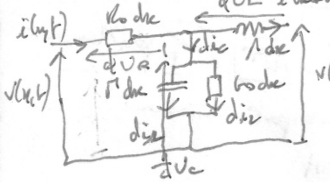
Ex1 - Ligne avec pertes



a). Pertes de résistance le lg de la ligne R_0

- câble coaxial de faible qualité → juste étamé au cuivre !
- résistance ↗ avec f → effet de peau

• Pertes en // du condensateur → résistance de fuite du diélectrique (très grde) → voir modèle du condensateur (PCSI)

b). LDM de la "grande" maille :

$$v(x,t) = v(x+dx,t) + dU_L + dU_R = v(x+dx,t) + \Lambda\,dx\,\frac{\partial i(x+dx,t)}{\partial t} + R_0\,dx\,i$$

avec $\frac{\partial}{\partial t}\left(i(x+dx,t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(i(x,t) + \frac{\partial i}{\partial x}dx\right) = \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + \cancel{\frac{\partial^2 i}{\partial t\partial x}dx}$

ordre inf. négligeable

$$\hookrightarrow \frac{\partial v}{\partial x}\cancel{dx} = -\Lambda\,\cancel{dx}\,\frac{\partial i}{\partial t} - R_0\,\cancel{dx}\,i$$

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial x} = -R_0 i - \Lambda\frac{\partial i}{\partial t}}$$ 1ère éq. couplée (1)

• LDN : $i(x,t) = di_C + i(x+dx,t) = di_1 + di_2 + i(x+dx,t)$

avec $di_1 = \Gamma\,dx\,\frac{\partial(dU_C)}{\partial t}$ avec 2 possibilités pour les 2 "petites" mailles

$= \Gamma\,dx\,\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$

→ $dU_C = v(x,t) - dU_R = v(x,t) - \cancel{R_0\,dx\,i(x,t)}$ ordre inf.
$\simeq v(x,t)$

→ $dU_C \simeq v(x+dx,t) - dU_L$ ordre inf
$\simeq v(x,t)$ ég's à l'ordre le + bas

$di_2 = G_0\,dx\;dU_C$
conductance
$= G_0\,dx\;v(x,t)$

donc $i(x,t) = \Gamma\,dx\,\frac{\partial v}{\partial t} + G_0\,dx\;v(x,t) + i(x+dx,t)$

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{\partial i}{\partial x} = -G_0 v - \Gamma\frac{\partial v}{\partial t}}$$ 2ème éq. couplée (2)

• Eq. de propagat° en v

On dérive (1) % à x ⇒ $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -R_0\left[-G_0 v - \Gamma\frac{\partial v}{\partial t}\right] - \Lambda\frac{\partial}{\partial t}\left[-G_0 v - \Gamma\frac{\partial v}{\partial t}\right]$

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \Lambda\Gamma\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (R_0\Gamma + G_0\Lambda)\frac{\partial v}{\partial t} + R_0G_0 v}$$

Si $R_0 = 0$ et $G_0 = 0$ ⇒ $\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \Lambda\Gamma\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0}$

avec $\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}}$ Eq. de d'Alembert

Rq) présence d'1 dérivée d'ordre impair → irréversibilité à cause de l'effet Joule (dissipat° résistance)

c) Solut° $\underline{v}(x,t) = V_0\,e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$ OPPH

$$-\underline{k}^2\underline{v} + \Gamma\Lambda\omega^2\underline{v} = (R_0\Gamma + G_0\Lambda)\,j\omega\,\underline{v} + R_0G_0\,\underline{v}$$

$$\boxed{\underline{k}^2 = \Gamma\Lambda\omega^2 - j\omega(R_0\Gamma + G_0\Lambda) - R_0G_0}$$ Relat° de dispers° non-linéaire !
↳ dispers°

Rq) $\underline{k}^2 = -(R_0 + j\Lambda\omega)(G_0 + j\Gamma\omega)$

d) $\underline{k} = \pm(k_1 + jk_2)$ $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

$\underline{k}^2 = k_1^2 - k_2^2 + 2j\,k_1k_2$ → $2k_1k_2 = -\omega(R_0\Gamma + G_0\Lambda)$
donc $k_2 < 0$

On pose $k_2 = -1/\delta$

Pour une solut° se propageant selon (Ox^+) de $x = 0$ à $x = \dots$
on choisit $\underline{k} = +(k_1 + jk_2)$
($\underline{k} = -(k_1 + jk_2)$ correspond à l'onde se propageant selon Ox^- !)

