

IV Communication

IV.1 - Communication par ondes radio dans l'eau de mer

Q16)

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

Q17) Équation locale de conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$$

La loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, dans l'eau de caractéristiques supposées uniformes donne

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\gamma \vec{E}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \text{div } \vec{E}$$

et enfin en utilisant la loi de Maxwell-Gauss dans l'eau

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \frac{\rho}{\epsilon} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} ; \tau = \frac{\epsilon}{\gamma}$$

Q18)

$$\tau = \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\gamma} = \frac{75 \times 8,85 \times 10^{-12}}{5} = 1,33 \times 10^{-10} \text{ s}$$

la période d'une onde de fréquence $f = 1 \text{ MHz}$ vaut $T = 1 \times 10^{-6} \text{ s} \gg \tau$. L'équation différentielle vérifiée en tout point par la densité volumique de charge a pour solution

$$\rho(t, M) = \rho(0, M) e^{-t/\tau}$$

donc suite à une perturbation la charge volumique s'annule avec une constante de temps τ très faible devant la période de l'onde : on peut donc considérer qu'à tout instant la densité volumique de charge est nulle.

On peut également remarquer qu'une densité volumique de charge en régime établi de la forme $\rho = \rho_0 e^{i(\omega t - kz)}$ vérifie nécessairement $\rho_0 = 0$: en régime établi à la fréquence f la charge volumique est nulle.

Q19) équation de Maxwell-Ampère

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left(\gamma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

- courant de conduction : $\gamma \vec{E}$
- courant de déplacement $\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

En ordre de grandeur pour des phénomènes de pulsation ω

$$\frac{\epsilon \left\| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|}{\left\| \gamma \vec{E} \right\|} = \frac{\epsilon \omega \left\| \vec{E} \right\|}{\gamma \left\| \vec{E} \right\|} = \frac{\epsilon \omega}{\gamma}$$

Par conséquent le courant de déplacement devient supérieur au courant de conduction si

$$\omega > \omega_c = \frac{\gamma}{\epsilon} = \frac{1}{\tau} = 7,5 \times 10^9 \text{ rad s}^{-1}$$

Q20) Si $\omega \ll \omega_c$, le terme de courant de déplacement est négligeable devant le terme de courant de conduction, et l'équation de Maxwell-Ampère se simplifie en

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E}$$

L'équation de Maxwell-Faraday conduit à la relation

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \text{rot} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial(\text{rot } \vec{B})}{\partial t}$$

L'équation de Maxwell-Gauss dans le conducteur $\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon = 0$ et l'équation de Maxwell-Ampère simplifiée conduisent, en supposant la conductivité du milieu indépendante du temps, à la relation

$$-\Delta \vec{E} = -\frac{\partial(\mu_0 \gamma \vec{E})}{\partial t} = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Soit l'équation de diffusion du champ électrique

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \gamma} \Delta \vec{E} = D \Delta \vec{E}$$

Q21) Pour l'onde électromagnétique donnée dans l'énoncé

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E}; \quad \vec{\Delta} \vec{E} = -k^2 \vec{E}$$

On reporte ces expressions dans l'équation de diffusion

$$i\omega \vec{E} = -\frac{k^2}{\mu_0 \gamma} \vec{E}$$

d'où la relation de dispersion ($\vec{E} \neq \vec{0}$)

$$k^2 = -i\mu_0 \gamma \omega = e^{-i\pi/2} \mu_0 \gamma \omega$$

On en déduit

$$k = \pm e^{-i\pi/4} \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} = \pm (1-i) \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}} = \pm \frac{1-i}{\delta}$$

L'onde se propageant selon les z croissants, on ne conserve que la racine de partie réelle positive :

$$k = \frac{1-i}{\delta}$$

Pour $f = 1,0$ MHz, $\gamma = 5$ S m⁻¹ et $\mu_0 = 12,6 \times 10^{-7}$ H · m⁻¹

$$\delta = 22 \text{ cm}$$

Q22) L'équation de Maxwell-Faraday $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ s'écrit pour l'onde électromagnétique en notation complexe, en notant que le vecteur d'onde $\vec{k} = k \vec{e}_z$

$$-i\vec{k} \wedge \vec{E} = -\omega \vec{B}; \quad \vec{B} = \frac{k \vec{e}_z \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k}{\omega} E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{e}_y = \frac{1-i}{\delta \omega} E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{e}_y$$

