

Partie 1 – Contrôle non-destructif (CND) par courants de Foucault - Centrale MP 2015

I.A - Expression approchée du champ magnétique \vec{B} créé par la bobine excitatrice dans la plaque

I.A.1) Tout plan contenant l'axe Oz est un plan d'antisymétrie du courant. Chaque point M de l'espace se trouvant dans l'un de ces plans, soit $(\Pi)_M$, le champ magnétique $\mathbf{B}(M)$ est contenu dans $(\Pi)_M$, dont une base en M est $(M, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z)$.

De plus, le système de courants est invariant par rotation autour de Oz ce qui impose que les composantes de \mathbf{B} ne dépendent pas de l'angle θ mesurant la rotation autour de cet axe. Il résulte donc bien de ces deux considérations que

$$\mathbf{B}(M) = B_r(r, z, t)\mathbf{e}_r + B_z(r, z, t)\mathbf{e}_z.$$

I.A.2) La première simulation est évidemment celle de la bobine seule (carte 1).

Les champs magnétiques variables dans la plaque vont induire une f.e.m proportionnelle à la fréquence f du courant alimentant la bobine. Cette f.e.m provoque l'apparition de courants de FOUCAULT qui vont, selon la loi de LENZ, s'opposer au champ magnétique de la bobine. Plus la fréquence f est grande, plus grands seront les courants de FOUCAULT et plus petit sera le champ résultant de l'ensemble des courants.

La deuxième simulation correspond donc à l'interaction bobine-plaque à $f = 200$ Hz (carte 3) et la troisième simulation à l'interaction bobine-plaque à $f = 50$ Hz (carte 2).

I.A.3) Évaluation du champ

a) Sur le plan $z = l_b/2$, le module du champ est évaluable par la courbe $|B|(x)$. En notant x_c l'abscisse du centre de la bobine (le minimum de la courbe fixe $x_c = 2,31$ cm et pas $R_b = 2,5$ cm ??) et en introduisant $r = |x - x_c|$, le champ moyen sur la zone de la plaque $r < x_c$ sera

$$B_0 = \bar{B} = \frac{1}{\pi x_c^2} \int_0^{x_c} 2\pi r |B|(r) dr = \frac{1}{\pi x_c^2} \int_{x_c}^{2x_c} 2\pi(x - x_c) |B|(x) dx.$$

Le champ au bord du solénoïde (toujours dans le plan $z = l_b/2$) est $B_b = 5,25 \times 10^{-3}$ T et, au centre, il vaut $B_c = 2,7 \times 10^{-3}$ T. On peut alors approcher la courbe proposée par une parabole

$$|B|(x) = B_c + (B_b - B_c) \left(1 - \frac{x}{x_c}\right)^2$$

et on trouve

$$B_0 = \frac{B_b + B_c}{2} = 4 \times 10^{-3} \text{ T.}$$

b) Le champ magnétique créé par un solénoïde infini est, dans le cadre de l'A.R.Q.S., $B_\infty = \mu_0 n i(t)$, uniforme dans tout le volume intérieur du solénoïde et où n représente le nombre de spires par unité de longueur. Il est nul à l'extérieur du solénoïde.

Ici $B_\infty = \frac{\mu_0 N i_0}{l_b} = 10,8 \times 10^{-3}$ T avec une évaluation faite à partir de la carte 1 (solénoïde seul !). Le champ moyen sur la plaque peut toujours se décrire en fonction du champ du solénoïde infini équivalent et

$$B_0 = \alpha B_\infty \quad \text{avec} \quad \alpha = 0,37.$$

Remarque

L'énoncé semble demander un rapport entre le champ moyen sur la plaque et le champ au centre du solénoïde en présence de la plaque ($B'_c = 5,8 \times 10^{-3}$ T) ce qui donne un facteur $\alpha = 0,69$; mais il n'est plus possible d'affirmer que ce champ au centre vaut $\mu_0 n i_0 \dots$

I.B - Courants de FOUCAULT

I.B.1) Soit (γ) le cercle du plan $z = l_b/2$, centré sur Oz et de rayon $r < R_b$ et (S_γ) le disque qu'il définit. Puisque la distribution est invariante par rotation autour de Oz , le module du champ électrique du plan $z = l_b/2$ ne dépend pas de θ et s'écrit donc $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{e}_\theta$. On notera bien que le cercle (γ) , parcouru dans le sens direct autour de Oz , admet \mathbf{e}_z pour normale orientée.