$\underline{v}(x,t) = V_0\,e^{j(\omega t - (k_1 + jk_2)x)}$

$\underline{v}(x,t) = V_0\,e^{k_2 x}\,e^{j(\omega t - k_1 x)} = V_0\,e^{-x/\delta}\,e^{j(\omega t - k_1 x)}$

$$\boxed{v(x,t) = V_0\,e^{-x/\delta}\cos(\omega t - k_1 x)}$$

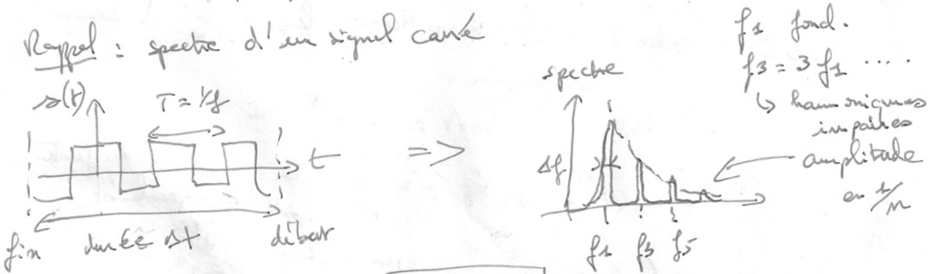
↳ propagat° amortie sur une distance $\delta = \left|\frac{1}{k_2}\right|$
exponentiellement
↳ $\mathrm{Im}(\underline{k})$ pilote l'atténuat°

Propagat° de l'OPPH à $v_\varphi = \omega/k_1$

$(\cos\omega[t - x/v_\varphi])$

À ce stade, il y a dispersion car les ≠ composantes sinusoïdales d'un signal ($v_\varphi = f(\omega)$) carré, comme celle d'un signal quelconque, vont se propager à des vitesses ≠ provoquant la déformat° du signal.

Rappel : spectre d'un signal carré



et $\boxed{\Delta f \simeq \frac{1}{\Delta t}}$ relat° temps fréq.

e) Faibles pertes

→ $|R_0 \, dx \, i| \ll |\Lambda \, dx \, \frac{\partial i}{\partial t}| \Rightarrow R_0 \ll |\Lambda j\omega| \Rightarrow \frac{R_0}{\Lambda\omega} \ll 1$

→ $|G_0 \, dx \, dV| \ll |\Gamma \, dx \, \frac{\partial (dV)}{\partial t}| \Rightarrow G_0 \ll |\Gamma j\omega| \Rightarrow \frac{G_0}{\Gamma\omega} \ll 1$

f) $\underline{k}^2 = \Gamma\Lambda\omega^2 \left(1 - \frac{j}{\omega}\left(\frac{R_0\Gamma + G_0\Lambda}{\Gamma\Lambda}\right) - \frac{R_0 G_0}{\Gamma\Lambda\omega^2}\right)$

$\underline{k}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(1 - \frac{j}{\omega}\left(\frac{R_0}{\Lambda} + \frac{G_0}{\Gamma}\right) - \frac{R_0 G_0}{\Gamma\Lambda\omega^2}\right)$

on choisit ⊕ !

$\underline{k} = +\left(\frac{\omega}{c}\right) \left(1 - \underbrace{\frac{j}{\omega}\left(\frac{R_0}{\Lambda} + \frac{G_0}{\Gamma}\right)}_{\text{ordre 1}} - \underbrace{\frac{R_0 G_0}{\Gamma\Lambda\omega^2}}_{\text{ordre 2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ → partie où le DL sera limité à l'ordre !

DL ordre 2

$\underline{k} \simeq \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{j}{2\omega}\left(\frac{R_0}{\Lambda} + \frac{G_0}{\Gamma}\right) - \frac{R_0 G_0}{2\Gamma\Lambda\omega^2} + \frac{1}{8\omega^2}\left(\frac{R_0}{\Lambda} + \frac{G_0}{\Gamma}\right)^2\right)$

$$\boxed{\underline{k} \simeq \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{j}{2\omega}\left(\frac{R_0}{\Lambda} + \frac{G_0}{\Gamma}\right) + \frac{1}{8\omega^2}\left(\frac{R_0}{\Lambda} - \frac{G_0}{\Gamma}\right)^2\right)}$$

$Re(\underline{k}) = k_1 = \frac{\omega}{c}\left(1 + \frac{1}{8\omega^2}\left(\frac{R_0}{\Lambda} - \frac{G_0}{\Gamma}\right)^2\right)$

$k_1(\omega)$ relat° non linéaire qui apparaît à l'ordre 2

↳ dispersion $v_\varphi = \frac{\omega}{k_1} = f(\omega)$!

