

**DS de Physique 12 février 2025**  
PSI - Lycée du Parc des Loges

**Durée 4H**

**Partie 1 – Contrôle non-destructif (CND) par courants de Foucault**

Le but des essais non destructifs est de détecter dans une pièce métallique, et en respectant son intégrité, toute particularité de sa structure. On souhaite ici contrôler la qualité d'une plaque d'aluminium, de faible épaisseur par rapport à ses autres dimensions, en utilisant une technique de contrôle non destructif par courants de Foucault.

Le dispositif utilisé comprend :

- une bobine alimentée par un générateur de tension sinusoïdale de fréquence  $f$ . Cette bobine est déplacée à la surface de la plaque à tester, sans contact électrique ;
- un système de mesure d'impédance par détection synchrone afin de mesurer en direct l'impédance de la bobine. En effet, la bobine joue à la fois le rôle d'émetteur et de récepteur : lorsque l'opérateur passe la bobine au dessus d'un défaut interne à la plaque, son impédance interne est légèrement modifiée.

La figure 1 présente le système de détection, le dispositif de mesure d'impédance n'est pas représenté.

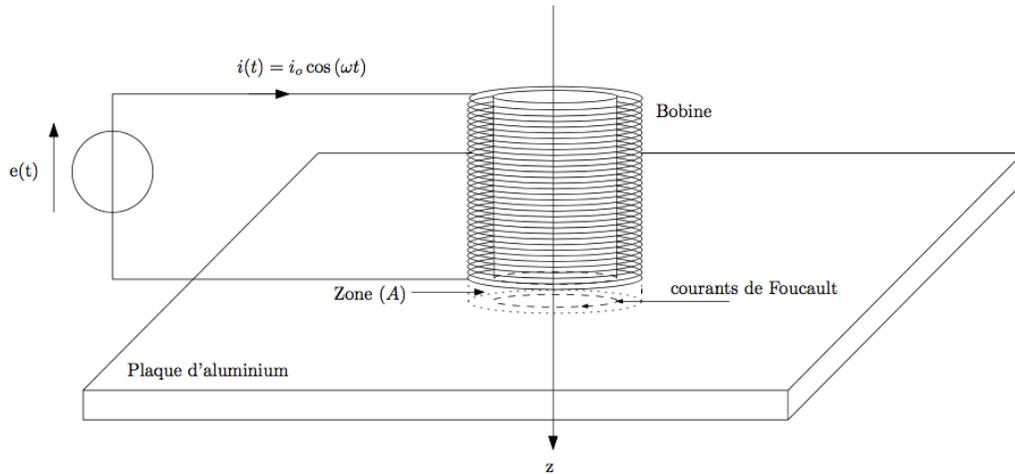


Figure 1 Principe du CND

Données :

fréquence du générateur	$f = 50 \text{ Hz}$
épaisseur de la plaque	$d = 3,0 \text{ mm}$
longueur de la bobine	$l_b = 12 \text{ cm}$
nombre de spire de la bobine	$N = 1,0 \times 10^3$
rayon moyen du bobinage	$R_b = 2,5 \text{ cm}$
masse molaire de l'aluminium	$M = 27 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
masse volumique de l'aluminium	$\mu = 2,7 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
conductivité électrique de l'aluminium	$\gamma_0 = 3,8 \times 10^7 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$
perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$

**I.A – Expression approchée du champ magnétique  $\vec{B}$  créé par la bobine excitatrice dans la plaque**

À l'aide d'un logiciel de simulation, on visualise les cartes du champ magnétique  $\vec{B}$  créé par la bobine dans différentes situations et ce afin d'établir son expression approchée.

Les figures 3, 4 et 5 représentent les cartes du champ créé par la bobine ainsi que les profils axiaux et radiaux de ce champ dans trois cas, avec une même amplitude de courant  $i_0$  :

- la bobine seule pour  $f = 50 \text{ Hz}$  (carte 1) ;
- la bobine en présence de la plaque pour  $f = 50 \text{ Hz}$  (carte 2) ;
- la bobine en présence de la plaque pour  $f = 200 \text{ Hz}$  (carte 3).

Le profil axial représente l'amplitude du champ magnétique  $\vec{B}$  en un point  $M$  appartenant à l'axe ( $Oz$ ) en fonction de sa coordonnée  $z$ , l'origine de cet axe étant choisie au centre de la bobine (voir figure 2). Le profil radial représente l'amplitude du champ magnétique  $\vec{B}$  en un point  $M$  appartenant au plan  $z = l_b/2$  en fonction de son abscisse  $x_r$  sur l'axe ( $M, \vec{e}_r$ ), l'origine de cet axe étant choisie sur un des côtés de la bobine (voir figure 2).