Par le théorème de STOKES, on a

$$\oint_\gamma \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \iint_{S_\gamma} \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_{S_\gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_\gamma} \omega B_0 \sin(\omega t) dS = \pi r^2 \omega B_0 \sin(\omega t)$$

où

$$\oint_\gamma \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_\gamma E(r) d\ell = 2\pi r E(r)$$

ce qui permet d'écrire

$$\mathbf{E} = \frac{\omega r}{2} B_0 \sin(\omega t) \mathbf{e}_\theta.$$

I.B.2) La conductivité du milieu étant γ_0 , la loi d'OHM s'écrit $\mathbf{j} = \gamma_0 \mathbf{E}$ et

$$\mathbf{j} = \frac{\gamma_0 \omega B_0}{2} r \sin(\omega t) \mathbf{e}_\theta.$$

I.C - Modification de l'impédance de la bobine excitatrice

I.C.1) Le montage suiveur assure que le générateur ne débite pas de courant, de sorte que la tension $V_1(t)$ reproduit fidèlement le créneau fourni par le G.B.F.

On observe, sur le chronogramme, que la tension V_s est nulle à l'instant initial; le courant parcourant la bobine est donc aussi nul à $t = 0$. Pour $t > 0$, tant que le créneau est haut ($Y_1 = E$), on a à la fois

$$V_s = R'i \quad \text{et} \quad E = (R + R')i + L \frac{di}{dt}$$

d'où

$$E = \frac{R + R'}{R'} V_s + \frac{L}{R'} \frac{dV_s}{dt}$$

soit encore

$$\tau \frac{dV_s}{dt} + V_s = \frac{R'E}{R+R'} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R+R'}$$

La solution de cette équation, nulle à l'instant initial, est

$$V_s(t) = \frac{ER'}{R+R'} (1 - e^{-t/\tau})$$

Cette tension tend vers la limite

$$V_\infty = \frac{ER'}{R+R'} = 4,90 \text{ V}$$

d'où l'on tire la valeur de

$$R = \frac{ER'}{V_\infty} - R' = 10 \Omega$$

On remarque aussi que

$$\frac{V_\infty}{\frac{dV_s}{dt}(0)} = \tau = 78,4 \mu\text{s} \quad \text{d'où} \quad L = (R+R')\tau = 40 \text{ mH}$$

I.C.2) Pour un même courant alimentant à la bobine, la puissance moyenne fournie par le générateur passera de $R \langle i^2 \rangle$ à $R \langle i^2 \rangle + \langle P_J \rangle$. Or la puissance JOULE dissipée par unité de volume de la plaque est

$$\frac{dP_J}{d\tau} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \gamma_0 E^2 > 0$$

donc $\langle P_J \rangle > 0$. En assimilant ce surcroît d'énergie dissipée à une variation électrocinétique de la résistance de la bobine, on aura $\langle P_J \rangle = \delta R \langle i^2 \rangle$ où $\delta R > 0$.

I.C.3) On constate, au vu des données fournies, que l'introduction de la plaque divise le champ magnétique par 2 à fréquence constante de 50 Hz et à courant constant. L'énergie électromagnétique du système est donc (fortement) réduite et, en l'écrivant $\langle E_m \rangle = \frac{1}{2} L \langle i^2 \rangle$, il apparaît bien que l'inductance équivalente du système a diminué, d'où $\delta L > 0$.

I.C.4) La puissance JOULE dissipée par unité de volume de la plaque est, en développant,

$$\frac{dP_J}{d\tau} = \frac{\gamma_0 \omega^2 B_0^2}{4} \sin^2(\omega t) r^2$$

On prend comme éléments de volume d'intégration les couronnes cylindriques de hauteur d et comprises entre les rayons r et $r + dr$, où r varie de 0 à R_b ; alors

$$P_J = \frac{\gamma_0 \omega^2 B_0^2}{4} \sin^2(\omega t) \int_0^{R_b} r^2 2\pi r dr d$$

soit

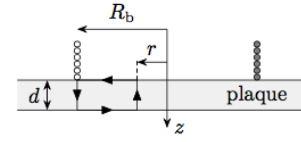
$$P_J = \frac{\pi d R_b^4 \gamma_0 \omega^2 B_0^2}{8} \sin^2(\omega t)$$

