

## DS de Physique 13 Mars 2024 - Physique

PSI - Lycée du Parc des Loges

Durée 4H

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Les calculatrices sont autorisées

- Les résultats numériques exprimés sans unité ou avec une unité fautive ne seront pas comptabilisés.
- Les explications qualitatives des phénomènes interviennent dans la notation au même titre que les calculs.
- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le candidat ou la candidate.

### Partie I – Transmission de signal par câble coaxial

Un câble coaxial, représenté en **figure 1**, est constitué d'un fil de cuivre cylindrique central, de rayon  $a$ , appelé âme, et d'un conducteur cylindrique creux de même axe de révolution, également en cuivre, appelé gaine et de rayon intérieur  $b$ . Un isolant occupe tout l'espace entre l'âme et la gaine. À l'entrée du câble coaxial, on place un générateur de tension, non représenté, entre l'âme et la gaine.

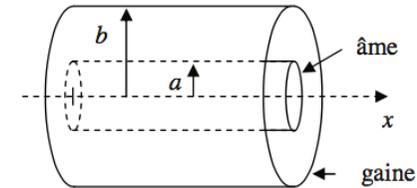


Figure 1 – Structure d'un câble coaxial

On modélise le câble coaxial, milieu continu, par une ligne électrique à constantes réparties, pour laquelle on note respectivement  $L$  et  $C$  les inductance et capacité par unité de longueur. La ligne est modélisée par une succession de tronçons élémentaires de longueur  $dx$ , considérés comme des quadripôles élémentaires auxquels sont associées une inductance  $dL = L \cdot dx$  et une capacité  $dC = C \cdot dx$ . Le schéma électrique d'un tronçon de ligne de longueur  $dx$  est représenté en **figure 2**. Dans ce modèle, on néglige toute perte résistive. On note  $i(x,t)$  et  $i(x+dx,t)$  les intensités des courants dans la ligne, à l'instant  $t$ , aux abscisses respectives  $x$  et  $x+dx$ . On note  $u(x,t)$  et  $u(x+dx,t)$  les tensions entre l'âme et la gaine, à l'instant  $t$ , aux abscisses respectives  $x$  et  $x+dx$ . Les tensions et courants sont des signaux sinusoïdaux alternatifs de fréquence  $f$ .

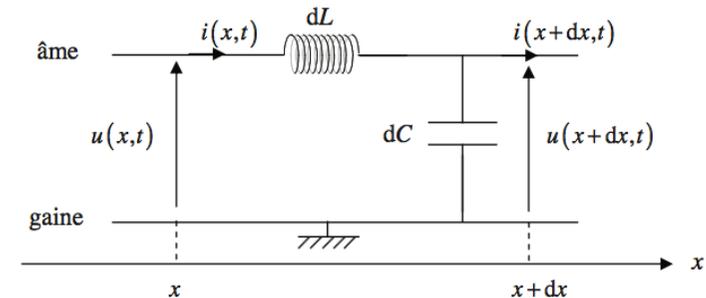


Figure 2 – Schéma électrique d'un tronçon de ligne de longueur  $dx$

## I.1 – Le câble coaxial parfait

**Q2.** Démontrer que les deux équations différentielles couplées sur  $u$  et  $i$  sont :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -\Lambda \cdot \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = -\Gamma \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}.$$

Vous considérez, notamment, que :  $\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$  à l'ordre 0 en  $dx$ .

**Q3.** Montrer que  $u(x,t)$  et  $i(x,t)$  obéissent à deux équations de propagation de D'Alembert.

En déduire l'expression de la vitesse de propagation  $v$  des signaux dans la ligne en fonction de  $\Lambda$  et  $\Gamma$ . Vérifier sa dimension.