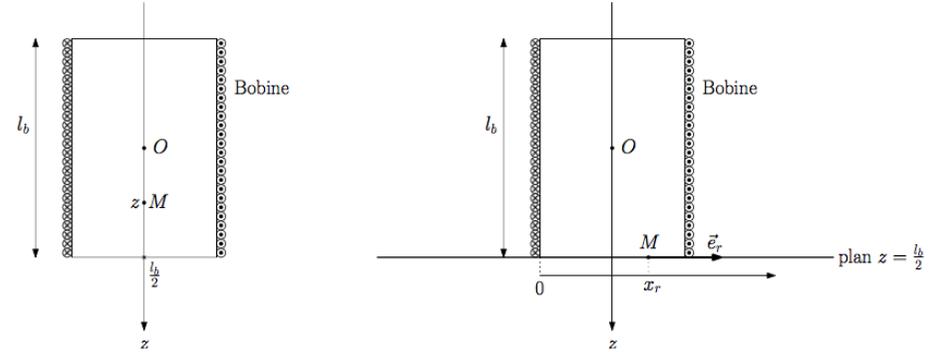


Figure 2 Conventions pour les profils axial et radial

I.A.1) Justifier que le champ créé en un point  $M$  de l'espace est de la forme

$$\vec{B}(M) = B_r(r, z, t)\vec{e}_r + B_z(r, z, t)\vec{e}_z$$

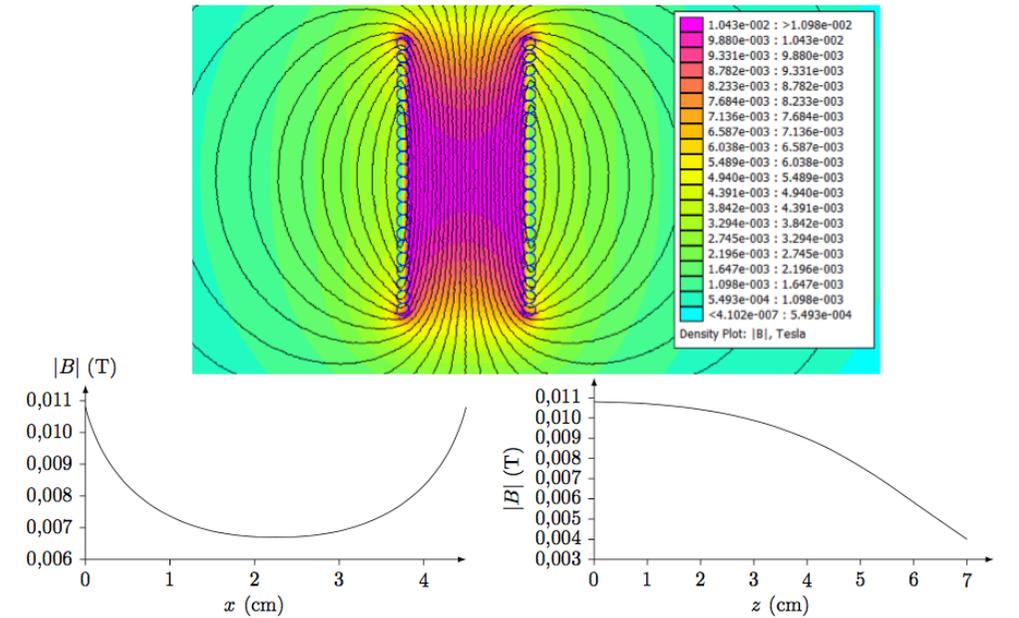


Figure 3 Première simulation

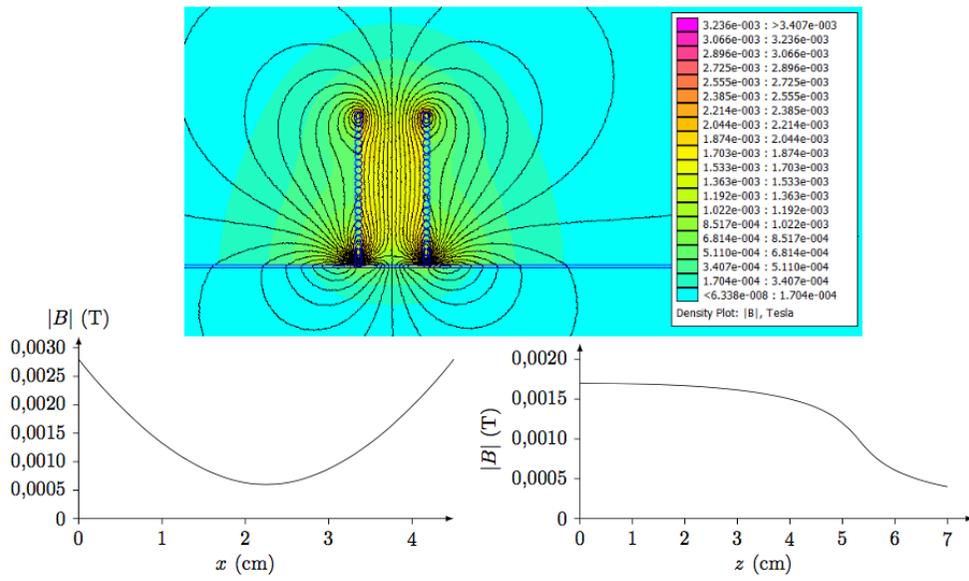


Figure 4 Deuxième simulation

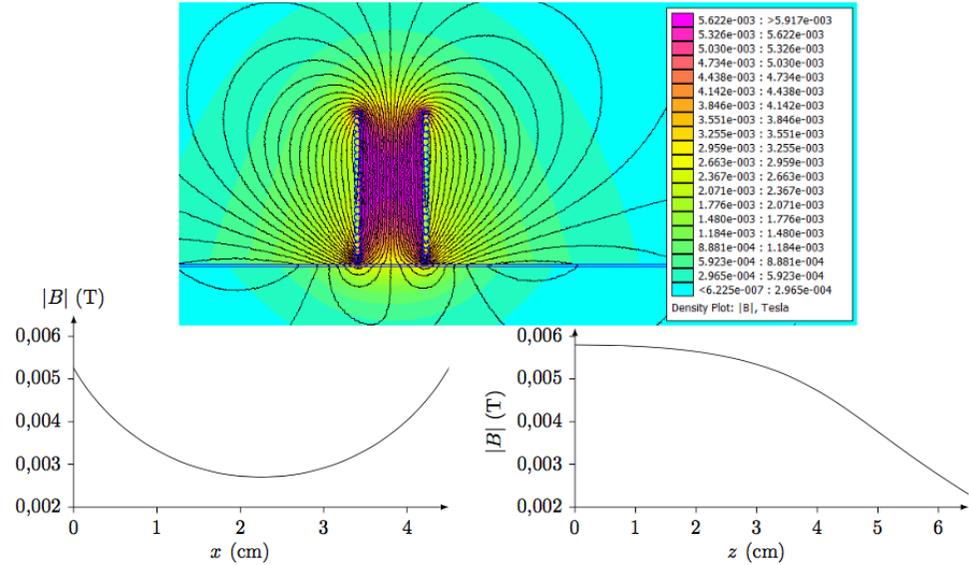


Figure 5 Troisième simulation

I.A.2) Affecter chaque simulation à chaque carte.

I.A.3) On s'intéresse au champ magnétique créé dans la partie de la plaque directement en contact avec la bobine (zone (A) sur la figure 1). Dans une première approximation, on suppose que le champ dans cette zone est de la forme  $\vec{B}(M) = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$  où  $B_0$  est l'amplitude du champ magnétique supposée uniforme.

a) En vous aidant des profils de la carte 2, proposer une valeur numérique pour  $B_0$ .

b) En considérant que le champ au centre  $O$  de la bobine peut être assimilé au champ créé par un solénoïde infini et en vous aidant de la carte 2, justifier que  $B_0$  peut s'écrire

$$B_0 = \alpha \frac{\mu_0 N i_0}{l_b} \quad (I.1)$$

où  $\alpha$  est un coefficient dont on précisera la valeur numérique.

### I.B – Courants de Foucault

On se place toujours dans l'hypothèse où le champ magnétique dans la zone (A) est de la forme  $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$ . Ce champ magnétique étant variable, il apparaît dans la plaque, un champ électrique  $\vec{E}$  orthoradial, lui-même à l'origine de courants induits.

