

Ex 1. Modèle d'une flûte



Rappel: CL pour les tuyaux sonores
ici pas de propagation guidée
comme si milieu illimité

Tuyau ouvert

- pression: $p(x=0,t) = p(x=l,t) = p_0$
- vitesse $\hookrightarrow p_2(x=0,t) = p_2(x=l,t) = 0!$

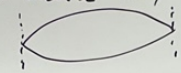
noeud de pression \leftrightarrow ventre de vitesse

Tuyau fermé

noeud de vitesse \leftrightarrow ventre de pression
vitesse nulle du solide rigide qui ferme le bout

Rq: si membrane souple \rightarrow on applique PFD pour la CL.

Résoudre sans calcul pour trouver $\omega_n, k_n \dots$ fondamental
 $L = n \frac{\lambda}{2}$



- 2) Onde incidente $\rightarrow p_1(x,t) = P_{10} e^{j(\omega t - kx)}$ \rightarrow milieu linéaire $m \omega$
Onde réfléchie $p_2(x,t) = P_{20} e^{j(\omega t + kx)}$ \rightarrow m même milieu avec m' ω
 $\hookrightarrow m' k = \omega/c$
($P_{20} = P_{10} e^{j\phi} = \alpha P_{10}$)

• CL: $p_{totale}(x=0,t) = 0 = P_{10} e^{j\omega t} + P_{20} e^{j\omega t}$ (vt)
 $P_{20} = -P_{10} \rightarrow \alpha = -1 \rightarrow$ réflexion totale en opposé de phase! ($\phi = \pm \pi$)

$p_{totale} = p_1(x,t) + p_2(x,t)$
 $= P_{10} e^{j\omega t} [e^{-jkx} - e^{jkx}]$
 $= -2j P_{10} e^{j\omega t} \sin kx$
 $p_{totale} = +2 P_{10} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \sin kx$

$p_2 \text{ totale} = 2 P_{10} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \sin kx$
 $p_1 \text{ totale} = 2 P_{10} \sin \omega t \sin kx \rightarrow$ on a des stationnaires harmoniques
CL $p_1 \text{ totale}(x=l,t) = 0$ (vt)

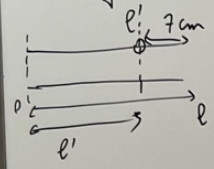
$\sin kl = 0 \rightarrow kl = n\pi$ $n \in \mathbb{N}^*$
 $\hookrightarrow k_n = \frac{n\pi}{l}$
 $\omega_n = k_n c = n \frac{\pi c}{l}$

l_c est la longueur qui fait la fréquence de la note
grad $l \rightarrow$ basse
petit $l \rightarrow$ aigus

3) $c = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}} \rightarrow$ fond. $\omega_n = \frac{\pi c}{l} \rightarrow l = 65 \text{ cm}$

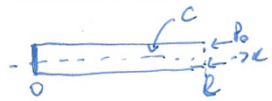
4) Fondamental $n=1 \Rightarrow f_1 = \frac{c}{2l} = \frac{259 \text{ Hz}}{2} = 129.5 \text{ Hz}$
 $\neq 264 \text{ Hz}$

5) $l' = \frac{c}{2f_1} = 58 \text{ cm} \rightarrow$ de longueur totale



les sons st de + en + aigus ($l \downarrow f \uparrow$)
qd on débouche les trous depuis le bout de la flûte.

Ex 2 : Modèle de clarinette



1) Superposition de 2 OPP (Ox^+) et (Ox^-) (de même ω et même k) \rightarrow onde stationnaire après réflex^o aux extrémités

2) Supposons 2 OPP de vitesse

$$\underline{v}_1 = v_0 e^{j(\omega t - kx)} \text{ selon } (Ox^+) \rightarrow \vec{k} = k \vec{u}_x \text{ avec } k = \frac{\omega}{c}$$

$$\underline{v}_2 = v_0 e^{j(\omega t + kx)} \text{ selon } (Ox^-) \rightarrow \vec{k} = -k \vec{u}_x$$

En $x=0$ condit aux limites sur le piston rigide \rightarrow mouvement de vibration (vitesse de suppres^o)

$$v(x=0, t) = 0 = \underline{v}_1(0, t) + \underline{v}_2(0, t)$$

$$0 = v_0 e^{j\omega t} + v_0 e^{j\omega t}$$

$$0 = v_0 + v_0 \rightarrow v_0 = -v_0$$

$$v = v_1 + v_2 = v_0 e^{j\omega t} [e^{-jkx} - e^{jkx}]$$

$$= -2j v_0 e^{j\omega t} \sin kx = 2v_0 e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} \sin kx$$

donc $v_2(x, t) = k e(v) = 2v_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \sin kx$

$$v_2(x, t) = 2v_0 \sin \omega t \sin kx$$

(q) on aurait pu utiliser aussi

$$p_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

On n'a pas globalement $p(x, t) = \frac{1}{2} v(x, t)$!