Le calcul du vecteur de Poynting (grandeur quadratique) nécessite le passage en notation réelle. Comme le terme de propagation s'écrit

$$\exp(i(\omega t - kz)) = \exp\left(i\left(\omega t - \frac{(1-i)z}{\delta}\right)\right) = \exp\left(\frac{-z}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right)$$

les champs réels ont pour expressions

$$\vec{E} = E_0 \exp\left(\frac{-z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{e}_x$$

$$\vec{B} = \frac{E_0 \sqrt{2}}{\delta \omega} \exp\left(\frac{-z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \vec{e}_y = \frac{E_0}{\delta \omega} \exp\left(\frac{-z}{\delta}\right) \left(\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right) \vec{e}_y$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\sqrt{2} E_0^2}{\mu_0 \delta \omega} \exp\left(\frac{-2z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \vec{e}_z = \dots \\ &\dots \frac{E_0^2}{\mu_0 \delta \omega} \exp\left(\frac{-2z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \left(\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

puis

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \frac{E_0^2}{\mu_0 \delta \omega} \exp\left(\frac{-2z}{\delta}\right) \vec{e}_z = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \delta \omega} \exp\left(\frac{-2z}{\delta}\right) \vec{e}_z$$

Q23) D'après la relation précédente

$$\left\| \langle \vec{\Pi}(z, t) \rangle \right\| = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \delta \omega} \exp\left(\frac{-2z}{\delta}\right)$$

donc

$$\frac{\left\| \langle \vec{\Pi}(z, t) \rangle \right\|}{\left\| \langle \vec{\Pi}(z+L, t) \rangle \right\|} = \frac{\exp(-2(z+L)/\delta)}{\exp(-2z/\delta)} = \exp\left(\frac{-2L}{\delta}\right)$$

avec $\delta = 0,22$ m et $L = 10$ m, on obtient

$$\frac{\left\| \langle \vec{\Pi}(z, t) \rangle \right\|}{\left\| \langle \vec{\Pi}(z+L, t) \rangle \right\|} = \exp(-91) = 3 \times 10^{-40}$$

Q24) L'application numérique précédente montre qu'il est irréaliste d'envisager la communication avec le sous-marin par ondes électromagnétiques, à cause de l'atténuation très rapide de l'amplitude de ces ondes avec la distance de propagation dans la mer.

IV.2 - Communication par ondes acoustiques

2.1) Équation de propagation de l'onde acoustique

Q25) Dans l'approximation acoustique :

- les modifications des champs au repos par l'onde acoustique sont considérées comme des petites perturbations (perturbation du premier ordre) ce qui permet de linéariser les équations physiques par rapport à ces perturbations
- la vitesse particulaire est faible devant la célérité de l'onde, ce qui permet de négliger l'accélération convective dans le calcul de l'accélération des particules de fluide

On suppose d'autre part que l'évolution d'une particule fluide est adiabatique et réversible, donc isentropique, le fluide étant supposé parfait.

Q26)

- équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

- équation d'Euler (principe fondamental de la dynamique pour une particule fluide soumise aux seules forces de pression, en projection sur l'axe z)

$$\rho \vec{a} = -\vec{\text{grad}} P \rightarrow \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

- compressibilité du fluide en évolution isentropique

$$\chi_S = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_S \rightarrow \chi_{S0} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\mu}{p}$$

Q27) L'expression de la compressibilité isentropique permet d'exprimer μ

$$\mu = \rho_0 \chi_{S0} p$$

soit en reportant dans l'équation de conservation de la masse une équation couplée entre p et v

$$\rho_0 \chi_{S0} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

L'équation d'Euler linéarisée constitue une seconde équation couplée entre p et v , qui conduit à l'équation vérifiée par la surpression acoustique

— dérivation par rapport au temps de l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_0 \chi_{S0} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0 \rightarrow \rho_0 \chi_{S0} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial z} = 0$$

— dérivation par rapport à z de l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 0 \rightarrow \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0$$

— utilisation du théorème de Schwartz

$$\rho_0 \chi_{S0} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0$$

Q28) On obtient une équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \rho_0 \chi_{S0} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

de célérité

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_{S0}}}$$

Pour l'eau de mer, $\rho_0 = 1,02 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\chi_S = 4,10 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$, et

$$c_0 = 1,55 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2.2) Relation de passage à l'interface d'un milieu stratifié

Q29) La norme du vecteur d'onde ne dépend que du milieu de propagation, identique pour l'onde incidente et l'onde réfléchie, donc $\|\vec{k}_i\| = \|\vec{k}_r\|$.