En remplaçant B_0 par son expression trouvée en I.A.3), on obtient

$$P_J = \frac{\pi}{2} d \gamma_0 \left(\frac{\alpha \mu_0 N \omega R_b^2}{2l_b} \right)^2 i_0^2 \sin^2(\omega t)$$

d'où, en prenant la moyenne et en remarquant que $\langle i^2 \rangle = i_0^2/2$,

$$\langle P_J \rangle = \delta R \langle i^2 \rangle \quad \text{où} \quad \delta R = \frac{\pi}{2} d \gamma_0 \left(\frac{\alpha \mu_0 N \omega R_b^2}{2l_b} \right)^2$$



I.C.5) Variation d'impédance due à la plaque

a) On suppose que le champ dans la zone (A) est décrit par $\mathbf{B}' = B'(r, z, t) \mathbf{e}_z$. Mais puisque ce champ est de divergence nulle, il vient immédiatement que

$$\frac{\partial B'}{\partial z} = 0 \quad \text{et que} \quad \mathbf{B}' = B'(r, t) \mathbf{e}_z$$

On envisage le contour d'AMPÈRE représenté ci-dessus (rectangle de hauteur d compris entre les rayons r et R_b comptés à partir de Oz); la normale orientée de ce contour pointe dans la direction $-\mathbf{e}_\theta$ (!). Le théorème d'AMPÈRE appliqué au champ \mathbf{B}' s'écrit

$$\oint \mathbf{B}' \cdot d\boldsymbol{\ell} = dB'(r, t) - dB'(R_b, t) = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

où $B'(R_b, t) = 0$ et où

$$I_{\text{enlacé}} = \iint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = - \int_r^{R_b} \frac{\gamma_0 \omega B_0}{2} r \sin(\omega t) dr = - \frac{\gamma_0 \omega B_0}{4} (R_b^2 - r^2) d \sin(\omega t)$$

On en tire

$$\mathbf{B}' = - \frac{\gamma_0 \mu_0 \omega B_0}{4} (R_b^2 - r^2) \sin(\omega t) \mathbf{e}_z$$

b) L'énergie magnétique due à \mathbf{B}' est

$$\begin{aligned} E_m &= \iiint_A \frac{B'^2}{2\mu_0} d\tau = \frac{\gamma_0^2 \mu_0 \omega^2 B_0^2}{32} \sin^2(\omega t) \int_0^{R_b} (R_b^2 - r^2)^2 2\pi r dr d \\ &= \frac{\pi}{2} \mu_0 d \left(\frac{\gamma_0 \omega B_0}{4} \right)^2 \sin^2(\omega t) \int_0^{R_b^2} (R_b^2 - u)^2 du \end{aligned}$$

soit

$$E_m = \frac{\pi}{6} \mu_0 d \left(\frac{\gamma_0 \omega B_0 R_b^3}{4} \right)^2 \sin^2(\omega t)$$

c) En identifiant la moyenne de cette énergie à $\frac{1}{4} \delta L i_0^2$, il vient immédiatement, avec les notations du I.A.3),

$$\delta L = \frac{\pi}{3} \mu_0 d \left(\frac{\alpha \mu_0 \gamma_0 \omega N R_b^3}{4l_b} \right)^2$$

I.C.6) L'évaluation numérique de ces grandeurs est très imprécise puisque α est très mal défini. Avec le modèle choisi ici, on trouve

$$\delta R = 26 \text{ m}\Omega \quad \text{et} \quad \delta L = 0,13 \text{ mH}$$

I.C.7) En haute fréquence, les variations δL et δR seront plus importantes donc plus facilement détectables. La sensibilité du dispositif en est donc améliorée.

Cependant, l'effet de peau, plus important en hautes fréquences, va limiter cette sensibilité; en effet, les courants induits tendent à se concentrer sur la surface du conducteur ce qui empêchera la détection de défauts « profonds » de la plaque conductrice.

I.D - Mesure de l'impédance de la bobine

I.D.1) Convertisseur courant-tension

Le fonctionnement de l'A.L.I. étant linéaire, $V_- = V_+ = 0$ de sorte que $V_s(t) = -u(t)$ et $V_e = R_0 i(t)$.

I.D.2) Filtre 1

L'amplitude du signal n'est pas modifiée mais sa phase est modifiée : c'est un déphaseur.