3) Il reste la condit aux limites en $x=l$ \rightarrow mouvement de suppres^o et vitesse de vitesse

$$p(x=l, t) = 0$$

$$\text{et } v_2(x=l, t) = v_{\max} = 2v_0$$

4) Modes propres / $p(x=l, t) = 0 = p_0 \cos \omega t \cos kl$

$$\cos kl = 0 \Rightarrow k_{nl} = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{\pi}{2} (2n+1) \quad n \in \mathbb{N}$$

(q) la condit aux limites sur la vitesse donne le même résultat si $k_{nl} = \max ! \Rightarrow k_{nl} = \frac{\pi}{2} + n\pi$

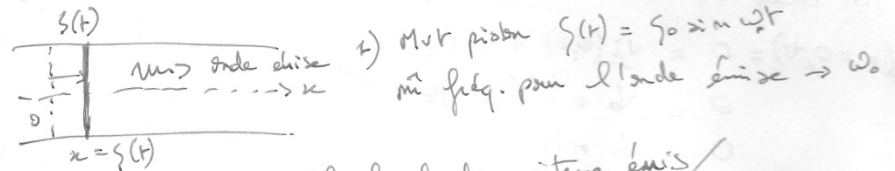
$$\omega_n = k_n c = \frac{\pi c}{2l} (2n+1) \rightarrow \text{modes propres}$$

$$\text{Ici } \omega_f(\text{clarinette}) = \frac{\pi c}{2l} \text{ et } \omega_f(\text{flûte}) = \frac{\pi c}{l}$$

Pour la même longueur, la clarinette jouera un fondamental de freq. + faible (son + grave) \rightarrow hauteur + faible.

$$G_{\text{effectif}} = \frac{l}{2} \quad f = 264 \text{ Hz}$$

Ex 3 : Emission d'une onde sonore



2) Prenons comme réf. le dp de vitesse émis / sur le piston mobile :

$$v_2(x, t) = v_0 \cos(\omega_0 t - kx) \text{ alors } p_2(x, t) = \rho_0 v_2 = \rho_0 c v_2$$

$$= \rho_0 c v_0 \cos(\omega_0 t - kx)$$

Exprimons les condit aux limites en $x = \xi(t)$ sur le piston mobile :

- continuité de la vitesse / $v_{\text{piston}} = v_2(x = \xi, t)$

- pression $p = p_0$ en $\xi(t)$ et $p = p_0 + p_2(\xi, t)$ en $\xi(t)^+$ (côté intérieur)

Exploitions la vitesse $v_{\text{piston}} = \frac{d\xi}{dt} = \xi_0 \omega_0 \cos \omega_0 t = v_0 \cos(\omega_0 t - k\xi_0)$ ($v(t)$) CL

Dans l'approx. acoustique $k\xi_0 = \frac{\xi_0}{\lambda} \ll 1$ déplacement de faible amplitude par rapport à λ

donc $\cos(\omega_0 t - k\xi_0) \approx \cos \omega_0 t$

et $v_0 = \xi_0 \omega_0 \rightarrow v_2(x, t) = \xi_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t - kx)$ et $p_2(x, t) = \rho_0 c v_2(x, t)$

3- Puissance moyenne des forces de pression en (4) sur le piston!

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P} &= \langle -PS \vec{u}_z \cdot \vec{v}_z \rangle && \text{approx. acoustique} \\
 &= \langle -(p_0 + p_1(r,t)) S v_1(r,t) \rangle && \text{avec } v_1(r,t) \approx v_1(0,t) \\
 &= -S \langle p_0 v_1(0,t) \rangle - S \langle p_1(0,t) v_1(0,t) \rangle && \text{or } p_1(r,t) \approx p_1(0,t) \\
 &\hookrightarrow \langle \cos \omega t \rangle = 0 \\
 &= -S \langle z v_1^2 \rangle = -\frac{S z v_0^2}{2}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{P} = -\frac{\rho_0 c S}{2} v_0^2}$$

avec $v_p = \rho_0 \omega_0 \cos \omega t$
 $= v_0 \cos \omega t$

Analogie de $\mathcal{P} = -\langle \alpha \vec{v} \cdot \vec{v} \rangle = -\langle \alpha v^2 \rangle = -\alpha \frac{v_0^2}{2}$
 avec $\alpha = \rho_0 c S$ avec $\left| \frac{\mathcal{P}}{v} \right| = -\alpha v$

4- Dans le cas de l'arrêt du HP \rightarrow régime libre avec seule force $-\alpha \vec{v}$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha \vec{v} \rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\alpha}{m} \vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = 0$$

$$\boxed{\tau = \frac{\rho_0 c S}{m} \rightarrow \text{temps caractéristique}}$$

Ex 4 - Emission d'une sphère pulsante : type résolvant de problème

émission d'une onde sphérique divergente / à la pulsat ω !

