

Partie I – Transmission de signal par câble coaxial

Q2. La loi des mailles donne, en notant u_L la tension aux bornes de la bobine, en convention récepteur :

$$u(x, t) = u(x + dx, t) + u_L$$

Or $u_L = \Lambda dx \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$ et $u(x + dx, t) = u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ donc

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$$

Ensuite, la loi des nœuds donne, en notant i_C le courant qui "descend" dans le condensateur :

$$i(x, t) = i(x + dx, t) + i_C$$

Or $i_C = \Gamma dx \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial t} = \Gamma dx \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ au premier ordre, et $i(x + dx, t) = i(x, t) + \frac{\partial i(x, t)}{\partial x}$ donc

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$

Q3. On dérive la première équation par rapport au temps et la seconde par rapport à l'espace, et on assimile les dérivées croisées : $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$ (théorème de SCHWARTZ). Il vient alors :

$$-\Lambda \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\Lambda \Gamma} \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

De même, en dérivant la première équation par rapport à x et la seconde par rapport à t , et en assimilant les dérivée croisées de $i(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\Lambda \Gamma} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

On reconnait dans les 2 cas une équation de D'ALEMBERT avec une célérité des ondes $v = \sqrt{\frac{1}{\Lambda \Gamma}}$.

v est bien une vitesse pour que l'équation reste homogène : $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$ est en $V.s^{-2}$ et $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$ est en $V.m^{-2}$ donc v est bien en $m.s^{-1}$. Autre manière de le vérifier : $\sqrt{\frac{1}{LC}}$ est la pulsation caractéristique d'un circuit RLC, donc en s^{-1} , or Γ et Λ sont des grandeurs linéiques donc $\sqrt{\frac{1}{\Lambda \Gamma}}$ est bien en $m.s^{-1}$.

Q4. On injecte la solution proposée dans l'équation de D'ALEMBERT. Comme $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = (j\omega)^2 \underline{u}(x, t)$ et $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = (-jk)^2 \underline{u}(x, t)$, celle-ci devient :

$$-k^2 \underline{u}(x, t) + \frac{\omega^2}{v^2} \underline{u}(x, t) = 0 \Rightarrow \underline{k} = \frac{\omega}{v}$$

On obtient la relation de dispersion usuelle associée à l'équation de D'ALEMBERT : en effet, on a cherché une solution en somme d'OPPM se propageant dans le sens des x croissants (terme en i_0) et décroissants (terme en i_1).

Q5. On injecte la solution proposée dans l'une des équations de couplage, par exemple $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$:

$$-jk\rho i_0 e^{j(\omega t - kx)} - jk\rho i_1 e^{j(\omega t + kx)} = -\Lambda j\omega i_0 e^{j(\omega t - kx)} - \Lambda j\omega i_1 e^{j(\omega t - kx)}$$

On en déduit :

$$k\rho = \Lambda\omega \Rightarrow \underline{\rho} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} = \underline{Z}_c$$

Si u est une tension et i une intensité, ρ et donc Z_c sont des impédances, homogènes à des résistances, donc en Ω .

Q6. On applique la loi d'OHM à l'extrémité du câble : $\underline{u}(d, t) = \underline{Z}i(d, t)$:

$$\rho i_0 e^{j(\omega t - kd)} - \rho i_1 e^{j(\omega t + kd)} = \underline{Z} i_0 e^{j(\omega t - kd)} + \underline{Z} i_1 e^{j(\omega t + kd)}$$

$$i_0(\rho - \underline{Z})e^{-jkd} = i_1(\rho + \underline{Z})e^{+jkd} \Rightarrow \underline{i}_1 = i_0 \frac{\rho - \underline{Z}}{\rho + \underline{Z}} e^{-2jkd}$$

Q7. $\underline{r} = \frac{\rho - \underline{Z}}{\rho + \underline{Z}} e^{-2jkd}$ le coefficient de réflexion pour exprimer $\underline{Z}_l(x)$:

$$\underline{Z}_l(x) = \frac{u(x, t)}{i(x, t)} = \frac{\rho(i_0 e^{-jkx} - i_1 e^{+j kx})}{i_0 e^{-jkx} + i_1 e^{+j kx}}$$

$$\underline{Z}_l(x) = \rho \frac{e^{-jkx} - \chi e^{+j kx}}{e^{-jkx} + \chi e^{+j kx}} = \rho \frac{(\rho + \underline{Z})e^{-2j kx} - (\rho - \underline{Z})e^{-2j k d}}{(\rho + \underline{Z})e^{-2j kx} + (\rho - \underline{Z})e^{-2j k d}}$$

$\underline{Z}_l(x)$ est donc indépendant de x si $\underline{\rho} = \underline{Z} = \underline{Z}_c$. Dans ce cas, $\underline{Z}_l(x) = \rho$ et $\chi = 0$, c'est-à-dire $\underline{i}_1 = 0$: il n'y a **pas d'onde réfléchie** : toute l'onde est transmise, ce qui optimise le transfert du signal. il faut donc mettre en bout de câble une impédance égale à Z_c ("adaptation d'impédance").

