

DS de Physique 12 février 2025

PSI - Lycée du Parc des Loges

Durée 4H
Calculatrices autorisées

Ce sujet comporte trois parties indépendantes.

Pour les applications numériques, on utilisera 3 chiffres significatifs.

Partie 1 - Ondes stationnaires le long d'une corde vibrante (1h)

Afin d'étayer quelques affirmations présentées dans le **document 1**, annexe documentaire, page 1, on modélise une corde de guitare par une fine corde homogène, inextensible, de masse linéique μ , de longueur L , tendue horizontalement sous la tension T_0 . On se place dans le cadre des hypothèses suivantes :

- (H1) l'action du champ de pesanteur est négligée ;
- (H2) les phénomènes dissipatifs sont négligés ;
- (H3) le déplacement d'un point matériel de la corde est strictement vertical (l'onde est dite transversale) ;
- (H4) les déformations que fait la corde avec l'horizontale sont suffisamment faibles pour que l'on puisse supposer que l'angle que fait la corde avec l'horizontale est un infiniment petit du premier ordre.

On se place dans un repère cartésien (O, x, y, z) et on s'intéresse aux forces subies par un tronçon infinitésimal de corde de longueur dx et de masse dm .

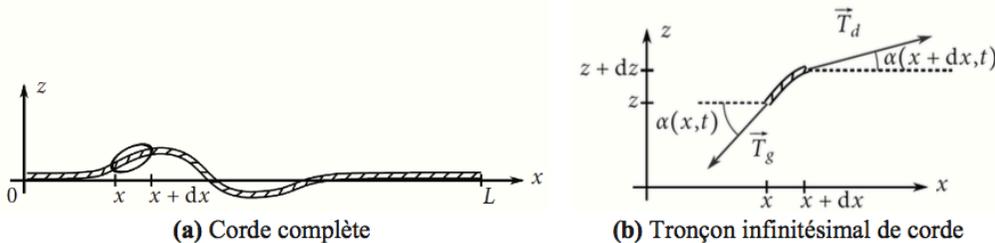


Figure 1

Soit \vec{T}_g (respectivement \vec{T}_d) la tension exercée par la partie gauche (respectivement droite) de la corde sur le tronçon infinitésimal représenté (**figure 1**).

Q1. Expliquer pourquoi l'observation d'une corde de guitare sur l'instrument permet de valider l'hypothèse (H1).

Q2. Exprimer les forces de tension \vec{T}_g et \vec{T}_d en fonction de T_0 et α , d'abord de façon exacte puis, en utilisant l'hypothèse (H4).
En déduire que $\|\vec{T}_g\| = \|\vec{T}_d\| = T_0$.

Q3. En appliquant la 2^e loi de Newton sur le tronçon infinitésimal de corde compris entre x et $x + dx$, de masse $dm = \mu dx$, montrer que :

$$\mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x}.$$

On précisera quelles hypothèses ont été employées et comment.

Q4. En déduire une équation aux dérivées partielles que l'on mettra sous la forme :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad (\text{E1})$$

Comment se nomme cette équation ? Exprimer la célérité c de l'onde en fonction des données, préciser son sens physique et établir son unité dans le SI.

On cherche des solutions de l'équation (E1) sous la forme $z(x, t) = Z_n \sin \frac{\omega_n x}{c} \cos(\omega_n t)$ où les amplitudes Z_n et les pulsations ω_n sont des constantes du mode n considéré ($n \in \mathbb{N}^*$).

Q5. Comment se nomme ce type de solution ?

Q6. En précisant les conditions aux limites du problème, établir la quantification des pulsations selon l'équation :

$$\omega_n = n \frac{\pi c}{L}.$$

Q7. Justifier alors les affirmations (I1), (I2) et (I3) du **document 1**.

Q8. À partir du **document 2**, annexe documentaire, page 2, donner, à un même instant, la représentation graphique de l'allure de la corde pour les 3 modes impairs dont l'amplitude est la plus importante.

Q9. Déduire des **documents 1 et 2**, en explicitant votre démarche, quelle corde a été excitée.

Q10. Le **document 1** précise que « la tension de chaque corde représente un poids d'environ cinq à quinze kilogrammes ». Les données permettent-elles de valider cette affirmation ?

Document 1 - La guitare : les grandes idées

Tension

La guitare est un instrument fragile, constituée d'éléments dissemblables dans leur composition (bois, métal, nylon) qui supportent des efforts physiques importants :

- tension qui s'exerce sur les cordes quand elles vibrent
- traction des cordes pour le manche (en accordage standard, la tension de chaque corde représente un poids d'environ cinq à quinze kilogrammes)
- chocs permanents puisque l'instrument est par essence « nomade ».

