

# TD – bloc 4 – Fluides en écoulement partie 1

## Autour du débit volumique

### 1. Calcul d'un débit

Un palet à coussin d'air éjecte de l'air par sa base avec une vitesse  $v_z(h) = -v_0 \vec{e}_z$ . Le champ des vitesses a la symétrie cylindrique et a pour expression

$$\vec{v} = v_0 \frac{r}{2h} \vec{u}_r - v_0 \frac{z}{h} \vec{e}_z,$$

où  $h$  est la hauteur à laquelle flotte le palet au-dessus de la table (cf. Figure 9.12).

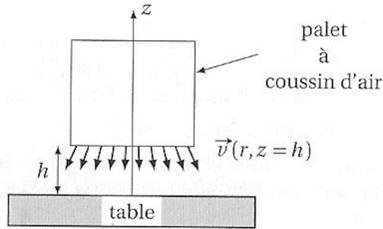


Figure 9.12. Schéma d'un palet à coussin d'air, « flottant » à une hauteur  $h$  au-dessus d'une table.

1. Vérifier que ce champ de vitesses est compatible avec les conditions aux limites.
2. Vérifier que l'écoulement est incompressible.
3. Déterminer l'expression du débit de volume à travers un cylindre de rayon  $r$ , de hauteur  $h$  et d'axe  $Oz$  situé entre la base du palet et la table. Vérifier la conservation du débit de volume.

### 2. Débit sanguin

À la sortie du cœur, l'aorte peut être considérée comme une conduite cylindrique de rayon  $a_0 = 1$  cm. Le débit volumique est  $D_V = 6 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$  et on suppose que l'écoulement peut être considéré comme stationnaire. La viscosité du sang est  $\eta \approx 4 \cdot 10^{-3} \text{ Pl}$  et sa masse volumique vaut  $\mu = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

a) Quelle est la vitesse  $v$  du sang dans l'aorte ? On supposera que le champ des vitesses est uniforme sur une section droite.

Le sang est évacué du cœur d'abord au niveau de l'aorte, qui se divise ensuite en  $N_a$  artères de rayon  $a_a$ , puis en  $N'_a$  artérioles de rayon  $a'_a = 20 \mu\text{m}$  (Fig. 44). Le débit volumique au travers d'une artère est  $D_{V,a} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ .

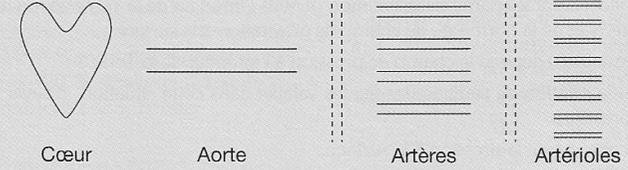


Figure 44

- b) Calculer le nombre  $N_a$  d'artères.
- c) Faire de même avec celui  $N'_a$  sachant que la vitesse du sang dans une artériole est  $v'_a = 5 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- d) L'écoulement est-il laminaire dans une artériole ?

## Statique des fluides et évolution de la pression

### 2. Prise en compte de la compressibilité de l'eau

L'eau liquide est en fait un peu compressible et sa masse volumique peut s'approximer en fonction de la pression (à température constante) sous la forme :

$$\rho(P) = \rho_0 (1 + \alpha(P - P_0))$$

où  $\rho_0$ ,  $P_0$  et  $\alpha$  sont des constantes.

- a) Quel est le signe de  $\alpha$  ?
- b) Donner l'expression de la pression en fonction de la profondeur sachant qu'à la surface  $z = 0$ ,  $P = P_0$ , et que l'axe  $z$  est orienté vers le bas.
- c) Commenter cette solution pour de faibles profondeurs. On explicitera cette notion.

### 3. Atmosphère terrestre en équilibre : critique du modèle isotherme

#### Préambule

La courbe ci-contre décrit le profil de température au sein de l'atmosphère terrestre.

Proposer un modèle simple d'évolution de la température  $T(z)$  dans la troposphère (partie habitée par le monde vivant), qui concerne notamment l'aviation commerciale.

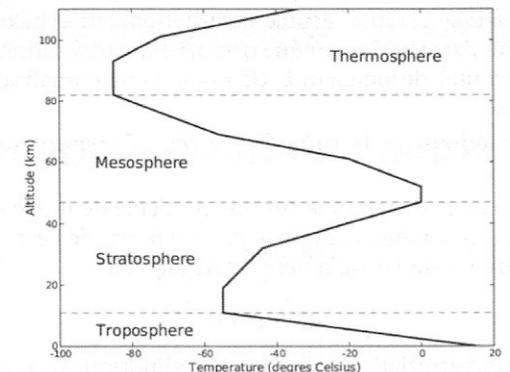


Figure 10.9. Profil de température dans l'atmosphère.

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Le champ de pesanteur, d'intensité supposée uniforme  $g$ , est dirigé suivant l'axe vertical ascendant  $Oz$ , et de sens opposé.

Les gaz ont les propriétés du gaz parfait. La constante des gaz parfaits est notée  $R$ . La masse molaire moyenne de l'air est notée  $M_e$ , sa pression  $P$ , sa température  $T$  et sa masse volumique  $\mu$ . On désigne par  $P_0, T_0$  et  $\mu_0$  les valeurs de  $P, T$  et  $\mu$  au niveau du sol (où  $z = 0$ ).