I.B.1) À l'aide de la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday, déterminer dans la zone (A) l'expression du champ électrique  $\vec{E}$  induit par les variations temporelles de  $\vec{B}$ .

I.B.2) Établir que l'expression du vecteur densité volumique de courant  $\vec{j}$  est donnée par la relation  $\vec{j} = \frac{\gamma_0 \omega B_0}{2} r \sin(\omega t) \vec{e}_\theta$  où  $\vec{e}_\theta$  est le vecteur unitaire orthoradial des coordonnées cylindriques.

### I.C – Modification de l'impédance de la bobine excitatrice

L'impédance de la bobine en l'absence de la plaque est  $\underline{Z} = R + j\omega L$ . En présence de la plaque, cette impédance est modifiée. Le but de cette sous-partie est de déterminer cette nouvelle impédance.

On modélise les variations de l'impédance  $\underline{Z}$  de la bobine en présence de la plaque de la manière suivante

$$\underline{Z} = (R + \delta R) + j\omega(L - \delta L) \quad \text{où} \quad \delta R \langle i^2 \rangle = \langle P_J \rangle \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \delta L \langle i^2 \rangle = \langle E_m \rangle$$

avec

- $P_J$  la puissance dissipée par effet Joule par les courants de Foucault dans la plaque ;
- $E_m$  l'énergie magnétique stockée dans la plaque ;
- $\langle X \rangle$  désignant la valeur moyenne temporelle de la grandeur  $X(t)$ .

I.C.1) En exploitant soigneusement les annexes 1 et 2, déterminer les valeurs numériques de  $R$  et de  $L$  qui caractérisent l'impédance de la bobine en l'absence de la plaque.

I.C.2) Justifier à l'aide d'un argument énergétique simple, que la partie réelle de l'impédance de la bobine augmente.

I.C.3) Justifier, en utilisant les cartes données par les figures 3, 4 et 5, que la partie imaginaire de l'impédance de la bobine diminue.