Accordage

Les guitares à 6 cordes sont généralement accordées (du grave à l'aigu) avec les notes :

Corde	1	2	3	4	5	6
Note	Mi ¹	La ¹	Ré ²	Sol ²	Si ²	Mi ³
Fréquence (Hz)	82,40	110,0	146,8	196,0	246,9	329,6

Cette combinaison de notes est appelée *accordage standard*

Modes de vibration

Considérons une corde maintenue par ses deux extrémités. Dans le mode de vibration le plus simple, dit « fondamental », elle forme à chaque instant un arc et la flèche de cet arc varie de manière périodique (la courbure augmente, puis diminue, puis s'inverse, puis augmente dans l'autre sens...). On peut donc définir une fréquence de vibration et l'on remarque que cette fréquence dépend :

- de la masse linéique de la corde (notée μ et exprimée en kilogrammes par mètre) ;
- de la force avec laquelle on tend cette corde (tension notée T_0 et exprimée en newtons) ;
- de la longueur de la corde (notée L et exprimée en mètres).

Si l'on cherche l'influence de chaque paramètre :

- (I1) plus la corde est légère (μ est faible), plus la fréquence est élevée (c'est la raison pour laquelle les cordes aiguës d'un instrument sont plus fines) ;
- (I2) plus la corde est tendue, plus la fréquence de vibration est élevée (d'un point de vue acoustique, la note s'élève lorsqu'on tend la corde) ;
- (I3) plus la corde est longue, plus la fréquence est basse (et donc, pour un instrument, plus le son est grave).

Sur un instrument, chaque corde a une masse linéique différente et l'on ajuste la tension pour accorder. Pour jouer, on joue sur le choix de la corde et lorsque l'instrument a un manche, sur la longueur de la corde en pinçant la corde contre le manche avec le doigt.

Source 2016 : Wikipédia



Document 2 - La guitare : résultats expérimentaux et données techniques

Le son produit par une seule corde de guitare a été enregistré. On donne sur la **figure 2** le spectre (obtenu par décomposition en série de Fourier) du signal proportionnel à l'amplitude de vibration de la corde :

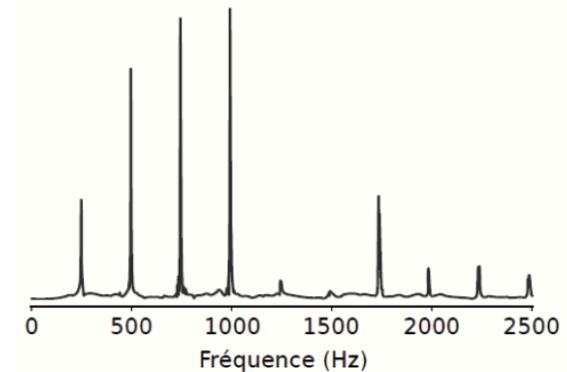


Figure 2 - Spectre du signal électrique proportionnel à l'amplitude de la corde

Les cordes sont en nylon de masse volumique $1\,140\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, de mêmes longueurs 63 cm et de diamètres différents reportés dans le tableau ci-dessous :

Corde	1	2	3	4	5	6
Diamètre (mm)	1,07	0,81	0,61	0,41	0,25	0,23

Source 2016 : Wikipédia

Partie 2 – Electrodynamique classique (1h30)



One Piece est une série de mangas Shōnen créée par Eiichirō Oda.

L'histoire suit les aventures de Monkey D. Luffy, un garçon dont le corps a acquis les propriétés du *caoutchouc* après avoir mangé par inadvertance un *fruit du démon*.

Avec son équipage de pirates, appelé l'équipage au *Chapeau de paille*, Luffy explore *Grand Line* à la recherche du trésor ultime connu sous le nom de *One Piece* afin de devenir le prochain *roi des pirates*.



Enel (*Eneru* en VO) est l'antagoniste principal de l'Arc *Skypiea*. Son fruit du démon, le *goro goro no mi*, lui permet de produire de la foudre et du courant électrique en maîtrisant la formation de particules chargées....