La dispersion qui n'intervient qu'à l'ordre 2 demeure faible.

D'ailleurs possibilité d'annuler ce terme pour $\frac{R_0}{\Lambda} - \frac{G_0}{\Gamma} = 0$!

alors à l'ordre 2 au ⊖ on retrouve $k_1 = \frac{\omega}{c}$! sans dispersion.

Ici $R_0\Gamma = 10^{-12}$ USI et $G_0\Lambda = 10^{-15}$ USI

$\frac{R_0}{\Lambda} - \frac{G_0}{\Gamma} = 10^5 - 10^2 \simeq \frac{R_0}{\Lambda}$ la résistance de fuite est négligeable !

et $k_1 = \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{10^{10}}{8\omega^2}\right)$ pour 10 kHz $\frac{10^{10}}{8\omega^2} = \frac{10^{10}}{8 \cdot 10^8 \times (2\pi)^2} = \frac{10^2}{315} \simeq \frac{1}{3}$ NON négligeable aux plus hts fréq. négligeable

g) Pour le fondamental à $f = 15$ kHz
$\omega = 2\pi f = 9{,}42 \cdot 10^4$ rad.s-1

$v_\varphi(\omega) = \frac{\omega}{k_1} = \frac{c}{1 - \frac{10^5}{8\omega^2}}$ ($v_\varphi \downarrow$ qd $\omega \nearrow$)

Pour le 3e harmonique à $f_3 = 3f$
$\omega_3 = 3\omega$

$v_\varphi(3\omega) \simeq \frac{c}{1 - \frac{10^5}{8\omega^2 \times 9}}$

$\Delta t = \Delta t(3\omega) - \Delta t(\omega) = d\left(\frac{1}{v_\varphi(3\omega)} - \frac{1}{v_\varphi(\omega)}\right)$

$\Delta t = \frac{d}{c}\left(\cancel{1} - \frac{10^{10}}{9 \times 8\omega^2} - \cancel{1} + \frac{10^5}{8\omega^2}\right)$

$\Delta t = \frac{d}{c} \times \frac{10^{10}}{8\omega^2}\left(-\frac{1}{9} + 1\right) = \frac{d}{c}\,\frac{10^{10}}{9\omega^2}$

avec $c = \frac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-7}\,10^{-10}}} = 3{,}16 \cdot 10^8$ m.s-1 ($c > 3 \cdot 10^8$ m.s-1 impossible ! il faut prendre en compte ε_r)

$\Delta t = 7{,}9 \cdot 10^{-7}$ s $\geq \frac{T}{100} = 6{,}7 \cdot 10^{-7}$ s

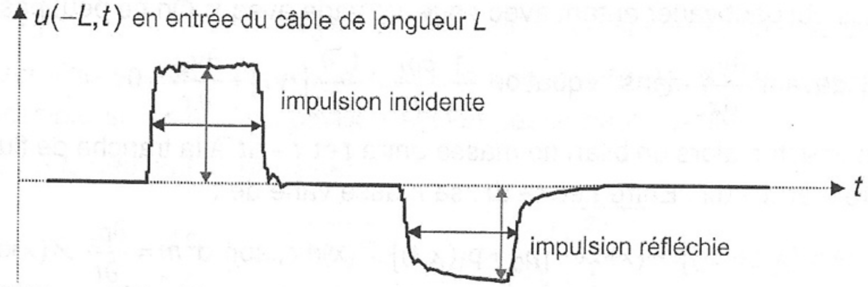
Pour cette fréq. les composantes ont une diff. de durée de propagat° qui s'approche de T ! → dispers° non-négligeable.

<u>Remarque sur la dispersion très faible</u> : preuve expérimentale
Avec propagation de pulses d'une durée de 200 ns cadencés à 10 kHZ

En réalité, r et g dépendent de la fréquence comme on l'a vu au 3.5 : le coefficient de réflexion sur les conducteurs diminue avec f, ce qui correspond à des pertes plus grandes.

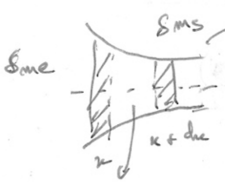
La dispersion des modes T.E.M est effectivement très faible, même sur des longueurs de plusieurs km.

En revanche, l'atténuation n'est pas négligeable : il faut placer des répétiteurs le long de la ligne pour garder un bon rapport signal sur bruit en sortie du câble. Si la largeur d'une impulsion n'augmente pas lors de la propagation, l'impulsion se déforme, ses différentes composantes sinusoïdales ne subissant pas la même atténuation.