$$k_i = \frac{\omega}{c_1}; \quad k_t = \frac{\omega}{c_2}$$

Q30) La continuité de la pression à l'interface $P(x, y, 0^-, t) = P(x, y, 0^+, t)$ s'écrit $P_0 + p_i(x, y, 0^-, t) + p_r(x, y, 0^-, t) = P_0 + p_t(x, y, 0^+, t)$, soit en exprimant les surpressions et en passant en notation complexe

$$p_{i0} \exp(i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{OP})) + p_{r0} \exp(i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{OP})) = p_{t0} \exp(i(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{OP}))$$

puis, après division par le facteur $\exp(i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{OP}))$

$$p_{i0} + p_{r0} \exp(i(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{OP}) = p_{t0} \exp(i(\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \vec{OP})$$

Q31) Les fonctions exponentielles étant linéairement indépendantes, la relation précédente est vérifiée pour p_{i0} , p_{r0} et p_{t0} non nuls et un point P de l'interface arbitraire si ces fonctions sont identiques, donc si leurs arguments le sont :

$$0 = (\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{OP} = (\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \vec{OP}$$

en notant que $1 = \exp(0)$

Q32) On exprime les vecteurs d'onde et le vecteur $\vec{OP} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ dans les relations précédentes :

$$(k_{i,x} - k_{r,x})x - k_{r,y}y = 0; \quad (k_{i,x} - k_{t,x})x - k_{t,y}y = 0$$

Ces relations doivent être vérifiées pour tout x et y , d'où les relations

$$k_{r,y} = k_{t,y} = 0; \quad k_{r,x} = k_{t,x} = k_{i,x}$$

Les vecteurs d'onde des ondes réfléchie et transmise sont contenus dans le plan d'incidence (\vec{k}_i, \vec{e}_z) car leurs composantes selon \vec{e}_y sont nulles

D'après la figure 5

$$k_{i,x} = k_i \sin \theta_i = \frac{\omega}{c_1} \sin \theta_i; \quad k_{r,x} = k_r \sin(\pi + \theta_r) = -\frac{\omega}{c_1} \sin \theta_r; \quad k_{t,x} = k_t \sin \theta_t = \frac{\omega}{c_2} \sin \theta_t$$

d'où les relations

$$\sin \theta_i = -\sin \theta_r; \quad \theta_r = -\theta_i; \quad \frac{\sin \theta_t}{c_2} = \frac{\sin \theta_i}{c_1}$$

Qui constituent les lois de Snell-Descartes pour la réflexion et la réfraction.

2.3) Propagation d'une onde acoustique dans un milieu inhomogène

Q33) La grandeur $\sin(\theta(z))/c(z)$ se conserve au cours de la propagation, où θ représente l'angle entre la verticale (normale aux plans horizontaux interfaces entre les couches stratifiées) et le rayon acoustique.

Q34) Quand l'angle est émis quasi verticalement ($\theta_0 \ll 1$), et que la vitesse est une fonction croissante de la profondeur z , la relation de conservation qui s'écrit

$$\sin \theta(z) = \sin \theta_0 \frac{c(z)}{n_0}$$

entraîne que $\sin \theta(z)$ est une fonction croissante de la profondeur : les rayons s'écartent progressivement de la verticale. Ils restent confondus avec la verticale s'ils sont émis exactement selon la verticale.

Q35) D'après la relation de conservation précédente, $\sin \theta$ et θ atteignent leurs valeurs maximales à la profondeur à laquelle la célérité est maximale. Pour la fosse des Mariannes cette profondeur correspond au fond de la fosse, donc pour atteindre ce point, il faut vérifier la relation

$$\frac{\sin \theta_0}{c_0} = \frac{\sin \theta(z_{\max})}{c(z_{\max})} \leq \frac{1}{c(z_{\max})}$$

soit, puisque sinus est une fonction croissante entre 0 et $\pi/2$, la condition sur l'angle d'émission

$$\theta_0 \leq \arcsin \left(\frac{c_0}{c(z_{\max})} \right) = \arcsin \left(\frac{1545}{1650} \right) = 69,45^\circ$$

Q36) Dans le triangle rectangle formé par une longueur élémentaire de rayon d'angle θ avec la verticale et les déplacements vertical dz et horizontal dx associés (figure 7) on peut écrire

$$\tan(\theta) = \frac{dx}{dz}$$

Q37) La relation de conservation $\sin\theta_0/c_0 = \sin\theta(z)/c(z)$, soit $\sin\theta(z) = \sin\theta_0 c(z)/c_0 = \sin\theta_0/n(z)$ s'écrit

$$\tan^2 \theta(z) = \frac{\sin^2 \theta(z)}{1 - \sin^2 \theta(z)} = \frac{\frac{\sin^2 \theta_0}{n^2(z)}}{1 - \frac{\sin^2 \theta_0}{n^2(z)}}$$