I.D.3) Filtre passe-bas

Le modèle proposé fournit

$$|H|(0) = 1; \quad |H|(\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad |H|(5\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{1+5^{2n}}} \simeq \frac{1}{5^n}.$$

Le gain statique est bien unitaire et, quand $\omega = \omega_c$, $20 \log |H| = -3$ dB, ce qui réalise les deux premiers termes du cahier des charges. Pour vérifier les troisième terme, on devra avoir

$$20n \log 5 = 80 \quad \text{soit} \quad n = \frac{4}{\log 5} = 5,7 \simeq 6.$$

I.D.4) Si on identifie V_e à e_1 et V_s à e_2 , on aura $e_1(t) = R_0 i(t)$ et $e_2(t) = -u(t)$. On en tire $s_1 = -kR_0 u(t) i(t)$.

Si on note $\underline{Z} = R + iX$ et $\underline{i} = i_0 e^{i\omega t}$, alors, de $\underline{u} = \underline{Z}\underline{i}$ on tire

$$u(t) = i_0 (R \cos(\omega t) - X \sin(\omega t)).$$

On peut dès lors réécrire s_1 sous la forme

$$s_1(t) = -kR_0 i_0^2 (R \cos^2(\omega t) - X \cos(\omega t) \sin(\omega t)) = -\frac{kR_0 i_0^2}{2} (R + R \cos(2\omega t) - X \sin(2\omega t)).$$

Le signal y_1 sera proportionnel à $R = \Re(\underline{Z})$ si le filtre passe-bas permet d'éliminer le signal de pulsation 2ω ; pour cela on fixe

$$\omega_c < \frac{2\omega}{5}$$

et le signal filtré est

$$y_1 = -\frac{kR_0 i_0^2}{2} \Re(\underline{Z}).$$

I.D.5) Pour conserver le terme $\Im(\underline{Z})$, il faut déphaser le courant de $-\pi/2$, donc choisir $\omega_0 = \omega$. Alors

$$s_2(t) = -kR_0 i_0^2 \sin(\omega t) (R \cos(\omega t) - X \sin(\omega t)) = -\frac{kR_0 i_0^2}{2} (R \sin(2\omega t) - X - X \cos(2\omega t))$$

et si la condition $\omega_c < \frac{2\omega}{5}$ est respectée, on obtient

$$y_2(t) = \frac{kR_0 i_0^2}{2} X = \frac{kR_0 i_0^2}{2} \Im(\underline{Z}).$$

I.E - Évolution de \underline{Z} en présence d'un défaut

I.E.1) Il est tout à fait impossible que les courbes données représente l'effet d'une fissure perpendiculaire à Ox sur l'impédance de la bobine ! Les courants de FOUCAULT sont peu ou prou tangent à la fissure et elle les empêche de tourner autour de Oz au fur et à mesure que la bobine se rapproche.

Lorsque la bobine s'approche de la fissure, les lignes des courants de FOUCAULT sont déviées puisqu'elles ne peuvent « traverser » cette fissure. L'impédance équivalente de la bobine est alors modifiée du fait que les courants induits sont alors réduits ; cela explique le fait que, ici, $\delta R < 0$ et $\delta L > 0$. Mais cette déformation des lignes augmente de façon monotone jusqu'à ce que la fissure soit au centre de la bobine.

À moins que, au vu des diagrammes de champ fournis, il existe une zone (située vers $1,5R_b$) où le courant est nul (cette zone est délimitée par la surface extérieure à la bobine par laquelle passent toutes les lignes de champ qui traverseront la bobine, ce qui fait que le flux à travers la plaque limitée à cette zone est nul) (?) Auquel cas, le courant s'annulant à la périphérie de cette zone, la perturbation serait plus faible, voire inexistante.

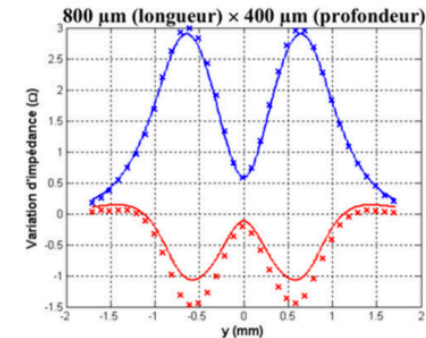
On se référera à http://mathinfo.univ-reims.fr/modcalc2/ModCalc2_Reims_LGEP.pdf, page 37, où l'on trouve exactement la courbe proposée dans l'énoncé mais associée à la détection d'une fissure le long de Ox par un système de 2 bobines !