Câble court-circuité en sortie. L'impulsion garde la même largeur après un aller et retour car la dispersion est négligeable. L'atténuation est en revanche visible.

Ex 2 : Pavillon acoustique



$S(x) = S_0 e^{-\sigma x}$

ondes unidirectionnelles
↳ valide si le rayon du pavillon varie peu sur la longueur du pavillon
onde quasi-plane

dm masse de la tranche dx située en x

Partie A - Effet Amplificateur

1. Variat° temporelle de la masse $dm(x,t)$ (pour le syst. ouvert)

avec $dm(x,t) = \mu(x,t)\, dV(x) = \rho(x,t)\, S(x)\, dx$

$$dm(x,t+dt) - dm(t) = \rho(x,t+dt)\, S(x)\, dx - \mu(x,t)\, S(x)\, dx$$
$$= S(x)\frac{\partial \rho}{\partial t}\, dt\, dx = \boxed{S(x)\frac{\partial \rho_1}{\partial t}\, dt\, dx}$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}(\rho S\, dx)\, dt$$

. Variat° de cette ~~masse à cause des échanges avec l'ext~~

$$\delta m_e = D_{me}\, dt = \mu(x,t)\, S(x)\, v_1(x,t)\, dt$$
$$\delta m_s = D_{ms}\, dt = \mu(x+dx,t)\, S(x)\, v(x+dx,t)\, dt$$

$$\delta m_e - \delta m_s = -\frac{\partial}{\partial x}(\mu S v)\, dx\, dt \quad \text{au 1er ordre}$$

avec $\mu S v = [\rho_0 + \rho_1(x,t)]\, S(x)\, v_1(x,t) \simeq \rho_0\, S(x)\, v_1(x,t)$

donc $\boxed{\delta m_e - \delta m_s = -\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} S\, dx\, dt - \rho_0 v_1 \frac{\partial S}{\partial x}\, dx\, dt}$

avec $\frac{\partial S}{\partial x} = -\sigma S_0 e^{-\sigma x} = -\sigma S(x)$

. Égalisons ces deux qtés :

$$\cancel{S(x)}\frac{\partial \rho_1}{\partial t}\, \cancel{dt\, dx} = -\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x}\cancel{S\, dx\, dt} + \rho_0 v_1 \sigma \cancel{S}\, \cancel{dx\, dt}$$

(1) $\boxed{\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = \rho_0 \sigma v_1}$

(Rappel : $\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0$
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0$!)

2. Évolut° thermod.

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S \simeq \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S \rightarrow \boxed{\rho_1 = \rho_0 \chi_S p_1} \quad (2)$$

. Éq. d'Euler linéarisé (en proj. sur $\vec{u_x}$) : $\boxed{\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}}$ (3)

3) (1) ⇒ $j\omega \underline{\rho_1} = \rho_0 j\underline{k}\, \underline{v_1} + \rho_0 \sigma \underline{v_1}$
(2) ⇒ $j\omega \rho_0 \chi_S \underline{p_1} = \rho_0 \underline{v_1}(\sigma + j\underline{k})$
(3) ⇒ $\rho_0 j\omega \underline{v_1} = +j\underline{k}\, \underline{p_1}$

Notat° complexe

(2) × jω ⇒ $-\omega^2 \rho_0 \chi_S \cancel{\underline{p_1}} = j\underline{k}\cancel{\underline{p_1}}(\sigma + j\underline{k}) = -\underline{k}^2 + \sigma j \underline{k}$

Posons $c^2 = \frac{1}{\rho_0 \chi_S}$ $\quad -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = -\underline{k}^2 + \sigma j \underline{k}$

↳ $\boxed{\underline{k}^2 - j\sigma \underline{k} - \frac{\omega^2}{c^2} = 0}$

4) Rq) Discriminant de l'éq. du second degré

$$\Delta = -\sigma^2 + \frac{4\omega^2}{c^2} = \frac{4}{c^2}(\omega^2 - \omega_c^2) \quad \text{avec } \omega_c = \frac{c\sigma}{2}$$

5) . Pour $\omega < \omega_c$ → $\underline{k} = +\frac{\sigma j}{2} \pm \frac{j}{c}\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}$

$\Delta < 0$ $\quad = +\frac{\sigma j}{2}\left[1 \mp \underbrace{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}_{>0}\right]$

$\underline{k}$ est imaginaire pur
La solut° générale est une somme d'ondes stationnaires amorties selon les x croissants → pas de propagat°