I.C.4) Montrer que  $P_J = \frac{\pi d R_b^4 \gamma_0 \omega^2 B_0^2}{8} \sin^2(\omega t)$ .

Déduire, en utilisant la relation (I.1), l'expression de  $\delta R$  en fonction de  $\alpha$ ,  $N$ ,  $d$ ,  $R_b$ ,  $\gamma_0$ ,  $\omega$  et  $l_b$ .

I.C.5) L'énergie électromagnétique  $E_m$  est due au champ magnétique  $\vec{B}'$  créé par les courants de Foucault dans la plaque. Pour simplifier, on suppose que ce champ  $\vec{B}'$  est nul en dehors de la zone (A) et que dans la zone (A) il est de la forme  $\vec{B}' = B'(r, z, t) \vec{e}_z$ .

a) En utilisant la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Ampère écrite dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires, déterminer le champ magnétique  $\vec{B}'$  créé dans la zone (A). On supposera ce champ nul pour  $r = R_b$ .

b) En déduire l'expression de  $E_m$ .

c) Déduire, en utilisant la relation (I.1), l'expression de  $\delta L$  en fonction de  $\alpha$ ,  $N$ ,  $d$ ,  $R_b$ ,  $\gamma_0$ ,  $\omega$  et  $l_b$ .

I.C.6) Déterminer un ordre de grandeur de  $\delta R$  et  $\delta L$ . Conclure.

I.C.7) Discuter des avantages et inconvénients à travailler à fréquence plus élevée.

### I.D – Mesure de l'impédance de la bobine

Pour mesurer en temps réel l'impédance interne de la bobine, on utilise un montage à détection synchrone dont le schéma de principe est donné par la figure 6 et dans lequel la tension  $y_1(t)$  est proportionnelle à la partie réelle de  $\underline{Z}$  alors que la tension  $y_2(t)$  est proportionnelle à la partie imaginaire de  $\underline{Z}$ .

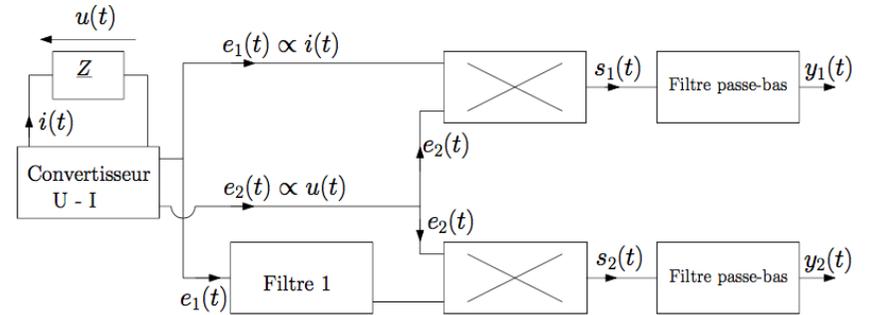


Figure 6 Mesure d'impédance par détection synchrone

Les deux multiplieurs sont identiques et leur fonctionnement est précisé figure 7.

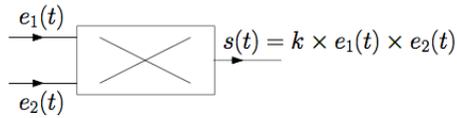


Figure 7 Fonctionnement d'un multiplieur

### I.D.1) Convertisseur courant-tension

Le but du convertisseur courant-tension est de fournir des images de la tension aux bornes de l'impédance et du courant la traversant. En vous aidant de l'annexe 2, montrer que le montage donné par la figure 8, dans lequel l'ALI fonctionne en régime linéaire, répond bien au cahier des charges. Plus précisément identifier la tension proportionnelle à  $i(t)$  et celle proportionnelle à  $u(t)$ .

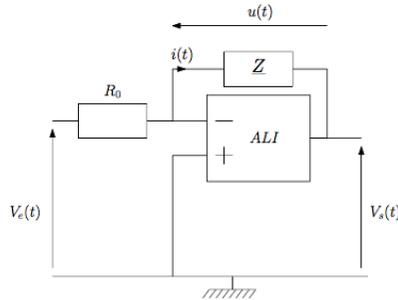


Figure 8 Convertisseur courant-tension

### I.D.2) Filtre 1

Le diagramme de Bode du filtre 1 est donné par la figure 9. Comment nomme-t-on un tel filtre ?

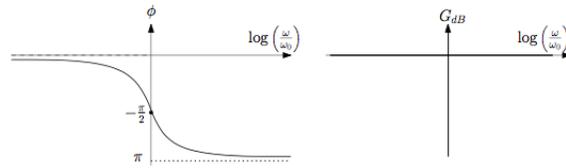


Figure 9 Diagramme de Bode du filtre 1

### I.D.3) Filtres passe-bas

Les filtres passe-bas sont identiques et ils ont les caractéristiques suivantes :

- le gain à basse fréquence doit être égal à un ;
- leur pulsation de coupure à  $-3$  dB est  $\omega_c$  ;
- l'atténuation pour  $\omega_1 = 5\omega_c$  doit être de 80 dB.