Q38) La combinaison des équations des deux questions précédentes conduit à l'équation différentielle souhaitée :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{1}{\tan^2 \theta(z)} = \frac{1 - \frac{\sin^2 \theta_0}{n^2(z)}}{\frac{\sin^2 \theta_0}{n^2(z)}} = \frac{n^2(z)}{\sin^2 \theta_0} - 1$$

Q39) Entre 0 et 1000 m de profondeur on peut approximer la vitesse de propagation du son par une loi affine : $c(z) = a + bz$, soit avec $c(0) = 1545 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $c(1000 \text{ m}) = 1480 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$c = \left(1545 + \frac{1480 - 1545}{1000}z(\text{m})\right) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = (1545 - 6,5 \times 10^{-2}z(\text{m})) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Q40) Pour les profondeurs supérieures à 2000 m l'approximation affine est réaliste (mais pas réellement entre 1000 m et 2000 m). On relève sur le graphique $c(2000 \text{ m}) = 1490 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $c(11000 \text{ m}) = 1650 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ d'où

$$c = \left(1490 + \frac{1650 - 1490}{9000}(z(\text{m}) - 2000)\right) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = (1454 + 1,78 \times 10^{-2}z(\text{m})) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Q41) On peut transformer le rapport qui apparaît dans l'expression de $R(z)$:

$$\frac{1}{n^2} \frac{dn}{dz} = -\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{d}{dz} \left(\frac{c(z)}{c_0}\right) = -\frac{1}{c_0} \frac{dc}{dz}$$

Ce qui permet d'écrire

$$R(z) = \left| \frac{c_0}{\frac{dc}{dz} \sin \theta_0} \right|$$

Dans l'approximation affine $c_i(z) = a_i + b_i z$ de la vitesse de propagation sur chacun des domaines de profondeur $0 \leq z \leq 1000 \text{ m}$ et $1000 \text{ m} < z < 11000 \text{ m}$, le rayon de courbure est donc une constante égale à

$$R_i = \left| \frac{c_0}{b_i \sin \theta_0} \right|$$

Q42) L'angle d'émission doit dans tous les cas être inférieur à l'angle maximal d'émission $\theta_{\max} = 69,45^\circ$.

Q43) Pour l'angle maximal d'émission $\sin\theta_{\max} = 0,94$. On calcule pour cette valeur, et pour $c_0 = 1545 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $b_1 = -6,5 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ et $b_2 = 1,78 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$

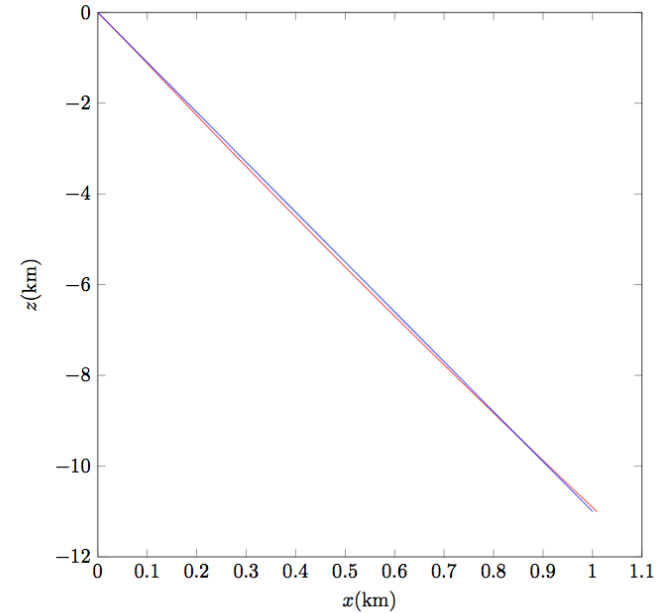
$$R_1 = 25 \text{ km} \gg 1 \text{ km} ; R_2 = 92 \text{ km} \gg 10 \text{ km}$$

Ces valeurs sont très supérieures aux distances verticales sur lesquelles l'onde acoustique se propage : on peut donc considérer que sa trajectoire est pratiquement rectiligne et que θ est une constante sur toute la propagation. On calcule alors avec une profondeur $\Delta z = 11 \text{ km}$ et un déplacement horizontal $\Delta x = 1 \text{ km}$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right) = 5,2^\circ \ll \theta_{\max}$$