II. 1 - Champs électromagnétiques dans un condensateur

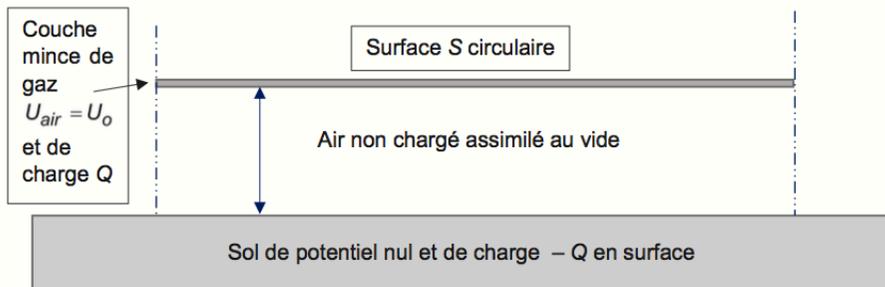


Figure 3 - Condensateur créé par Enel

Les échelles ne sont pas respectées par souci de représentation.

Le pouvoir d'*Enel* lui permet d'imposer un potentiel à un volume d'air extrêmement fin au-dessus de lui. On s'intéresse ici au condensateur formé par cette surface d'air circulaire et le sol, localement plan (figure 3).

Dans cette modélisation, on pourra considérer deux disques (plans) parallèles de surfaces S distants de d avec $d \ll \sqrt{S}$ de potentiels électriques respectifs $U_{sol} = 0$ et U_{air} (U_{air} potentiel électrique de la couche d'air chargé). On négligera les effets de bord. On appellera (Oz) l'axe vertical ascendant dont l'origine est prise au sol et \vec{u}_z son vecteur unitaire.

On assimile l'air non chargé entre ces plaques au vide de permittivité $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.

On se place ici en régime statique, $U_{air} = U_0 = \text{constante positive}$ et on note $\sigma_{air} = \sigma_0$ la densité surfacique des charges électriques de la surface d'air chargée.

Q24. Justifier que le champ électrique est porté par la direction (Oz) , dépendant de la coordonnée z .

On s'intéresse d'abord au champ électrique \vec{E}_{sol} créé par le sol et sa distribution de charges dont vous préciserez la densité de charges. Quelle relation existe-t-il entre $E_{sol}(z)$ et $E_{sol}(-z)$? Justifier.

Montrer qu'il s'exprime par :

$$\vec{E}_{sol} = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \quad \text{pour } z > 0$$

$$\vec{E}_{sol} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \quad \text{pour } z < 0$$

Par analogie, en déduire l'expression du champ \vec{E}_{gaz} créée par la surface chargée en $z = d$ pour $0 < z < d$.

Donner alors l'expression du champ \vec{E} total à l'intérieur du condensateur.

Q25. En déduire la différence de potentiel U_0 en fonction de σ_0, ϵ_0 et de d .

Q26. Calculer E et σ_0 pour $d = 5,0 \text{ m}$ et $U_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ V}$.

Q27. Doit-on craindre une telle tension ? On donne la valeur du champ disruptif de l'air dans les conditions d'étude : $E_{disruptif}(\text{air}) = 3,6 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

Le condensateur est soumis désormais à une tension alternative de basse fréquence f , de telle sorte que $U_{air} = U_0 \cos(\omega t)$. On travaillera en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) . On admet qu'à cette fréquence, la relation entre le champ électrique \vec{E} et le potentiel électrique est la même qu'en régime statique.

Q28. Écrire \vec{E} sous la forme $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ avec E_0 à préciser en fonction de U_0 et des autres données de l'énoncé.

Q29. Rappeler les équations de Maxwell du champ électromagnétique.

Q30. Justifier l'existence d'un champ magnétique \vec{B} et montrer que $\overline{B(M,t)} = B(r,z,t) \vec{e}_\theta$.

Q31. Justifier que, si l'on reste dans l'espace entre les armatures, la circulation du champ magnétique le long d'un contour orienté s'écrit : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi_{\vec{E}}}{dt}$, avec c et $\Phi_{\vec{E}}$ à préciser.

II. 2 - Écrantage dans un plasma thermique

En fait, la création d'un tel potentiel électrique augmente drastiquement la température, ionisant au passage l'atmosphère. L'air ne sera plus assimilé à du vide mais à un plasma, un milieu globalement neutre électriquement, partiellement ou totalement ionisé, contenant en moyenne et par unité de volume, n_e électrons libres de masse m_e et de charge $q_e = -e$ et $n_i = n_e$ ions X^+ , de masse m_i et n_o atomes X de masse m_o .

L'atmosphère est à l'équilibre thermodynamique à une *haute* température T .