**Q4.** On étudie les solutions des équations de D'Alembert en régime permanent sinusoïdal. La tension  $u(x,t)$  correspond à la partie réelle de la tension complexe  $\underline{u}(x,t)$ . L'intensité  $i(x,t)$  correspond à la partie réelle de l'intensité complexe  $\underline{i}(x,t)$ . On propose, avec  $j$  le nombre complexe tel que  $j^2 = -1$ , des solutions complexes des équations de propagation de la forme :

$$\underline{u}(x,t) = \rho \cdot i_0 \cdot \exp(j(\omega \cdot t - k \cdot x)) - \rho \cdot i_1 \cdot \exp(j(\omega \cdot t + k \cdot x))$$

et

$$\underline{i}(x,t) = i_0 \cdot \exp(j(\omega \cdot t - k \cdot x)) + i_1 \cdot \exp(j(\omega \cdot t + k \cdot x)).$$

Vérifier que  $\underline{u}(x,t)$  est compatible avec l'équation trouvée à la question **Q3**, à une condition sur  $v$ ,  $\omega$  et  $k$  qu'on explicitera.

Donner une interprétation physique de chacun des deux termes présents dans les expressions de  $\underline{u}(x,t)$  et  $\underline{i}(x,t)$ .

Pour la suite, nous considérerons toujours  $i_0$  non nul.

Et  $i_1$  une amplitude pouvant être complexe.

**Q5.** Donner l'expression de  $\rho$  en fonction de l'impédance caractéristique  $Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$ .

Préciser son unité.

**Q6.** L'extrémité du câble, de longueur  $d$ , est fermée sur une impédance  $\underline{Z}$ . Exprimer  $i_1$  en fonction de :  $i_0$ ,  $\underline{Z}$ ,  $\rho$ ,  $k$  et  $d$ .

On pourra utiliser, pour la question suivante, le coefficient de réflexion pour l'intensité en bout de ligne :

$$\underline{r} = \frac{i_1}{i_0} \quad \text{et son expression.}$$

**Q7.** L'impédance totale de la ligne vue depuis l'abscisse  $x$ , notée  $\underline{Z}_l(x)$ , a pour expression :

$$\underline{Z}_l(x) = \frac{\underline{u}(x,t)}{\underline{i}(x,t)}.$$

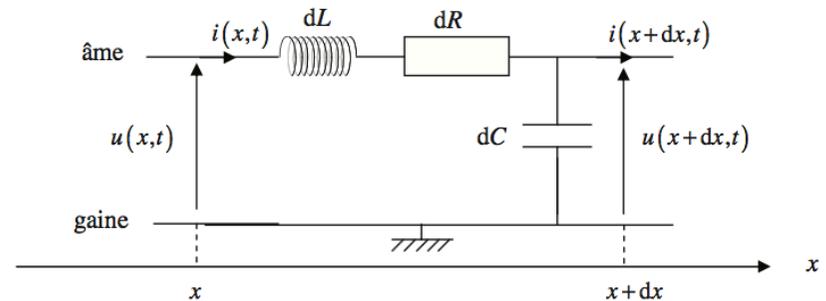
Donner l'expression de  $\underline{Z}_l(x)$  en fonction de :  $\underline{Z}$ ,  $\rho$ ,  $k$ ,  $d$  et  $x$ . À quelle

condition sur  $\underline{Z}$ , l'impédance  $\underline{Z}_l(x)$  est indépendante de l'abscisse  $x$ ? Quelle est alors l'expression de  $\underline{Z}_l(x)$ ? Que dire dans ce cas de  $i_1$  et que peut-on alors conclure?

Quelle impédance mettre en bout de câble pour s'assurer, dans le cadre des télécommunications, que la puissance transmise est optimale?

## I.2 – Le câble coaxial avec pertes

La modélisation précédente ne décrit qu'imparfaitement la propagation du signal. Aussi on se propose d'étudier le modèle représenté en **figure 3** dans lequel on a inséré une résistance  $dR = r \cdot dx$  par rapport au modèle de la **figure 2** de la page 2.