C'est dans ce document que l'on comprends l'origine de la graduation en mm : c'est la taille de l'enroulement des bobines utilisées, alors que dans le sujet la bobine a un diamètre de 5 cm.

I.E.2) La perturbation des lignes lorsque la fissure est extérieure sera plus forte car ces lignes doivent alors contourner une fissure perpendiculaire à leurs directions. L'effet sera le plus important lorsque la fissure « coupe » la périphérie de la bobine, là où les courants sont les plus forts. Enfin, au centre, la disposition est identique au cas précédent et les valeurs maximales des déviations sont les mêmes.

On pourrait s'attendre à un diagramme proche du précédent mais avec une croissance monotone de la perturbation et une zone de déformation importante plus étendue.

Cependant à <http://publilgep.geeps.centralesupelec.fr/papers/001344.pdf>, page 22, on trouve la courbe



du même auteur ou il reprend exactement cette expérience, avec une bobine de 0,8 mm de diamètre. Comme l'auteur travaille à SupElec, et que le concours s'appelle Centrale-SupElec ...

Partie 2 – La transformateur piézoélectrique Centrale PSI 2023

II.A - L'effet piézoélectrique

Q 20. D'après le schéma 7b, les charges positives se déplacent globalement vers le haut, les charges négatives vers le bas, donc la face inférieure se charge négativement.

En l'absence d'indication, on suppose que seules des charges surfaciques apparaissent, la charge volumique restant nulle. Le champ total est la superposition des champs créés par l'armature inférieure (charge surfacique $\sigma < 0$) et par l'armature supérieure (charge surfacique $-\sigma$, pour respecter la neutralité du système global).

- Pour le plan inférieur ($z = 0$), il y a invariance par translations selon les directions x et y , donc les composantes des champs ne dépendent que de la variable z .
- Le potentiel $V_{\text{inf}}(z)$ ne dépend que de z , d'où

$$\vec{E}_{\text{inf}} = -\overrightarrow{\text{grad}} V(z) = \frac{dV}{dz} \vec{e}_z = E_{\text{inf}}(z) \vec{e}_z$$

- Le plan inférieur est plan de symétrie, donc les champs électriques en deux points symétriques sont symétriques, soit comme les champs sont colinéaires à \vec{e}_z : $E_{\text{inf}}(-z) = -E_{\text{inf}}(z)$
- L'application du théorème de Gauss au tube de champ compris entre $-z$ et $z > 0$, de section S donne

$$\oiint \vec{E}_{\text{inf}} \cdot d\vec{S}_{\text{sortant}} = E_{\text{inf}}(z)S - E_{\text{inf}}(-z)S = 2E_{\text{inf}}(z)S = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

d'où

$$\vec{E}_{\text{inf}}(z < 0) = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{e}_z ; \vec{E}_{\text{inf}}(z > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{e}_z$$

- Le raisonnement pour le plan supérieur ($z = d$) est identique, en remplaçant σ par $-\sigma$:

$$\vec{E}_{\text{sup}}(z < d) = -\frac{-\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{e}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{e}_z ; \vec{E}_{\text{sup}}(z > d) = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{e}_z$$

- Le principe de superposition donne enfin entre les deux faces ($0 < z < d$)

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{inf}}(z > 0) + \vec{E}_{\text{sup}}(z < d) = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{e}_z$$

Q 21. Dans les deux cas la tension est identique. Dans le système à deux couches cette tension est appliquée sur une distance deux fois moindre. Comme le champ est uniforme, on peut écrire l'expression de la tension pour les systèmes à une et à deux couches :

$$U = \int \vec{E}_{\text{ext}} \cdot d\vec{\ell} = E_{\text{ext}} d = E_2 \frac{d}{2}$$

soit

$$\vec{E}_2 = 2\vec{E}_{\text{ext}}$$

Dans le cas de N couches, la même tension est appliquée sur une distance d/N , d'où

$$\vec{E}_N = N\vec{E}_{\text{ext}}$$

En effectuant explicitement l'intégration

$$\vec{E}_N = N\vec{E}_{\text{ext}} = N \frac{U}{d} (-\vec{e}_z)$$

Pour une même tension imposée, le champ est N fois plus élevé, ce qui conduit à une déformation N fois plus importante.