Valeur pour laquelle l'hypothèse de rayons rectilignes est aisément vérifiée : $\sin\theta = 0,091$, d'où $R_1 = 2,6 \times 10^2 \text{ km}$ et $R_2 = 9,5 \times 10^3 \text{ km}$

Remarque : L'équation différentielle (Q38) peut être résolue numériquement par rapport à la variable x pour z variant de 0 à 11000 m, par exemple par la méthode d'Euler. On obtient pour $\theta = 5,2^\circ$ les courbes ci-dessous (en rouge la trajectoire tenant compte des variations de l'indice, en bleu la trajectoire dans l'hypothèse rectiligne) qui montrent la validité de l'approximation rectiligne dans ce problème.



Mines. Physique II. PSI 2020. La lévitation acoustique. ¹

Q01. Dans le cadre de l'approximation acoustique, les fluctuations de pression, de masse volumique et de vitesse sont respectivement supposées très faibles devant la pression ambiante, la masse volumique de l'air au repos et la vitesse du son dans l'air. **Les calculs sont faits à l'ordre 1 en p_1 , μ_1 et v_1 .**

Q02. On considère que la vitesse n'a qu'une composante selon Oz et est une fonction de t et de z , très généralement la vitesse peut varier au cours du temps et/ou du fait d'un déplacement, c'est à dire :

$$dv_1 = \frac{\partial v_1}{\partial t} dt + \frac{\partial v_1}{\partial z} dz \Rightarrow \frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial z} v_1}_{\text{ordre 2 en } v_1} \Rightarrow \boxed{\frac{dv_1}{dt} \approx \frac{\partial v_1}{\partial t}}$$

Q03. On applique un principe fondamental de la dynamique (PFD) à la particule de fluide de masse $\delta m = \mu_0 d\tau$. Cette particule est soumise à son poids et à la résultante des forces de pression :

$$\mu_0 d\tau \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = \left(-\overrightarrow{\text{grad}P} \right) d\tau + \mu_0 d\tau \vec{g} = \underbrace{\left(-\overrightarrow{\text{grad}P_0} + \mu_0 \vec{g} \right)}_{=\vec{0}} d\tau + \left(-\overrightarrow{\text{grad}p_1} \right) d\tau$$

Le premier terme du second membre caractérise l'**équilibre hydrostatique** et il se simplifie, en conclusion en projection sur l'axe vertical :

$$\boxed{\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial z}} \quad (1)$$

Q04. Conformément à la demande de l'énoncé, on **donne** les relations linéarisées sans les établir :

— conservation de la masse : $\boxed{\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial \mu_1}{\partial t} = 0} \quad (2)$;

— évolution isentropique : $\boxed{\mu_1 = \mu_0 \chi_s p_1} \quad (3)$.

Q05. On élimine la fluctuation de masse volumique en reportant (3) dans (2) pour obtenir le nouveau système :

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial z} \quad (1) \quad \text{et} \quad \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial z} + \mu_0 \chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t} = 0 \quad (2')$$

On dérive alors (1) et on élimine la surpression grâce à (2') :

$$\mu_0 \frac{\partial v_1^2}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p_1}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{\chi_s} \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \mu_0 \chi_s \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = 0}$$

Il s'agit de l'**équation de d'Alembert** à une dimension avec $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$.

Q06. À une dimension l'équation de la diffusion thermique s'écrit : $\mu_0 c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$. Par analyse dimensionnelle, on en déduit que le phénomène de diffusion agit sur une longueur L en une durée $\tau_{\text{diff}} \approx \frac{\mu_0 c_p L^2}{\kappa}$.

Dans le cas présent, les fluctuations de température pourraient apparaître à l'échelle de l'onde acoustique, c'est à dire de la longueur d'onde, en conséquence :

$$\tau_{\text{diff}} \approx \frac{\mu_0 c_p \lambda^2}{\kappa} \approx \frac{\mu_0 c_p}{\kappa} \times \left(\frac{c}{f} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{\tau_{\text{diff}}}{T} \approx \frac{\mu_0 c_p c^2}{\kappa} \times \frac{1}{f}$$

$\frac{\mu_0 c_p c^2}{\kappa}$ est nécessaire homogène à une fréquence et on la note f_0 , c'est à dire :

$$\frac{\tau_{\text{diff}}}{T} \approx \frac{f_0}{f} \quad \text{avec} \quad f_0 = \frac{\mu_0 c_p c^2}{\kappa}$$

Pour que l'hypothèse d'adiabaticité soit vérifiée, il faut que les échanges thermiques n'aient pas le temps de s'effectuer en une période T du phénomène acoustique, cela nécessite $\tau_{\text{diff}} \gg T$:

$$\frac{\tau_{\text{diff}}}{T} \gg 1 \Leftrightarrow \boxed{f \ll f_0 = \frac{\mu_0 c_p c^2}{\kappa}}$$

A.N : $f_0 = \frac{1,2 \times 1 \times 10^3 \times (3,4 \times 10^2)^2}{3 \times 10^{-2}} \Rightarrow \boxed{f_0 = \frac{1,2 \times 3,4^2}{3} \times 10^9 \text{ Hz} \approx 4 \times 10^9 \text{ Hz}}$.