**Figure 3** – Schéma électrique d'un tronçon de ligne imparfaite de longueur  $dx$

**Q8.** Quelle est l'origine physique de la résistance  $dR$ ?

**Q9.** Montrer que l'équation de propagation de l'onde de tension  $u(x,t)$  est :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \Lambda \cdot \Gamma \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + r \cdot \Gamma \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}.$$

**Q10.** En considérant une solution de la forme  $\underline{u}(x,t) = u_0 \cdot \exp(j(\omega \cdot t - \underline{k} \cdot x))$  à l'équation de propagation précédente, dans laquelle  $\underline{k}$  est une pulsation spatiale complexe, trouver l'équation de dispersion associée à la ligne.

**Q11.** On écrit  $\underline{k}$  sous la forme :  $\underline{k} = \alpha - j \cdot \beta$ . Que représentent physiquement  $\alpha$  et  $\beta$ ? Justifier, par un raisonnement physique, le signe de  $\beta$  lorsque  $\alpha > 0$ .

**Q12.** On définit l'atténuation linéique de puissance du signal entre le point d'entrée du câble coaxial en  $x = 0$  et un point d'abscisse  $x$  par la grandeur  $A$ , exprimée en décibel par unité de

$$\text{longueur, } A = \frac{10 \cdot \log\left(\frac{P_0}{P(x)}\right)}{x} = \frac{10}{\ln 10} \cdot \frac{\ln\left(\frac{P_0}{P(x)}\right)}{x}, \quad \text{avec } P(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(u(x,t) \cdot \underline{i}^*(x,t))$$

la puissance moyenne de l'onde à l'abscisse  $x$  et  $P_0 = P(x=0) = \frac{1}{2} u_0 \cdot i_0$  la puissance moyenne de l'onde en entrée du câble.

En considérant que  $\underline{i}(x,t) = i_0 \cdot \exp(j(\omega \cdot t - \underline{k} \cdot x))$ , exprimer  $A$  en fonction de  $\beta$ .

Q13. À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1, montrer que si  $r \ll \Lambda \cdot \omega$ , alors

$$A = \frac{10}{\ln 10} \cdot r \cdot \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$$

Q14. Par ailleurs, on montre que, lorsque  $r \gg \Lambda \cdot \omega$ , l'atténuation linéique de puissance a pour

$$\text{expression : } A = \frac{10}{\ln 10} \cdot \sqrt{2 \cdot r \cdot \Gamma \cdot \omega}$$

Q13, il semble que l'atténuation linéique de puissance progresse avec la fréquence puis devienne indépendante de celle-ci lorsque les effets inductifs prennent le pas sur les effets résistifs. Mais, en réalité, à cause d'un phénomène physique associé à la résistance  $r$ , en haute fréquence,  $r$  augmente avec la racine carrée de la fréquence. Nommer et expliquer ce phénomène.

### Partie II – Transmission de signal par fibre optique et atténuation

Dans toute cette partie, on notera  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  la célérité de la lumière dans le vide.

L'indice de l'air est égal à 1.

Une fibre optique à saut d'indice, représentée en **figure 5**, est constituée d'un cœur cylindrique transparent d'indice  $n_c = 1,500$  et de rayon  $r_c$ , entouré d'une gaine transparente d'indice  $n_g = 1,485$ . L'axe  $Ox$  de la fibre est normal au dioptre air-cœur. En raison de la symétrie de révolution de la fibre autour de l'axe  $Ox$ , on se restreint à une étude dans le plan  $(xOy)$ .