II.B - Propagation de la déformation

L'énoncé n'est absolument pas clair : dans la partie IIA, une déformation perpendiculaire aux armatures conduit à un champ dans la même direction, et inversement. Dans la partie IIB, il semble que le champ et la déformation sont perpendiculaires (champ selon \vec{e}_z , déformation selon \vec{e}_x), mais on réutilise les résultats de la partie IIA sur le système à N couches, sans relier explicitement ces effets.

Q 22. En admettant que l'on puisse directement transposer les résultats de la partie IIA :
— pour le primaire à N couches, $E_p = NU_p/d$, d'où une déformation en largeur

$$\delta = \beta E_z = \beta NU_p/d$$

- au secondaire l'effet piézoélectrique inverse impose

$$E_z = \delta/\beta = NU_p/d$$

Comme le secondaire est constitué d'une couche unique, on en déduit

$$U_s = dE_z = NU_p$$

Le résultat précédent ne fait aucune référence à l'aspect variable ou non du champ électrique, donc ce transformateur peut fonctionner en régime stationnaire, contrairement au transformateur électromagnétique

Q 23. Le rapport F/S homogène à une pression s'exprime en Pa, ξ et x sont des longueurs, donc la dérivée $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ est sans dimension, donc la constante K est homogène à une pression et s'exprime en Pa.

La partie grisée exerce sur la partie située au-delà de $x + dx$ la force $\vec{F}_-(x + dx, t)$, donc d'après la loi de l'action et de la réaction la partie située au-delà de $x + dx$ exerce sur le système la force

$$\vec{F}_+(x + dx, t) = -\vec{F}_-(x + dx, t) = SK \frac{\partial \xi}{\partial x}(x + dx, t) \vec{u}_x$$

La force résultante sur le système a pour expression

$$\vec{F}_r = \vec{F}_-(x, t) + \vec{F}_+(x + dx, t) = KS \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}(x + dx, t) - \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) \right) \vec{u}_x$$

soit en se limitant à l'ordre 1

$$\vec{F}_r = KS \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx \vec{u}_x = KS \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \vec{u}_x$$

Q 24. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la tranche comprise entre x et $x + dx$ s'écrit

$$dm \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \vec{u}_x = d\vec{F}_r = KS \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \vec{u}_x$$

La masse de la tranche vaut $dm = \rho dV = \rho S dx$, soit, en projection sur l'axe \vec{u}_x

$$\rho S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = KS \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx$$

et après simplification

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{K} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Il s'agit de l'équation de d'Alembert, la célérité des ondes associée a pour expression

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

Q 25. Les conditions aux limites sont :

— en $x = 0$ le déplacement imposé $\xi(0, t) = \xi_0 \cos(\omega t)$ soit en notation complexe :

$$\xi(0, t) = \xi_0 \exp(j\omega t) = (\underline{A} + \underline{B}) \exp(j\omega t)$$

d'où, après simplification de l'exponentielle complexe :

$$\xi_0 = \underline{A} + \underline{B}$$

— en $x = L$ la condition d'extrémité libre, qui se traduit par la nullité de la force $\vec{F}_-(L, t) = -SK \left(\frac{\partial x i}{\partial x} \right) (L, t) \vec{u}_x$, soit en notation complexe :

$$0 = -SKjk(-\underline{A} \exp(j(\omega t - kL)) + \underline{B} \exp(j(\omega t + kL)))$$

soit après simplification par $SKjk \exp(j\omega t)$

$$-\exp(-jkL)\underline{A} + \exp(jkL)\underline{B} = 0 : \underline{B} = \exp(-2jkL)\underline{A}$$