Intéressons-nous à l'environnement d'un ion X^+ particulier dont la position sera prise pour l'origine O . Notons respectivement n_+ et n_- , les densités volumiques d'ions et d'électrons en un point M situé à une distance r de l'origine. On se place dans le cadre de l'électrostatique.

Q32. Rappeler l'énergie potentielle d'une charge e placée en un point du plasma tel que le potentiel électrique en ce point soit égal à U . On suppose que ce potentiel ne dépend que de r : $U = U(r)$.

Q33. Justifier qu'à " très haute température ", $n_+ = n_e \left(1 - \frac{eU}{k_B T} \right)$. À quelle inégalité correspond la notion de " haute température " ? Utiliser le facteur de Boltzmann.

Q34. En déduire n_- .

Q35. Représenter les fonctions $[U \mapsto n_+(U)]$ et $[U \mapsto n_-(U)]$.

Q36. Comment s'écrit, dans ce milieu, l'équation de Poisson ? En déduire l'équation différentielle à laquelle obéit $U(r)$.

Q37. En posant $Z(r) = rU(r)$, montrer que la fonction $Z(r)$ vérifie l'équation : $\frac{d^2 Z}{dr^2} - \frac{Z}{\lambda_D^2} = 0$ avec λ_D une constante à exprimer en fonction des données de l'énoncé.

Q38. Résoudre cette équation et montrer que le potentiel électrique s'écrit :

$$\text{pour } r \neq 0, U(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/\lambda_D}.$$

Interpréter ce que représente λ_D . Commenter.

Q39. En déduire la densité volumique de charge $\rho(r)$ ainsi que la charge $Q(r)$ contenue dans une sphère de centre O et de rayon r .

$$\text{On donne } \int_0^r r \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) dx = \left[1 - \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) \left(\frac{r}{\lambda_D} + 1 \right) \right].$$

Formulaire

Analyse vectorielle

- $\text{div}(\overline{\text{grad}}) = \Delta$

- Coordonnées sphériques :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Théorème de Stokes - Ampère

Pour un champ de vecteur \vec{A} de classe suffisante, le théorème de Stokes-Ampère s'écrit :

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot}(\vec{A}) \cdot d\vec{S} \text{ avec } C \text{ une courbe fermée bordant la surface à travers laquelle on calcule le flux de } \text{rot}(\vec{A}). \text{ L'orientation du contour } C \text{ donne l'orientation du vecteur } d\vec{S}.$$

Partie 3 – Paramètres électriques d’une bobine et courants de Foucault (1h30)

Dans le but de contrôler les infrastructures métalliques, il a été développé des méthodes de contrôle non destructifs (CND) utilisant des capteurs à courants de Foucault (**document** ci-dessous) ou à ultrasons.



Vue globale du capteur.

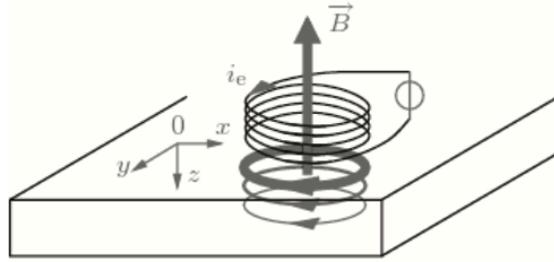


Schéma de la bobine excitatrice et distribution des courants de Foucault.

Document - Capteurs à courants de Foucault

Le principe général du CND à courants de Foucault est le suivant : une bobine excitatrice génère un champ magnétique variable qui diffuse dans le matériau à sonder. Il se développe alors des courants de Foucault dont la géométrie des lignes de courants est affectée en cas de défaut du type fissure, caverne ou autres. Une sonde enregistre la réponse de ces courants de Foucault, image d'un défaut local dans la structure.

Compte-tenu de leur faible coût et de leur facilité d'utilisation, ces CND à courants de Foucault sont très utilisés. Ils présentent néanmoins quelques inconvénients.

En particulier, les défauts masqués en surface et profondément noyés dans l'épaisseur des conducteurs sont plus difficiles à détecter sur les structures en acier, qu'avec les autres métaux.

Les défauts du type piqûres micrométriques orthogonales à la surface locale des conducteurs sont quasi-indétectables.

Un décollement ou une inclinaison trop importante de la sonde du CND par rapport à la surface de la pièce amenuise la détection.