I.2 Le câble coaxial avec pertes

Q8. Les parties métalliques (gaine et âme) sont en métal non parfait, ayant une conductivité limitée, donc une certaine résistance : il y a donc des pertes par effet JOULE.

Q9. La loi des mailles donne cette fois :

$$u(x, t) = u(x + dx, t) + u_L + u_R$$

Or $u_L = \Lambda dx \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$, $u_R = r dx i(x, t)$ et $u(x + dx, t) = u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ donc

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} - r i(x, t)$$

Par ailleurs, on a toujours $\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ par la loi des nœuds. En dérivant la première équation par rapport à x , on obtient :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = -r \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} - \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$$

En remplaçant avec la seconde équation, on obtient la relation demandée :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = r\Gamma \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \Gamma\Lambda \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Q10. On injecte la solution proposée :

$$(-jk)^2 = \Gamma\Lambda(j\omega)^2 + r\Gamma j\omega$$

D'où la relation de dispersion : $\underline{k}^2 = \Gamma\Lambda\omega^2 - r\Gamma j\omega$.

Q11. Si $\underline{k} = \alpha - j\beta$, on peut écrire $\underline{u}(x, t) = u_0 e^{-\beta x} e^{j(\omega t - \alpha x)}$. Ainsi α correspond à l'aspect propagatif de l'onde, et β à l'absorption de l'onde (sur une distance caractéristique $1/\beta$). Si $\alpha > 0$, l'onde se propage vers les x croissants, donc $\beta > 0$ pour avoir une atténuation, cohérente avec la dissipation d'énergie par effet JOULE.

Q12. On a $\underline{u}(x, t) = u_0 e^{-\beta x} e^{j(\omega t - \alpha x)}$ et $\underline{i}(x, t) = i_0 e^{-\beta x} e^{j(\omega t - \alpha x)}$, donc la puissance moyenne s'écrit :

$$P(x) = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{u}(x, t) \underline{i}^*(x, t)) = \frac{1}{2} u_0 i_0 e^{-2\beta x} = P_0 e^{-2\beta x}$$

On en déduit $A = \frac{10}{\ln 10} \frac{2\beta x}{x} = 2\beta \frac{10}{\ln 10}$.

Q13. On a $\underline{k}^2 = \Gamma \Lambda \omega^2 \left(1 - \frac{r\Gamma j\omega}{\Gamma \Lambda \omega^2}\right)$. On passe à la puissance 1/2, puis on utilise le DL de $(1+x)^\alpha$ pour $x \ll 1$ (en admettant qu'il fonctionne pour les complexes et que la racine est définie également...):

$$\underline{k} \approx \sqrt{\Gamma \Lambda \omega} \left(1 - \frac{r\Gamma j\omega}{2\Gamma \Lambda \omega^2}\right)$$

On identifie la partie imaginaire de \underline{k} à β donc on trouve $\beta = \sqrt{\Gamma \Lambda \omega} \cdot \frac{r\Gamma \omega}{2\Gamma \Lambda \omega^2} = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$. On reporte dans l'expression de A pour obtenir l'expression demandée :

$$A = 2\beta \frac{10}{\ln 10} = \frac{10}{\ln 10} r \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$$

Q14. Le phénomène responsable est l'effet de peau : le champ EM ne pénètre dans un conducteur ohmique que sur une profondeur caractéristique $\delta \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}$, donc le courant ne circule que sur cette épaisseur caractéristique. Ainsi, lorsque la fréquence augmente, la section de conduction diminue donc la résistance augmente avec $r \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}$.

Partie II – Transmission de signal par fibre optique - Atténuation

CCINP PC 2018

Q43. Dans un milieu neutre (comme ici un diélectrique), on peut utiliser la structure d'OPPM et les relations entre \vec{k} , \vec{E} et \vec{B} en remplaçant simplement c par $\frac{c}{n}$. On a déjà la relation de dispersion : $\underline{k}_1 = n_1 \frac{\omega}{c}$, et on peut écrire $\vec{B}_1 = \frac{\vec{k}_1 \wedge \vec{E}_1}{\omega}$, ce qui donne :

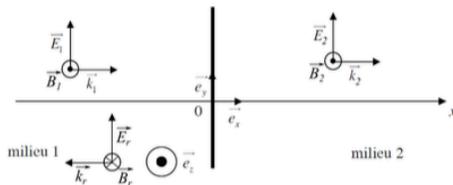
$$\vec{B}_1 = \frac{n_1}{c} \vec{E}_{01} e^{j(\omega t - k_1 x)} \vec{e}_z$$

Question un peu imprécise : l'énoncé demande \vec{B}_1 mais on attend plutôt sa représentation complexe $\underline{\vec{B}}_1$ car le champ électrique est donné sous forme complexe et la suite de l'énoncé fait calculer le vecteur de POYNTING moyen à partir des complexes.