Pour le critère soit vérifiée, il faut $f \ll f_0$, on peut donc retenir $\boxed{f < f_{\text{max}} = 10^7 \text{ Hz}}$. Ceci est **tout à fait compatible avec les ondes ultrasonores considérées ici**.

Q07. La membrane oscillant sinusoidalement, sa position est donnée par $z_m(t) = h + Z_m \cos(\omega t + \varphi)$, il vient :

$$\frac{dz_m(t)}{dt} = -\omega Z_m \sin(\omega t + \varphi) = u_m(t) = U_m \sin(\omega t)$$

On en déduit par identification : $Z_m \omega = U_m$, c'est à dire : $\boxed{Z_m = \frac{U_m}{2\pi f}}$.

A.N : $Z_m = \frac{10 \times 10^{-2}}{2\pi \times 2,0 \times 10^4} = \frac{10^{-5}}{4\pi} \Rightarrow \boxed{Z_m \approx 8,0 \times 10^{-7} \text{ m}}$.

Q08. Le fluide ne pouvant pénétrer la membrane, il y a nécessairement **continuité de la vitesse à l'interface** :

$$u_m(t) = v_1(h + z_m(t), t)$$

Pour une fréquence de 20 kHz, la longueur d'onde est de l'ordre du centimètre, en conséquence $\boxed{Z_m \ll \lambda}$ (l'approximation acoustique est une approximation de grande longueur

l'argument spatial confondre h et $h + z_m(t)$ et donc :

$$u_m(t) \approx v_1(h, t)$$

Q09. Le support étant fixe en $z = 0$, on en déduit immédiatement $v_1(0, t) = 0$.

Le problème est identique au cas d'une corde dont l'une des extrémités est fixe et l'autre est reliée à un vibreur.

Compte tenu des conditions aux limites et de l'excitation sinusoïdale, on cherche une solution sous forme d'une onde stationnaire de la forme :

$$\forall t, \forall z \in]0, h[, \quad v_1(z, t) = A \cos(\omega t + \varphi_t) \cos(kz + \varphi_z)$$

En reportant cette solution dans l'équation d'onde, on montre aisément que $k = \omega/c$.

On applique alors les conditions aux limites :

$$\forall t, \quad v_1(0, t) = 0 = A \cos(\omega t + \varphi_t) \cos(\varphi_z)$$

On peut retenir $\varphi_z = -\pi/2$ et le champ de vitesse prend la forme :

$$\forall t, \forall z \in]0, h[, \quad v_1(z, t) = A \cos(\omega t + \varphi_t) \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right)$$

On tient enfin compte de la condition en $z = h$:

$$\forall t, \quad v_1(h, t) = U_m \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \varphi_t) \sin\left(\frac{\omega h}{c}\right)$$

On peut retenir $\varphi_t = -\pi/2$ et $A = U_m / \sin\left(\frac{\omega h}{c}\right)$, finalement :

$$\forall t, \forall z \in [0, h], \quad v_1(z, t) = \frac{U_m}{\sin\left(\frac{\omega h}{c}\right)} \sin(\omega t) \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right)$$

Q10. Les maxima de vitesse sont associés aux maxima de la valeur absolue du sinus spatial, c'est à dire :

$$\frac{\omega z_n}{c} = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\pi}{\lambda} z_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

C'est à dire : $z_n = \frac{\lambda}{4} (1 + 2n)$ avec $n \in \mathbb{N}$, dans la limite $z_n < h$.

L'amplitude des ventres vaut $V_{1m} = \frac{U_m}{\sin\left(\frac{\omega h}{c}\right)}$. Cette amplitude diverge pour :

$$\frac{\omega_p h}{c} = p\pi \quad \Leftrightarrow \quad \omega_p = \frac{p\pi c}{h} \quad \text{avec } p \in \mathbb{N}^*$$

Nous nous sommes placés dans l'approximation acoustique; en cas de divergence des fluctuations, on ne peut plus se limiter aux termes d'ordre 1 et on doit **tenir compte de termes non linéaires qui apparaissent dans les équations**.