On considère une bobine d'axe z , sans noyau, d'inductance propre L_H et de résistance électrique R_Ω , parcouru par un courant électrique $i_e(t) = I_{eff} \sqrt{2} \cos(\omega t)$. On note H_b la longueur de cette bobine. Il règne alors dans cette bobine un champ magnétique : $\vec{B} = B(t)\vec{e}_z = \mu_0 n i_e(t)\vec{e}_z$, où n est le nombre de spires par unité de longueur de la bobine et μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

On place intégralement à l'intérieur de cette bobine un tube métallique de même axe z que la bobine représentée à la **figure 5**. On note R_t son rayon moyen, e son épaisseur supposée très fine devant le rayon R_t et H_t sa longueur supposée inférieure à celle de la bobine ($H_t < H_b$).

Ce conducteur métallique est caractérisé par sa conductivité électrique γ . D'un point de vue magnétique, il est ici assimilé à du vide.

On négligera les effets de bord. Le repère utilisé sera celui des coordonnées cylindriques (r, θ, z) de base : $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

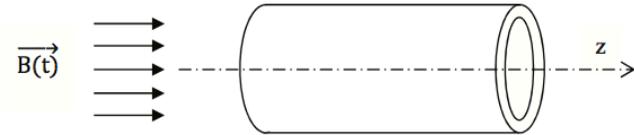


Figure 5 - Tube métallique conducteur

Q8. Expliquez pourquoi des courants électriques prennent naissance dans le tube conducteur. Les lignes de courants induits sont-elles colinéaires à \vec{e}_r , à \vec{e}_θ ou à \vec{e}_z ?

Q9. On note \vec{j}_e la densité volumique de courant associée à ces courants induits, aussi appelés courants de Foucault.

Préciser l'unité de \vec{j}_e .

Rappeler l'expression de l'équation de Maxwell-Faraday.

Par un calcul de circulation sur un contour qu'on définira, déterminer l'expression du champ électrique induit dans la bobine (i.e. dans le tube) en fonction de $B(t)$ et de r .

En déduire l'expression de \vec{j}_e en fonction de γ , $B(t)$ et de r .

$$\vec{j}_e = -\gamma \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \vec{e}_\theta$$

Q10. Le tube conducteur est suffisamment fin pour considérer que $r = R_t$ dans tout le tube. Déterminer en fonction des paramètres géométriques du tube, du champ magnétique $B(t)$ et de la conductivité électrique γ , la puissance instantanée $P_{c.f.}(t)$ dissipée par les courants de Foucault.

En déduire que la puissance moyenne $P_{c.f.}$, dissipée par les courants de Foucault dans le tube, est de la forme $P_{c.f.} = C \cdot \omega^2 \cdot I_{eff}^2$. Préciser l'expression de C en fonction de μ_0 , γ , n et des caractéristiques géométriques du tube.

On note R'_Ω la résistance apparente de la bobine en présence du tube conducteur.

Donner l'expression de R'_Ω puis comparer simplement R'_Ω et R_Ω .

Q11. Dans le cas où le tube conducteur présente une fissure orthoradiale parallèle au plan $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ (**figure 6a**), la distribution des courants de Foucault est-elle modifiée? Qu'en est-il pour la puissance $P_{c.f.}$?

Dans le cas où le tube conducteur présente une fissure axiale parallèle à l'axe $z'z$, (**figure 6b**), la distribution des courants de Foucault est-elle modifiée? Qu'en est-il pour la puissance $P_{c.f.}$?

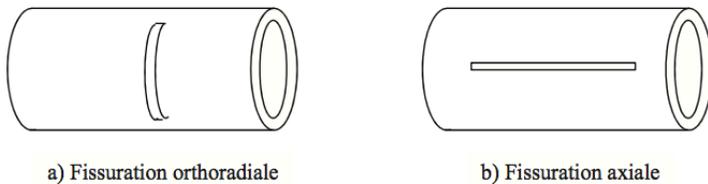


Figure 6 - Tube fissuré

Diffusion d'un champ magnétique dans un matériau conducteur semi-infini

Le matériau étudié ici est considéré comme homogène et isotrope. Il possède une conductivité électrique γ et une perméabilité magnétique μ . La relation entre le champ magnétique \vec{B} et l'excitation magnétique \vec{H} dans le matériau est de la forme $\vec{B} = \mu \vec{H}$.

L'air extérieur est assimilable d'un point de vue magnétique au vide.