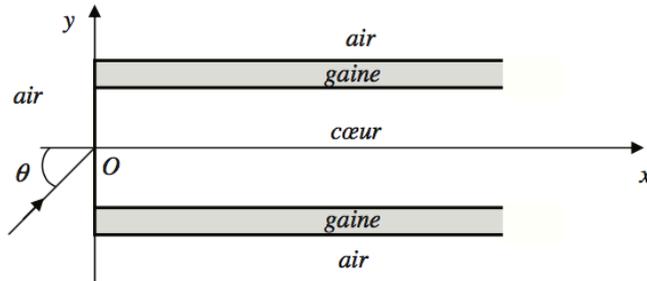


Figure 5 – Fibre optique à saut d'indice

Les lois de l'électromagnétisme montrent que seulement une fraction  $T$  de la puissance de la lumière injectée dans la fibre optique passe effectivement dans le cœur de celle-ci. Pour trouver, en considérant une incidence normale du faisceau lumineux vis-à-vis de la fibre, l'expression du coefficient  $T$  en fonction de  $n_a$  et  $n_c$ , nous allons considérer le cas d'une onde plane monochromatique. On s'intéresse au cas de deux milieux diélectriques transparents, 1 et 2, d'indices réels  $n_1$  et  $n_2$ , séparés par le plan d'équation  $x = 0$  comme indiqué en **figure 13** de la page 12. On considère une onde électromagnétique incidente, de pulsation  $\omega$ , polarisée rectilignement, qui se propage dans le milieu 1 en direction du milieu 2 normalement au dioptre. Le champ électrique de l'onde incidente, dans le milieu 1, a pour expression :  $\vec{E}_1 = E_{01} \cdot e^{j(\omega t - k_1 \cdot x)} \cdot \vec{e}_y$ . L'étude s'effectue dans le référentiel galiléen  $(\mathcal{R})$  muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

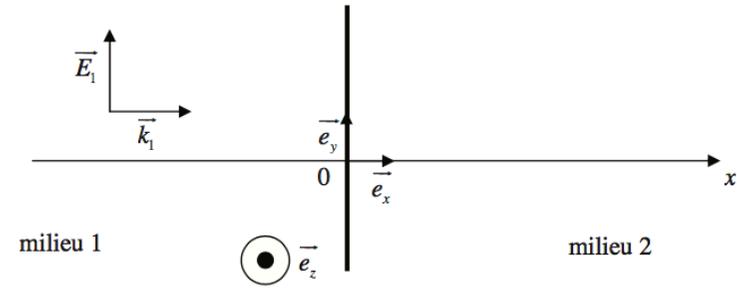


Figure 13 – Coefficient de transmission

Q43. Donner l'expression du vecteur champ magnétique  $\vec{B}_1$  de l'onde incidente, dans le milieu 1.

(en notation complexe). On rappelle ici la relation  $k = n \cdot \omega / c$  pour un milieu transparent

Q44. Le champ électrique de l'onde réfléchie, dans le milieu 1, a pour expression :

$$\vec{E}_r = E_{0r} \cdot e^{j(\omega t - k_r \cdot x)} \cdot \vec{e}_y$$

Quel lien existe-t-il entre le vecteur d'onde de l'onde réfléchie  $\vec{k}_r$  et le vecteur d'onde de l'onde incidente  $\vec{k}_1$  ? Donner l'expression du vecteur champ magnétique  $\vec{B}_r$  de l'onde réfléchie, dans le milieu 1. et de  $\vec{B}_r$

Q45. Les champs électromagnétiques de l'onde transmise dans le milieu 2 ont pour expression :

$$\vec{E}_2 = E_{02} \cdot e^{j(\omega t - k_2 \cdot x)} \cdot \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{B}_2 = \frac{n_2}{c} \cdot E_{02} \cdot e^{j(\omega t - k_2 \cdot x)} \cdot \vec{e}_z$$

On admet la continuité du champ électromagnétique. Après avoir représenté sur une même figure les vecteurs  $\vec{k}_1, \vec{E}_1, \vec{B}_1, \vec{k}_r, \vec{E}_r, \vec{B}_r, \vec{k}_2, \vec{E}_2$  et  $\vec{B}_2$ , indiquer les deux relations qui lient  $E_{01}, E_{0r}$  et  $E_{02}$ . En déduire, en fonction de  $n_1$  et  $n_2$ , l'expression du coefficient en amplitude  $\tau$  défini par :  $E_{02} = \tau \cdot E_{01}$ .

Y-a-t-il un changement de phase lors de la transmission ?