En présence de mouvements plus importants, les effets de frottements par viscosité ne seront en pratique plus négligeables créant de la dissipation.

Q11. On repart de l'équation linéarisée (1) issue du PDF :

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\mu_0 U_m \omega}{\sin\left(\frac{\omega h}{c}\right)} \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right)$$

On intègre alors par rapport à z en négligeant toute constante pour un phénomène ondulatoire :

$$\forall t, \forall z \in [0, h], \quad p_1(z, t) = \frac{c\mu_0 U_m}{\sin\left(\frac{\omega h}{c}\right)} \cos(\omega t) \cos\left(\frac{\omega z}{c}\right)$$

Déterminons la force due à la seule surpression :

$$\vec{F} = \left(-\text{grad} p_1 \right) \frac{4\pi a^3}{3} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \frac{4\pi a^3}{3} \times \frac{\mu_0 \omega U_m}{\sin\left(\frac{\omega h}{c}\right)} \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right) \vec{u}_z$$

$\langle \cos(\omega t) \rangle = 0$, donc $\langle \vec{F} \rangle = \vec{0}$.

On constate que cette onde de surpression ne crée pas de force en moyenne et ne peut donc pas assurer la lévitation de l'objet.

Remarque : on aurait pu tenir compte du terme de pression statique $P_0(z)$ dans le calcul des forces de pression mais ce terme crée la poussée d'Archimède qui ne peut en aucun cas assurer la sustentation d'un objet solide plus dense que l'air.

Q12. L'hypothèse $V_1 \ll c$ n'est plus vérifiée, l'approximation acoustique ne s'applique plus.

Q13. On peut penser à la relation de Bernoulli dans laquelle on somme les termes p et $\frac{v^2}{2}$, on en déduit immédiatement $\ell = 1$ et $q = 2$ (une variante consiste à indiquer que la pression est une énergie volumique).

On commence par exprimer la composante de la force de surpression $F_z = -\frac{\partial p_2}{\partial z} \times \frac{4\pi a^3}{3}$:

$$F_z = \frac{4\pi a^3}{3} \times \left[\frac{1}{4} \mu_0 V_1^2 \times \frac{2\omega}{c} \sin\left(\frac{2\omega}{c} z\right) - f'(z) \cos(2\omega t) \right]$$

Le premier terme constant s'identifie à sa moyenne et le second terme purement sinusoïdal

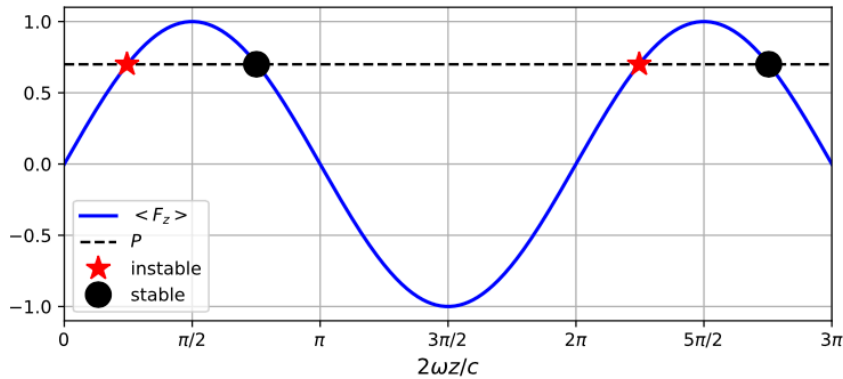
est de moyenne nulle, en conséquence :

$$\langle F_z \rangle = \frac{2\pi\mu_0\omega a^3 V_1^2}{3c} \sin\left(\frac{2\omega}{c}z\right)$$

Q14. Pour que des positions d'équilibre existent la norme du poids ne doit pas dépasser l'amplitude de la force de pression, c'est à dire, à la limite :

$$\frac{2\pi\mu_0\omega a^3 V_1^2}{3c} = \frac{4\pi a^3}{3} \mu_{b,\max} g \Leftrightarrow \mu_{b,\max} = \mu_0 \frac{\omega}{c} \times \frac{V_1^2}{2g}$$

Graphiquement, les positions d'équilibre sont associées au croisement des courbes donnant la force de pression et le poids (sur le graphique, les ordonnées sont normalisées à F_{max}).