Le matériau est soumis à une excitation magnétique extérieure dans l'air de la forme $\vec{H}_{ext} = H_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y$, à laquelle on associe le modèle complexe $\vec{H}_{ext} = H_0 e^{j\omega t} \vec{e}_y$. Cette excitation est produite par un système de courants de fréquence f .

Dans toute cette partie, on néglige les effets de bord et on associe classiquement à toute grandeur sinusoïdale de la forme $x(t) = X_{max} \cos(\omega t + \phi)$ la grandeur complexe $\underline{x}(t) = X_{max} e^{j(\omega t + \phi)}$.

Le matériau occupe le demi-espace correspondant aux $x > 0$ (**figure 7**, page suivante).

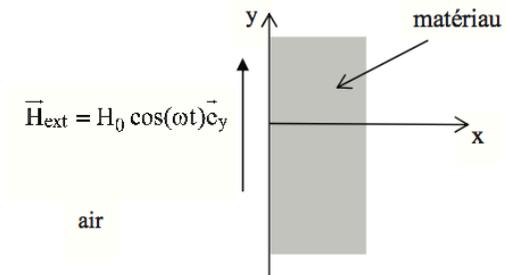


Figure 7 - Matériau conducteur

On cherche à exprimer le champ magnétique qui règne dans le conducteur sous la forme $\vec{B} = B(x, t) \vec{e}_y$. On lui associe le champ magnétique complexe $\vec{B}(x, t) = \underline{B}(x) e^{j\omega t} \vec{e}_y$ où $\underline{B}(x)$ est une fonction à valeur complexe. On a $\vec{B}(x, t) = \text{Re}(\underline{B}(x, t))$ où $\text{Re}(\underline{x}(t))$ correspond à la partie réelle de la fonction complexe $\underline{x}(t)$.

Q13. En s'aidant de la loi d'Ohm locale, écrire, dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires, les quatre équations locales satisfaites par les champs \vec{E} et \vec{B} à l'intérieur du matériau.

En déduire que $\vec{B}(x, t)$ est solution d'une équation aux dérivées partielles de la forme

$$D \cdot \Delta \vec{B}(x, t) - \frac{\partial \vec{B}(x, t)}{\partial t} = \vec{0}. \text{ On exprimera } D \text{ en fonction de } \gamma \text{ et de } \mu.$$

Préciser l'unité de D . Comment nomme-t-on ce type d'équation? Citer un autre domaine de la physique où on rencontre ce type d'équation.

Formule utile : $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$

Q14. En déduire l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants vérifiée par la fonction $\underline{B}(x)$.

En faisant apparaître l'épaisseur de peau, notée δ , que l'on exprimera en fonction de μ , γ et ω , donner l'expression de la fonction $\underline{B}(x)$

On précise ici qu'il n'existe pas de courants surfaciques à l'interface en $x = 0$, le champ d'excitation H_y est donc continu.

En déduire l'expression de la fonction $\underline{B}(x)$, puis celles des champs $\underline{\vec{B}}(x,t)$ et $\vec{B}(x,t)$ en fonction de μ , H_0 et δ .

Q15. La détermination complète du champ électromagnétique dans le matériau aboutit à

l'expression du champ électrique complexe $\underline{\vec{E}}(x,t) = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\gamma}} H_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{3\pi}{4})} \vec{e}_z$.

Dans l'hypothèse d'un matériau semi-infini, en déduire, en fonction de H_0 , S , μ , γ et ω , l'expression de la puissance moyenne P_J dissipée par effet Joule pour une surface S de matériau.

Q16. Application numérique

Le **tableau 2** recense les valeurs des épaisseurs de peau δ , ainsi que le rapport $\frac{P_J}{H_0^2 S}$ exprimé en $W.A^{-2}$ pour deux fréquences différentes et différents métaux.

Calculer les deux valeurs x et y manquantes.

	δ_{Fe}	δ_{Al}	δ_{Cu}	$\frac{P_{J_{Fe}}}{H_0^2 S}$	$\frac{P_{J_{Al}}}{H_0^2 S}$	$\frac{P_{J_{Cu}}}{H_0^2 S}$
$f = 2 \text{ kHz}$	x	1,8 mm	1,5 mm	$1,4 \cdot 10^{-3}$	y	$5,7 \cdot 10^{-6}$
$f = 100 \text{ kHz}$	$5 \mu\text{m}$	0,26 mm	0,2 mm	$9,9 \cdot 10^{-3}$	$5,1 \cdot 10^{-5}$	$4,1 \cdot 10^{-5}$

Tableau 2 - Valeurs des épaisseurs de peau δ