Q46. Pour un milieu transparent, d'indice  $n$  réel, la valeur moyenne du vecteur de Poynting associé

à une onde électromagnétique a pour expression :  $\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right)$ . Donner les

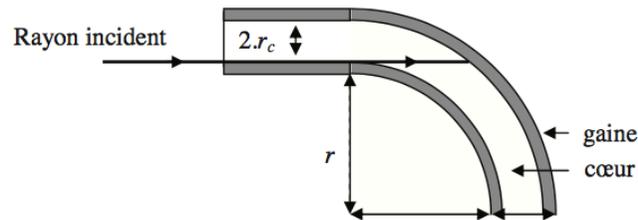
expressions :

de la valeur moyenne du vecteur de Poynting  $\langle \vec{R}_1 \rangle$  associé à l'onde électromagnétique incidente du milieu 1 en fonction de  $E_{01}, E_{01}^*, n_1, \mu_0, c$  et d'un vecteur unitaire,

et de la valeur moyenne du vecteur de Poynting  $\langle \vec{R}_2 \rangle$  associé à l'onde électromagnétique transmise dans le milieu 2 en fonction de  $E_{02}, E_{02}^*, n_2, \mu_0, c$  et d'un vecteur unitaire.

En déduire l'expression du facteur de transmission en puissance  $T$  entre les milieux 1 et 2 (en incidence normale et pour des milieux transparents) en fonction de  $n_1, n_2$  et  $\tau$ , puis en fonction uniquement de  $n_1$  et  $n_2$ .

- Q47.** En considérant une incidence normale en entrée et en sortie de fibre du faisceau lumineux, le coefficient de transmission entre l'air et le cœur de la fibre a pour expression  $T = \frac{4 \cdot n_a \cdot n_c}{(n_a + n_c)^2}$ .
- Sans tenir compte des pertes à l'intérieur de la fibre, calculer la perte de puissance totale, en décibels, entre l'entrée et la sortie de la fibre. Commenter ce résultat.
- Q48.** Si la fibre peut être courbée sans grand inconvénient mécanique, cette courbure peut néanmoins conduire à une perte de l'énergie guidée. En raisonnant sur la **figure 14**, expliquer la raison de cette perte dans une fibre optique à saut d'indice. En considérant un rayon pénétrant dans la fibre, perpendiculairement à sa section, à la limite du bord inférieur, donner en fonction de  $n_c$ ,  $n_g$ ,  $r_c$  et  $r_g$  le rayon de la gaine, l'expression du rayon de courbure  $r$  à partir duquel la perte de courbure apparaîtra. Calculer ce rayon en considérant que  $r_g + r_c = 1,0$  mm,  $r_c - r_g \approx 0$ ,  $n_c = 1,500$  et  $n_g = 1,485$ . Conclure.



**Figure 14** – Perte de courbure dans la fibre optique à saut d'indice

- Q49.** Pour assurer les transmissions à grande distance, il faut raccorder de nombreuses fibres optiques. La difficulté pour abouter deux fibres réside dans les dimensions en jeu : le cœur d'une fibre optique unimodale est de l'ordre de 9 microns... Cependant, la liaison entre fibres optiques doit être particulièrement soignée sinon il peut y avoir une perte de puissance du signal et donc une moindre distance parcourue. Commenter et illustrer, par un schéma simple, chacun des trois problèmes rencontrés lors de la jonction entre deux fibres de même diamètre de cœur et de gaine : la concentricité, l'écartement longitudinal et le désalignement angulaire.
- Q50.** Les fibres optiques multimodales OM1, aussi appelées 62,5/125, ont un cœur de diamètre de 62,5 microns et une gaine de diamètre extérieur de 125 microns. Peuvent-elles être aboutées à des fibres optiques multimodales OM2, aussi appelées 50/125, dont le cœur a un diamètre de 50 microns et la gaine un diamètre extérieur de 125 microns ? Discuter selon le sens de propagation de la lumière dans les fibres.