Les positions étoilées sont des positions instables : en effet supposons qu'un objet initialement dans une telle position se déplace légèrement vers les z croissants, $\langle F_z \rangle$ augmente et l'objet s'éloigne encore plus.

Les positions « disque » sont des positions stables : en effet supposons qu'un objet initialement dans une telle position se déplace légèrement vers les z croissants, $\langle F_z \rangle$ diminue, le poids l'emporte et l'objet redescend.

Q15. $\mu_{b,\max} = \frac{1,2 \times 2\pi \times 2 \times 10^4 \times 50^2}{340 \times 2 \times 9,81} \Rightarrow \mu_{b,\max} \approx 5 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Pour des ondes de fréquence $f = 20 \text{ kHz}$, la longueur d'onde est de l'ordre de 2 cm ; comme on impose $a \ll \lambda$, on peut considérer un rayon maximal $a_{\max} \approx 2 \text{ mm}$, c'est à dire pour la masse maximale :

$$m_{b,\max} = \mu_{b,\max} \times \frac{4\pi a^3}{3} = 5 \times 10^4 \times \frac{4\pi \times 2^3 \times 10^{-9}}{3} \Rightarrow m_{b,\max} \approx 2 \text{ g}$$

Si la masse volumique maximale est 50 fois supérieure à celle de l'eau, la masse que l'on peut réellement déplacer reste modeste à l'échelle macroscopique.

Q16. Comme la résolution graphique de la question 14 le montre, deux positions d'équilibre stables sont séparées d'une distance Δz tel que :

$$\frac{2\omega\Delta z}{c} = 2\pi \Leftrightarrow \Delta z = \frac{\pi c}{\omega} = \frac{\pi}{2\pi} \times \frac{c}{f} \Leftrightarrow \Delta z = \frac{\lambda}{2}$$

Le nombre d'objet que l'on pourra faire léviter sera un nombre entier de l'ordre de $\frac{2h}{\lambda}$.

Q17. L'objet oscille autour de sa position d'équilibre stable. Appliquons un principe fondamental de la dynamique à cet objet en projection selon la direction verticale, avec $z = z_{eq} + \varepsilon$ et $\varepsilon \ll z_{eq}$ (calcul à l'ordre 1 en ε) :

$$m\ddot{z} = -mg + F_{max} \sin\left(\frac{2\omega z}{c}\right) \approx \underbrace{-mg + F_{max} \sin\left(\frac{2\omega z_{eq}}{c}\right)}_{=0 \text{ équilibre}} + \varepsilon \times F_{max} \times \frac{2\omega}{c} \times \cos\left(\frac{2\omega z_{eq}}{c}\right)$$

Avec $\ddot{z} = \ddot{\varepsilon}$, il vient :

$$\ddot{\varepsilon} + \left(-\frac{2\omega F_{max}}{mc} \cos\left(\frac{2\omega z_{eq}}{c}\right)\right) \times \varepsilon = 0$$

Les positions d'équilibre correspondent à un argument du cosinus $\in]\pi/2, \pi[[2\pi]$ (cf. figure ci-contre), le cosinus est donc négatif et on est en présence d'une équation d'oscillateur harmonique de pulsation :

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{2\omega F_{max}}{mc} \left| \cos\left(\frac{2\omega z_{eq}}{c}\right) \right| = \frac{2\omega}{c} \times \frac{2\pi\mu_0\omega a^3 V_1^2}{3c} \times \frac{1}{\mu_b \times \frac{4\pi a^3}{3}} \times \left| \cos\left(\frac{2\omega z_{eq}}{c}\right) \right|$$

C'est à dire : $\tilde{\omega} = \omega \frac{V_1}{c} \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_b} \left| \cos\left(\frac{2\omega z_{eq}}{c}\right) \right|}$

Remarque : notons que cette pulsation est nettement inférieure à la pulsation de l'onde acoustique pour les valeurs des masses volumiques et des vitesses précédemment indiquées. Dans la même idée, le terme $f(z) \cos(2\omega t)$ ne peut contribuer à une oscillation car la fréquence associée de 40 kHz semble bien trop élevée pour faire osciller l'objet.

Q18. Le dispositif convertit au sens de l'électronique de puissance une tension continue en une tension alternative, c'est un **onduleur**. Pour les applications, on peut citer :

- **alimentation de secours** pour un hôpital (réalisation d'une tension alternative 230 V efficace à partir de batteries);
- transfert sur le réseau électrique de l'énergie récupérée par des **panneaux solaires**.

Q19. K_1 et K'_1 ne peuvent être simultanément fermés sinon la source de tension est court-circuitée (de même pour K_2 et K'_2).