$\boxed{\text{Le pavillon est un passe-haut pour la propag}^{\circ} \text{ des ondes}}$

a) . Pour $\omega > \omega_c = \frac{c\sigma}{2}$ $\quad \Delta > 0$

$$\underline{k} = +\frac{\sigma j}{2} \pm \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} = +\frac{\sigma j}{2} \pm \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1}$$

$k' = Re(k) > 0$ pour une onde se propageant selon (Ox^+) ↳ on choisit ⊕
($k' < 0$ selon $(Ox)^-$)

$$p_1(x,t) = p_0\, e^{j(\omega t + \frac{\sigma j}{2} x - k'x)}$$

$$\boxed{p_1(x,t) = p_0\, e^{+\frac{\sigma x}{2}} \cos(\omega t - k'x)}$$

onde propagative amplifiée

[la puissance sonore se répartit sur une surface ↘, l'intensité et l'ampli ↗] sur une distance typique de l'ordre de celle des variat de $S(x)$!

Rqe) $Re(k) = k'$ / $k'^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}$ Klein-Gordon $v_\varphi(\omega)$!!

l'air apparaît comme un milieu dispersif ! L'onde est approx. plane ⇒ dispers° du fait des condit aux limites → sect° divergente → le milieu limité devient dispersif !

comme ds la propagat° guidée !

onde non-rigoureusement plane

b) Eq. d'Euler : $\rho_0 \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = -\dfrac{\partial p_1}{\partial x}$

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -p_0\, e^{\frac{\sigma x}{2}} \left[\frac{\sigma}{2} \cos(\omega t - k'x) + k' \sin(\omega t - k'x) \right]$$

↳ intégrat et cste = 0 car il s'agit d'une onde f° de (x,t)

$$v_1 = -\frac{p_0}{\rho_0 \omega}\, e^{\frac{\sigma x}{2}} \left[\frac{\sigma}{2} \sin(\omega t - k'x) - k' \cos(\omega t - k'x) \right]$$

$$v_1 = \frac{p_0}{\rho_0 \omega}\, e^{\frac{\sigma x}{2}} \left[k' \cos(\omega t - k'x) + \underbrace{\frac{\sigma}{2} \sin(\omega t - k'x)}_{\text{terme en quadrature}} \right]$$

c) $\langle \vec{\Pi} \rangle = \langle p_1 \vec{v_1} \rangle$

$$= \frac{p_0^2 k'}{\rho_0 \omega}\, e^{\sigma x} \langle \cos^2(\omega t - k'x) \rangle\, \vec{u_x}$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{p_0^2}{2\rho_0 v_\varphi}\, e^{\sigma x}\, \vec{u_x} \quad \text{avec } v_\varphi v_g = c^2 \rightarrow v_\varphi = \frac{c^2}{v_g}$$

↳ Klein-Gordon

$$\boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{p_0^2}{2\rho_0 c^2}\, e^{\sigma x}\, v_g \vec{u_x} \qquad \langle \vec{\Pi} \rangle = \langle u_{ac} \rangle\, v_g \vec{u_x}}$$

↳ vect. densité de courant énergétique

On peut en effet démontrer en qq lignes que $\langle u_{ac} \rangle = \langle \frac{1}{2}\rho_0 v_1^2 + \frac{1}{2}\chi_S p_1^2 \rangle$
$= \dfrac{p_0^2}{2\rho_0 c^2}\, e^{\sigma x}$

Puissance moyenne traversant une sect S :

$$P = \iint_{S(x)} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{dS} = \langle \Pi \rangle \cdot S(x)$$

Π uniforme sur S en x donné

$$P = \frac{p_0^2}{2\rho_0 c^2}\, v_g\, e^{\sigma x}\, S(x) \quad \text{avec} \quad S(x)\, e^{\sigma x} = S_0\, e^{-\sigma x} e^{\sigma x} = S_0 \,!$$

$$\boxed{P = \frac{p_0^2 v_g}{2\rho_0 c^2} \times S_0} \;!$$

La puissance acoustique est conservée le long du cornet ! L'amplificat° provient de la ↓ de sect° !

Partie B – Discussion des hypothèses :

1) Condit° pour avoir des dépendances spatiale selon x seulement si la sect° varie suffisamment lentement

soit $\boxed{\sigma L \ll 1}$ et $\boxed{\sigma \lambda \ll 1}$

↳ longueur du pavillon

2) L'équat° locale de conservat° de la masse $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$ n'apparaîtrait pas affectée par le rétrécissement du cornet à cause de l'hypothèse unidimensionnelle ! Le bilan permet de le prendre en compte $S(x)$ en conservant un chp de vitesse simplifié ($v_r \ll v_x$!! mais v_r existe !)