Montrer que le filtre de fonction de transfert  $H$  telle que

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}}$$

convient. Quelle valeur entière de  $n$  doit-on retenir pour satisfaire le cahier des charges du filtre ?

### I.D.4) Fonctionnement du montage complet

a) Déterminer les expressions de  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$  et  $s_1(t)$ . Comment choisir  $\omega_c$  pour que  $y_1(t)$  soit proportionnelle à  $\text{Re}(Z)$  ? Cette condition étant vérifiée en déduire l'expression de  $y_1(t)$ .

b) Comment choisir  $\omega_0$  et  $\omega_c$  pour que la tension  $y_2(t)$  soit proportionnelle à  $\text{Im}(Z)$  ? Ces conditions étant vérifiées en déduire l'expression de  $y_2(t)$ .

### I.E – Évolution de $Z$ en présence d'un défaut

La bobine est déplacée le long de la plaque suivant une trajectoire rectiligne. On note  $x$  sa position. Afin de détecter facilement la présence d'éventuels défauts, on observe  $\text{Re}(Z) - (R + \delta R)$  et  $\text{Im}(Z) - (L\omega - \delta L\omega)$  en fonction de  $x$ .

La plaque présente une fissure superficielle rectiligne, de 0,8 mm de largeur et de 0,4 mm de profondeur, représentée sur la figure 10 et l'opérateur déplace la bobine en direction de la fissure.

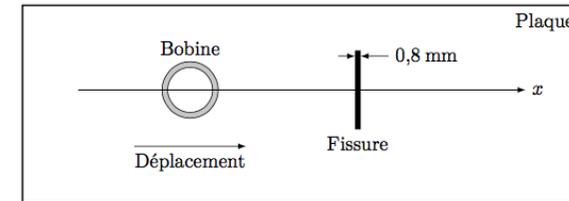


Figure 10 Déplacement de la bobine à la surface de la plaque (échelle non respectée)

La figure 11 présente des relevés effectués pour une fissure centrée en  $x = 0$ , lors d'une expérience similaire mais avec une bobine de configuration différente.

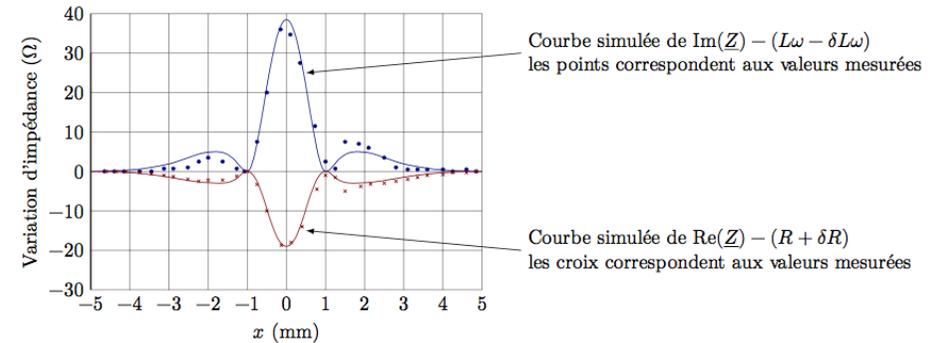


Figure 11 Mesure et simulation des variations de  $Z$ . D'après Yann Le Bihan, LGEP, CNRS—Supélec—Université Pierre et Marie Curie—Université Paris-Sud

I.E.1) Commenter les relevés.

I.E.2) Comment seraient modifiés les relevés si la fissure était suivant l'axe ( $Ox$ ) ?

# ANNEXES

## Annexe 1 : Mesure de l'impédance de la bobine détectrice

Pour mesurer l'impédance de la bobine, on réalise le montage donné figure 22 où

- la résistance  $R'$  vaut  $500 \Omega$  ;
- l'amplificateur linéaire intégré fonctionne en régime linéaire ;
- le générateur basse fréquence est réglé en générateur de créniaux de fréquence  $f = 1/T = 1 \text{ kHz}$  : pour  $0 \leq t \leq T/2$ ,  $e(t) = E = 5,00 \text{ V}$  et pour  $T/2 \leq t \leq T$ ,  $e(t) = 0$  ;
- la tension  $Y_1(t)$  est utilisée pour déclencher la carte d'acquisition. La fréquence d'échantillonnage étant  $f_e = 50 \text{ kHz}$  et la durée d'acquisition est de 20 ms.

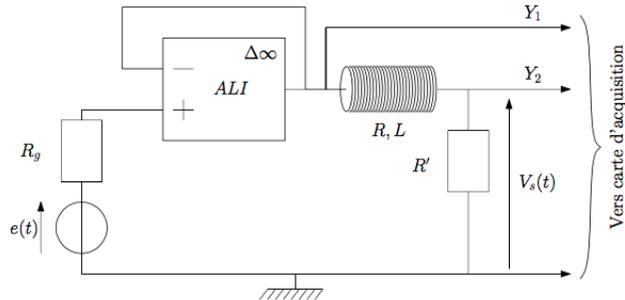


Figure 22 Schéma du montage

Le chronogramme de  $Y_2(t)$  est donné figure 23.