Q44. Pour l'onde réfléchie, $\underline{\vec{k}}_r = -\underline{\vec{k}}_1 = -n_1 \frac{\omega}{c} \vec{e}_x$ et $\underline{\vec{B}}_r = -\frac{n_1}{c} \vec{E}_{0r} e^{j(\omega t + k_1 x)} \vec{e}_z$.

Q45. La continuité des champs en $x=0$ donne (les $e^{(\dots)}$ et les $\frac{1}{c}$ se simplifient) :

$$\begin{cases} \underline{E}_{01} + \underline{E}_{0r} = \underline{E}_{02} & (1) \\ n_1 \underline{E}_{01} - n_1 \underline{E}_{0r} = n_2 \underline{E}_{02} & (2) \end{cases}$$



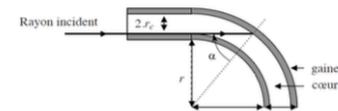
On fait $n_1 \times (1) + (2) : 2n_1 \underline{E}_{01} = (n_1 + n_2) \underline{E}_{02}$, ce qui donne $\underline{E}_{02} = \tau \underline{E}_{01}$ avec $\tau = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$ le coefficient de transmission en amplitude. Les indices sont réels, donc τ est réel et positif, donc il n'y a pas de déphasage à la transmission.

Q46. Avec la formule fournie, on trouve $\langle \underline{\vec{R}}_1 \rangle = \frac{n_1}{2\mu_0 c} \underline{E}_{01} \underline{E}_{01}^* \vec{e}_x$ et $\langle \underline{\vec{R}}_2 \rangle = \frac{n_2}{2\mu_0 c} \underline{E}_{02} \underline{E}_{02}^* \vec{e}_x$.

Le coefficient de transmission en puissance s'écrit donc $T = \frac{\langle \underline{\vec{R}}_2 \rangle \cdot \vec{e}_x}{\langle \underline{\vec{R}}_1 \rangle \cdot \vec{e}_x} = \frac{n_2 \underline{E}_{02} \underline{E}_{02}^*}{n_1 \underline{E}_{01} \underline{E}_{01}^*}$, soit $T = \frac{n_2}{n_1} \tau^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$.

Q47. Application numérique : $T^2 = 0,92$ (car il y a 2 dioptries), soit $-0,36$ dB : l'atténuation est faible, sans être tout à fait négligeable.

Q48. Pour que l'onde reste dans la fibre, il faut qu'il y ait réflexion totale au moment où la lumière atteint la gaine. Sinon, la lumière n'est plus guidée mais sort de la fibre.



Il faut donc que l'angle α dépasse l'angle limite de réflexion totale, comme à la Q17. Or sur le schéma, on remarque que $\sin \alpha = \frac{r}{r + 2r_c}$ où r est le rayon de courbure et $r_c \approx r_g \approx 0,5$ mm est le rayon de la fibre. Le rayon de courbure doit donc vérifier :

$$\frac{r}{r + 2r_c} > \frac{n_g}{n_c} \Rightarrow r > \frac{2r_c n_g}{n_c - n_g}$$

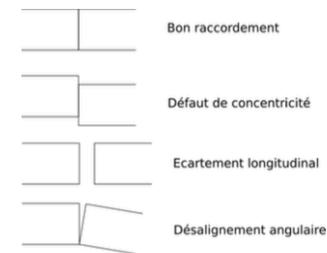
Application numérique : $r_{min} = 10$ cm. Ceci laisse une relative marge de manœuvre, mais peut-être gênant pour une installation domestique (raccordement à une Box sans espace suffisant, passage dans un angle...)

Petit doute : j'ai considéré que r_g est bien le rayon extérieur de la gaine, comme pour le câble coaxial du début, et pas son épaisseur... $r_c \approx r_g$ signifie que la gaine a une épaisseur négligeable dans ce cas. Si on suppose que r_g est l'épaisseur de gaine, on trouve un résultat comparable.

Q49. Concentricité : les deux fibres doivent être concentriques, donc de même axe.

Écartement longitudinal : les deux fibres doivent être proches pour que les rayons sortant de l'une rentrent bien dans la seconde s'ils sont inclinés.

Désalignement angulaire : les axes des 2 fibres doivent être alignés.



Q50. Si l'on passe d'une fibre 50/125 à une fibre 62,5/125, on aura beaucoup moins de problèmes que dans l'autre sens. En effet, si le cœur de la première fibre est étroit, le faisceau sera plus concentré et plus facile à "faire rentrer" dans la seconde. A l'inverse, si l'on a une fibre 62,5/125 et que l'on souhaite raccorder une 50/125, on aura un problème : même avec le meilleur raccordement, les rayons lumineux éloignés de l'axe ne pourront pas rentrer dans la seconde fibre.