\underline{A} et \underline{B} vérifient système linéaire des deux équations à deux inconnues précédent. En reportant l'expression de \underline{B} en fonction de \underline{A} précédente dans la première équation, on trouve

$$\underline{A} = \frac{\xi_0}{1 + \exp(-2jkL)} ; \underline{B} = \frac{\xi_0}{1 + \exp(-2jkL)} \exp(-2jkL)$$

d'où l'expression du champ de déformation (en séparant parties temporelle et spatiale des exponentielles) :

$$\xi_p(x, t) = \frac{\xi_0}{1 + \exp(-2jkL)} \exp(j\omega t) (\exp(-jkx) + \exp(-jk(2L - x)))$$

$$\xi_p(x, t) = \frac{\xi_0}{D} \exp(j\omega t) (\exp(-jkx) + \exp(-jk(2L - x)))$$

qui s'identifie à l'expression de l'énoncé, où

$$D = 1 + \exp(-2jkL)$$

le premier terme correspond à une onde progressive selon les x croissants, le second à une onde progressive selon les x décroissants. Le second terme peut être interprété comme l'onde réfléchié en $x = L$ associée au premier terme (onde incidente). En $x = L$ les deux ondes sont égales, donc l'onde de déplacement se réfléchit sans changement de signe, ce qui correspond à un déphasage nul.

Q 26. L'onde résultante est une onde stationnaire (l'extrémité est un nœud de vibration pour la force) dont l'amplitude est proportionnelle à x_{i0}/D . On en déduit la présence de résonances si D s'annule, soit la condition de résonance $1 + \exp(-2jkL) = 0$, qui conduit à la relation $2kL = \pi[2\pi]$, soit en utilisant la relation $f = \omega/(2\pi) = kc/(2\pi)$, l'expression des fréquences de résonance :

$$f = \frac{c}{4L} \left[\frac{c}{2L} \right] ; f_n = \left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{c}{2L}$$

où n est un entier positif non nul.

La fréquence de résonance minimale s'écrit

$$f_0 = f_1 = \frac{c}{4L} = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \frac{1}{4L} = \sqrt{\frac{2 \times 10^{11}}{7,8 \times 10^3}} \frac{1}{4 \times 2 \times 10^{-2}} = 63,3 \text{ kHz}$$

La divergence de l'amplitude peut conduire physiquement à la rupture du matériau, donc à sa destruction.

Q 27. En présence de la force supplémentaire, la seconde loi de Newton pour une tranche d'épaisseur dx s'écrit :

$$dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \vec{u}_x = KS \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \vec{u}_x - \frac{1}{\tau} \frac{\partial \xi}{\partial t} dm \vec{u}_x$$

puis après simplification

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

Q 28. On reporte la solution en onde plane harmonique dans l'équation précédente, pour obtenir la relation de dispersion :

$$-c^2 \underline{k}^2 = -\omega^2 + \frac{j\omega}{\tau}$$

En séparant partie réelle et imaginaire $\underline{k} = k' + jk''$, soit $\underline{k}^2 = k'^2 - k''^2 + 2jk'k'' \approx k'^2 + 2jk'k''$ (dans l'approximation $k' \ll k''$) :

$$k'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} ; 2k'k'' = \frac{-\omega}{\tau c^2}$$

Pour la solution $k' = \omega/c$ (onde se propageant selon les x croissants, la partie imaginaire a pour expression

$$k'' = -\frac{1}{2\tau c}$$

Q 29. La relation $k' = \omega/c$ est inchangée, donc les valeurs de k' étant imposées par les conditions aux limites, le phénomène de dissipation ne modifie pas les fréquences de résonance.

Du fait de la dissipation d'énergie les amplitudes aux fréquences de résonance sont finies (plus de divergence).

Q 30. D'après le graphe a) la puissance de sortie est maximale ($P_s = 4,5 \text{ mW}$) lorsque $1,7$, soit $R_c = 50 \text{ k}\Omega$. Pour cette valeur, le rendement vaut approximativement $\eta = 0,1$ puissance d'entrée $P_e = P_s/\eta \approx 28 \text{ mW}$, du même ordre de grandeur, mais inférieure ; déduite des tensions et intensité efficaces en entrée (20 V et $2,2 \text{ mA}$, soit un produit égal les deux grandeurs sont vraisemblablement déphasées en entrée).

$$P_e = 28 \text{ mW} ; P_s = 4,5 \text{ mW} ; P_{\text{perdue}} = 23,5 \text{ mW}$$

On constate que les pertes sont importantes.

La tension efficace en sortie vaut $U_s = 15 \text{ V}$ pour une résistance de charge $R_c = 50 \text{ k}\Omega$ puissance en sortie calculée

$$P'_s = \frac{U_s^2}{R_c} = 4,5 \text{ mW}$$

en accord avec la valeur donnée par le graphique a).