3 \text{ min } 20 \text{ s}$ et k'' la constante de vitesse à 200° C . Si au bout de t' ,

$\frac{2}{3}$ de N_2O_5 a réagit : $\frac{n_0}{3} = n_0 e^{-k'' t'}$ donc $k'' = \frac{\ln(3)}{t'}$

AN : $k'' = 5,5 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$

Le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ vérifie : $\frac{n_0}{2} = n_0 e^{-k'' t_{1/2}}$ soit $t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{k''}$

AN : $t_{1/2} = 126 \text{ s} = 2 \text{ min } 6 \text{ s}$

Le temps de demi-réaction est indépendant de la pression initiale. Un doublement de cette dernière ne changerait donc pas $t_{1/2}$.