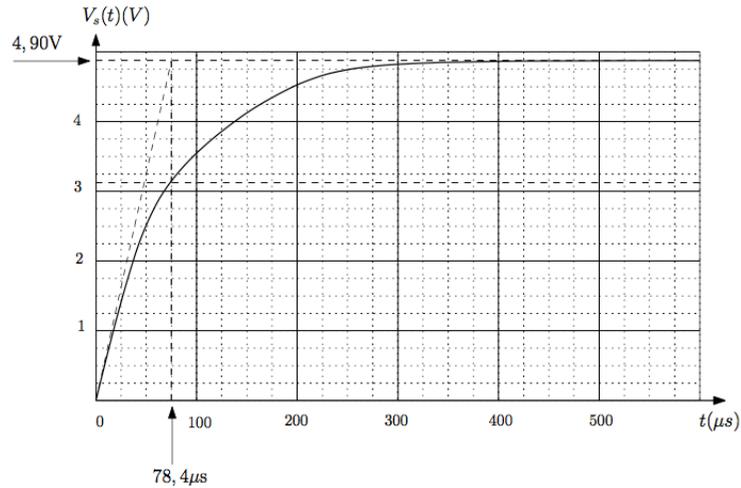


Figure 23 Chronogramme de  $Y_2$

## Annexe 2 : L'amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire

L'amplificateur opérationnel (ALI), représenté figure 24, est un composant électronique permettant d'amplifier la différence de potentiel entre les entrées  $V_+$  et  $V_-$ .

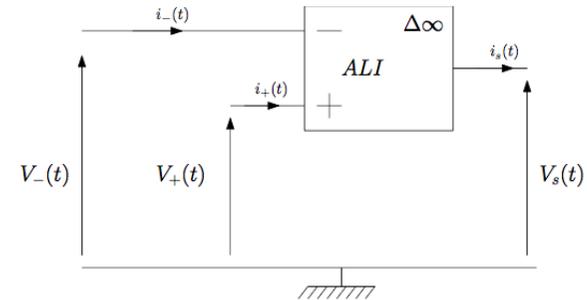


Figure 24 Représentation de l'ALI

Un ALI idéal est un ALI vérifiant les conditions suivantes :

1. les courants d'entrée  $i_+(t)$  et  $i_-(t)$  sont nuls ;
2. lorsque l'ALI idéal fonctionne en régime linéaire, on a  $V_+(t) = V_-(t)$  et  $|V_s(t)| < V_{\text{sat}} \approx 12 \text{ V}$  ;
3. lorsque l'ALI idéal fonctionne en régime non linéaire, on a :  $V_s(t) = +V_{\text{sat}}$  si  $V_+(t) > V_-(t)$  et  $V_s(t) = -V_{\text{sat}}$  si  $V_+(t) < V_-(t)$ .

## Partie 2 – Le transformateur piézoélectrique

Aucune connaissance préalable de l'effet piézoélectrique n'est nécessaire pour répondre aux questions de cette partie.

À partir des années 1990 ont été développées des classes de transformateurs compacts de gains en tension élevés. Leur principe repose sur la piézoélectricité, une propriété de certains matériaux comme le quartz ou les céramiques de titano-zirconates de plomb (PZT).

### II.A – L'effet piézoélectrique

Les matériaux piézoélectriques ont la faculté de faire apparaître un champ électrique sous l'effet d'une déformation mécanique (effet direct). Réciproquement, ces matériaux se déforment lorsqu'ils sont soumis à un champ électrique (effet inverse).

On considère un milieu cristallin ionique, isolant, homogène à l'échelle mésoscopique, mais dont les porteurs de charge, cations et anions, forment deux réseaux se déformant différemment sous l'effet de forces de compression (figure 7). Sans contrainte (figure 7a), la densité de charge est partout nulle. La permittivité relative du milieu est notée  $\epsilon_r$ .

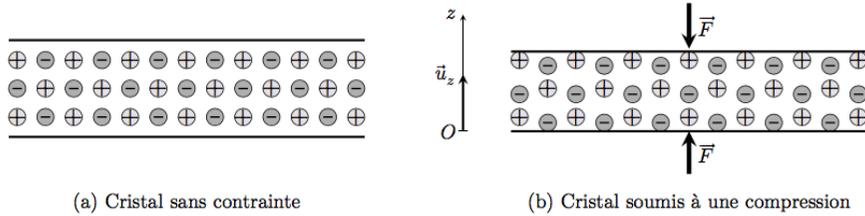


Figure 7 Cristal piézoélectrique

**Q 20.** Quel est le signe de la charge de la face inférieure qui apparaît en cas de compression (figure 7b) ? On note  $\sigma$  la densité surfacique de charge correspondante. Dans le cas d'un milieu illimité dans les directions orthogonales à  $Oz$ , en détaillant le raisonnement effectué, établir l'expression du champ électrique  $\vec{E}$  entre les deux faces en fonction de  $\sigma$  et des constantes électriques.