$r(t) = r_0 + a \cos \omega t$
 ($a \ll 1$ selon l'approx. acoustique)

$p_1(r,t) = \frac{A}{r} e^{j(\omega t - kr)}$

On déduit la forme générale de $\vec{v}_1 = v_r \vec{u}_r$ du PFD linéaire / en proj. sur \vec{u}_r

$$\rho_0 \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{\partial p_1}{\partial r} \Rightarrow r^2 \rho_0 j \omega v_r = A (1 + jkr) e^{j(\omega t - kr)}$$

continuité de la vitesse en $r(t)$

$$\begin{aligned}
 v_r(r,t) &= v_{\text{sphère}} && \text{avec } v_{\text{sphère}} = \frac{dr}{dt} = a j \omega e^{j \omega t} \\
 v_r(r,t) &\approx v_r(r_0, t) \\
 &\hookrightarrow \text{car } a \ll 1 \text{ approx acoustique} \\
 v_r &= A_1 \frac{(1 + jkr_0) e^{-jkr_0}}{\rho_0 j \omega r_0^2} e^{j \omega t}
 \end{aligned}$$

$$\text{donc } r_0^2 a j \omega = A_1 \frac{(1 + jkr_0) e^{-jkr_0}}{\rho_0 j \omega}$$

$$A_1 = -\frac{\rho_0 a \omega^2 r_0^2 e^{jkr_0}}{1 + jkr_0}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I} &= \langle p_1 v_r \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} (p_1 v_r^*) \\
 &= \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{A_1}{r} \times A_1^* \left(\frac{1 + jkr}{\rho_0 r^2 j \omega} \right)^* \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{|A_1|^2}{r} \text{Re} \left(+ \frac{jkr}{\rho_0 r^2 j \omega} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{|A_1|^2}{\rho_0 c r^2} && \frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}
 \end{aligned}$$

$$\text{avec } |A_1|^2 = \frac{\rho_0^2 a^2 \omega^4 r_0^4}{1 + (kr_0)^2}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P} &= \iint_S \mathcal{I} ds = \frac{4\pi |A_1|^2}{2 \rho_0 c} \\
 &= \frac{2\pi |A_1|^2}{\rho_0 c} = \frac{2\pi \rho_0 \omega^4 r_0^4 a^2}{c (1 + (kr_0)^2)}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{2\pi \rho_0 \omega^4 r_0^4 a^2}{c (1 + \frac{\omega^2 r_0^2}{c^2})}}$$

\rightarrow si on augmente r_0 ou $a \rightarrow \mathcal{P} \uparrow$
 \rightarrow si $\omega \uparrow \mathcal{P} \uparrow$ car vitesse \uparrow !

31.5 Modes propres dans une cavité sphérique

1. $P(r,t)$ est la somme de deux ondes sphériques progressives harmoniques, la première se déplaçant dans le sens des r croissants, la seconde des r décroissants.

2. Le PFD linéarisée, $\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad} P_1$, devient, en projection sur \vec{u}_r :

$$\underline{v} = -\frac{j}{\rho_0 \omega_1 r^2} A \exp(j(\omega_1 t - k_1 r)) + \frac{1}{\rho_0 c r} A \exp(j(\omega_1 t - k_1 r)) - \frac{j}{\rho_0 \omega_2 r^2} B \exp(j(\omega_2 t + k_2 r)) - \frac{1}{\rho_0 c r} B \exp(j(\omega_2 t + k_2 r))$$

3. Paroi rigide en $r = R$ donc $v(R,t) = 0$. Vrai pour tout t donc $\omega_1 = \omega_2$, notés ω .

De plus, chaque onde satisfait à l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2(rP)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(rP)}{\partial t^2} = 0 = -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow k_1 = k_2 = \frac{\omega}{c}.$$

P ne diverge pas en $r = 0$. Or $\lim_{r \rightarrow 0} P(r,t) = \exp(j\omega t) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{A+B}{r}$. Ce terme ne diverge pas si $A+B=0$, soit $B=-A$. Dès lors :

$$\underline{v} = -\frac{j}{\rho_0 \omega r^2} A \exp(j(\omega t - kr)) + \frac{j}{\rho_0 \omega r^2} A \exp(j(\omega t + kr)) + \frac{1}{\rho_0 c r} A \exp(j(\omega t - kr)) + \frac{1}{\rho_0 c r} A \exp(j(\omega t + kr)),$$

soit :

$$\underline{v} = -\frac{j}{\rho_0 \omega r^2} A \exp(j\omega t) (-\exp(-jkr) + \exp(jkr)) + \frac{1}{\rho_0 c r} A \exp(j\omega t) (\exp(-jkr) + \exp(jkr)),$$

puis :

$$\underline{v} = -\frac{2A}{\rho_0 \omega r^2} \sin(kr) \exp(j\omega t) + \frac{2A}{\rho_0 c r} \cos(kr) \exp(j\omega t).$$

Remarque : $P(r,t) = -2j \frac{A}{r} \sin(kr) \exp(j\omega t)$.

4. $\underline{v}(R,t) = 0$ implique $\tan(kR) = \frac{\omega}{c} R$ donc $\tan\left(\frac{\omega}{c} R\right) = \frac{\omega}{c} R$. On résoud graphiquement en traçant les fonctions $\omega \mapsto \tan\left(\frac{\omega}{c} R\right)$ (en noir) et $\omega \mapsto \frac{\omega}{c} R$ (en gris). Les pulsations propres sont les valeurs de ω aux intersections.