L'effet inverse est obtenu en appliquant un champ électrique  $\vec{E}_{\text{ext}}$  uniforme à un échantillon de matériau placé entre les armatures d'un condensateur. La déformation engendrée est proportionnelle au champ électrique appliqué.

La figure 8a représente un échantillon de matériau piézoélectrique parallélépipédique, d'épaisseur  $d$ , placé entre les armatures d'un condensateur. La figure 8b représente un échantillon à deux couches : un couple d'électrodes, isolées l'une de l'autre, est inséré entre deux couches de matériau, d'épaisseur  $d/2$ .

**Q 21.** Exprimer le champ électrique  $\vec{E}_2$  dans le cas des deux couches de la figure 8b, en fonction du champ  $\vec{E}_{\text{ext}}$  de la figure 8a. Généraliser au cas de  $N$  couches d'épaisseur  $d/N$  et exprimer  $\vec{E}_N$ . Exprimer enfin  $\vec{E}_N$  en fonction de la tension  $U$ , de l'épaisseur totale  $d$  et de  $N$ . Quel est l'avantage de ce système multicouche ?

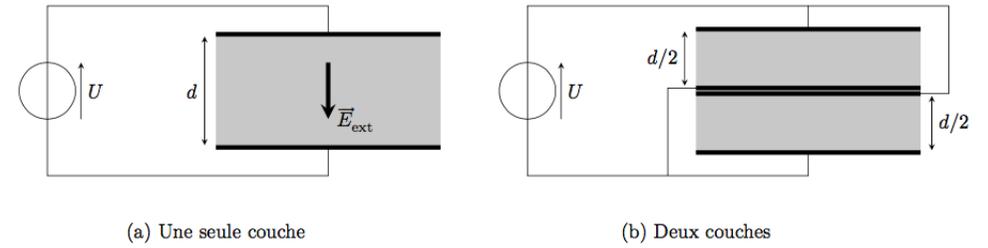


Figure 8 Matériau piézoélectrique placé dans un champ électrique

### II.B – Propagation de la déformation

Le champ électrique  $\vec{E} = E_z \vec{u}_z$  appliqué au matériau provoque une variation  $\delta$  de sa largeur  $L_a$  telle que

$$\delta = \beta E_z,$$

où  $\beta$  est une constante dépendant du matériau. À l'inverse, une variation  $\delta$  de la largeur provoque l'apparition d'une composante du champ électrique  $E_z$  (effet direct) telle que

$$E_z = \frac{\delta}{\beta}.$$

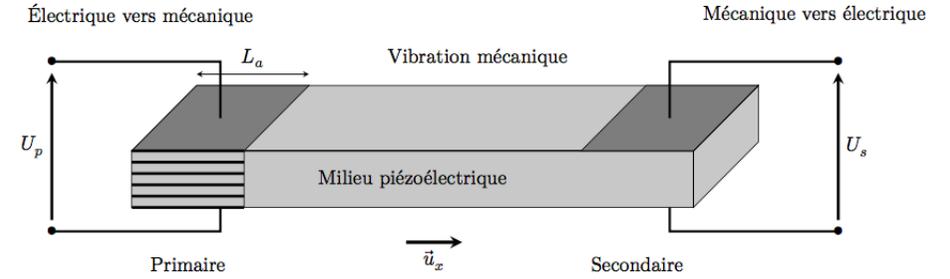


Figure 9 Principe du transformateur piézoélectrique — Au primaire, toutes les connexions aux électrodes multicouches n'ont pas été représentées

**Q 22.** On considère le schéma du transformateur de la figure 9. Le primaire est formé de  $N$  couches, le secondaire d'une seule. Si l'amplitude de la déformation au secondaire est identique à celle du primaire, quel est le rapport  $m$  de transformation en tension ? Ce transformateur fonctionnerait-il pour des signaux stationnaires ?

Une tension harmonique  $U_p(t) = U_0 \cos(\omega t)$  entraîne ainsi une déformation de même pulsation du matériau, déformation qui se propage selon l'axe  $Ox$ . Le matériau a la forme d'un barreau de section constante  $S$ . Parmi les modes de vibration possibles, on s'intéresse au mode longitudinal. La déformation longitudinale est représentée par le déplacement  $\xi(x, t)$  de la tranche située à l'abscisse  $x$  au repos (figure 10). On s'intéresse à un modèle aux faibles déformations.

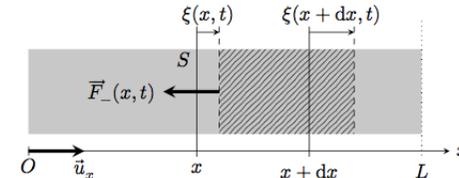


Figure 10 Propagation d'une onde acoustique longitudinale dans un barreau piézoélectrique

On considère le système matériel compris entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  quand le milieu est au repos, de masse  $dm = \rho S dx$  où  $\rho$  est la masse volumique du matériau (partie hachurée sur la figure 10). La force  $\vec{F}_-(x, t)$  exercée par le matériau en deçà de  $x + \xi(x, t)$  sur le système s'exprime par

$$\vec{F}_-(x, t) = -SK \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) \vec{u}_x$$

où  $K$  est une constante caractéristique du matériau.

**Q 23.** Quelle est la dimension de la constante  $K$  ? Exprimer la force  $\vec{F}_+(x+dx, t)$  exercée sur le système par la partie du matériau située au-delà de  $x+dx$ . En déduire la force résultante  $d\vec{F}_r$  sur le système à l'ordre un en  $dx$ .

**Q 24.** En assimilant la quantité de mouvement du système à  $dm \frac{\partial \xi}{\partial t}(x, t) \vec{u}_x$ , établir l'équation de propagation

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0.$$

Donner l'expression de la constante  $c$  en fonction de  $K$  et  $\rho$ . Quel est le nom de cette équation ?

Les vibrations engendrées par le déplacement en  $x=0$  se propagent dans le barreau, dans les deux sens, sous forme d'ondes planes harmoniques. On note  $\vec{k} = k\vec{u}_x$  le vecteur d'onde.

L'extrémité en  $x=L$  du barreau est libre. En  $x=0$ , l'amplitude forcée est donnée par  $\xi(0, t) = \xi_0 \cos(\omega t)$ . La solution plane harmonique complexe s'exprime selon

$$\xi_p(x, t) = \underline{A} \exp(j(\omega t - kx)) + \underline{B} \exp(j(\omega t + kx)).$$

**Q 25.** Déterminer les constantes complexes  $\underline{A}$  et  $\underline{B}$  en fonction de  $\xi_0$ ,  $k$  et  $L$ . En déduire que l'amplitude complexe est de la forme

$$\xi_p(x, t) = \frac{\xi_0}{D} \exp(j\omega t) \left[ \exp(-jkx) + \exp(-jk(2L-x)) \right]$$

et exprimer le dénominateur  $D$ . Donner la signification physique de chaque terme de cette expression. De quel déphasage  $\Delta\varphi$  s'accompagne la réflexion de l'onde de déplacement ?

**Q 26.** En déduire les fréquences  $f_n$  de résonance du barreau en fonction de  $c$ ,  $L$  et d'un entier  $n$  non nul. Calculer la fréquence minimale  $f_0$  pour une céramique PZT de longueur  $L=2$  cm. Que devient l'amplitude des vibrations aux fréquences de résonance ? Quel est l'inconvénient de la résonance pour un matériau solide ?

En réalité des phénomènes dissipatifs affectent la propagation de l'onde dans le milieu. On les modélise en prenant en compte une force supplémentaire

$$d\vec{f}_d = -\frac{1}{\tau} \frac{\partial \xi}{\partial t}(x, t) dm \vec{u}_x$$

sur le système de masse  $dm$  considéré auparavant.  $\tau$  est une constante.

**Q 27.** Établir la nouvelle équation des ondes.

Les solutions planes harmoniques complexes de l'équation précédente s'écrivent

$$\xi(x, t) = \underline{X}_0 \exp(j(\omega t - \underline{k}x))$$

où  $\underline{X}_0$  est une constante complexe et  $\underline{k} = k' - jk''$  avec  $k'$  et  $k''$  des constantes réelles vérifiant  $|k''| \ll |k'|$ .

**Q 28.** Établir la relation de dispersion. Exprimer  $k''$  en notant que  $k' \simeq \frac{\omega}{c}$ .

**Q 29.** Qualitativement, quelles sont les modifications qu'apportent les phénomènes dissipatifs sur les fréquences de résonance et sur les amplitudes à ces fréquences ?

**Q 30.** Dans la figure A du document réponse, sont décrites des simulations de fonctionnement d'un transformateur piézoélectrique alimentant une résistance de charge  $R_c$ . Analyser qualitativement et quantitativement ces graphes de façon à

- donner les valeurs des puissances d'entrée et de sortie et la puissance perdue lorsque la puissance de sortie est maximale. Commenter ;
- déterminer si les valeurs de la tension de sortie et la puissance de sortie sont en accord.

## Constantes générales

Constante de Planck réduite

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,055 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

Constante d'Avogadro

$$N_a = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Charge élémentaire

$$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Masse de l'électron

$$m_e = 9,0 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

Permittivité diélectrique du vide

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$$

Perméabilité magnétique du vide

$$\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$$

## Propriétés physiques

Conductivité du cuivre

$$\gamma_{\text{Cu}} = 5,9 \times 10^7 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$$

Masse volumique du fer

$$\rho_{\text{Fe}} = 7,87 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$$

Masse molaire du fer

$$M_{\text{Fe}} = 55,8 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$$

Masse volumique du PZT

$$\rho_{\text{PZT}} = 7,8 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$$

Constante  $K$  du PZT

$$K_{\text{PZT}} = 2 \times 10^{11} \text{ SI}$$