### 1. Atmosphère isotherme

On s'intéresse à l'équilibre de l'atmosphère, dont on adopte dans un premier temps un modèle isotherme, de température uniforme  $T_0$ . On prendra  $T_0 = 288 \text{ K}$ .

- Exprimer la masse volumique de l'air en fonction de  $P, R, T_0$  et  $M_e$ .
- Écrire la condition d'équilibre statique de l'air. En déduire l'expression de la pression  $P(z)$  en fonction de  $P_0, T_0$  et de la hauteur barométrique  $H = RT_0 / (M_e g)$  et de l'altitude  $z$ .
- En prenant pour l'air une composition molaire de 20 % en  $O_2$  et de 80 % en  $N_2$ , calculer la valeur numérique de  $H$ . À quelle altitude  $z_{50\%}^{iso}$  la pression est-elle égale à  $P_0/2$  ?

### 2. Équilibre polytropique

Le modèle d'atmosphère isotherme précédent n'est pas réaliste ; aussi, s'intéresse-t-on à l'équilibre polytropique : l'expérience montre que, jusqu'à une altitude d'environ 10 km, la température de l'air vérifie une loi linéaire du type  $T = T_0(1 - \alpha z)$  où  $\alpha = 1/z_0$  est une constante positive. Cette approximation linéaire est en fait le développement au premier ordre en  $z/z_0$  d'une expression plus précise. La valeur expérimentale  $z_0 \approx 33 \text{ km}$  justifie ce développement dans les dix premiers kilomètres de l'atmosphère.

- Montrer que l'on peut écrire  $P(z) = P_0(1 - \alpha z)^\beta$  et  $\mu(z) = \mu_0(1 - \alpha z)^{\beta-1}$  où l'on donnera l'expression de  $\beta$  en fonction de  $H$  et de  $z_0$ .
- À quelle altitude  $z_{50\%}^{pol}$  la pression est-elle égale à  $P_0/2$  ? Comparer cette valeur à celle obtenue à la question 1.c). Ce résultat était-il prévisible ?
- Un bulletin météorologique fournit les données représentées graphiquement sur les figures 39, 40 et 41. La pression est donnée en  $10^5 \text{ Pa}$ , la température en K, la densité en  $\text{kg.m}^{-3}$  et l'altitude en km. Un ajustement aux moindres carrés de ces données permet d'obtenir les relations :

$$T = 288,14 - 6,94 z$$

$$P = 1,01(T/288,08)^{5,26}$$

Ceci est-il compatible avec le modèle polytropique ?

#### Valeurs numériques utiles

Constante des gaz parfaits :

$$R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}.$$

Accélération de la gravité à la surface de la Terre :

$$g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}.$$

Masse atomique de l'oxygène :

$$M_O = 16 \times 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}.$$

Masse atomique de l'azote :

$$M_N = 14 \times 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}.$$

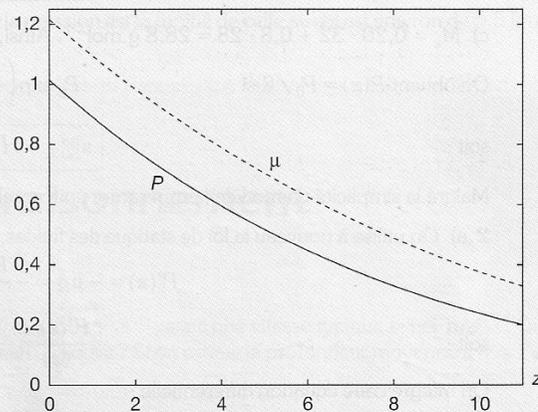


Figure 39

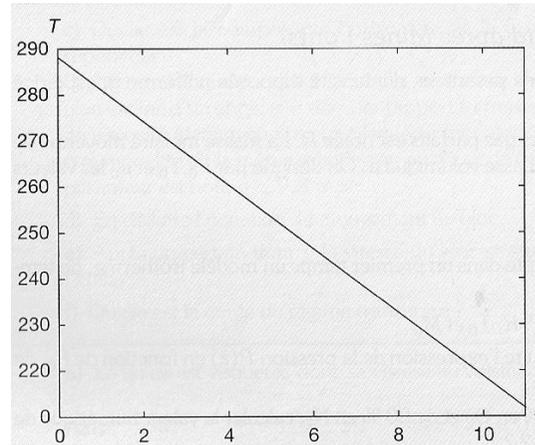


Figure 40

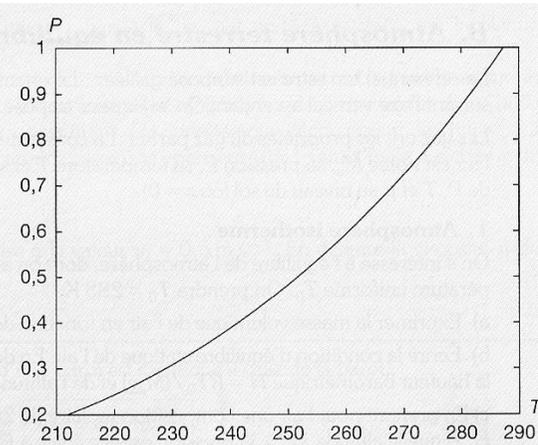


Figure 41

## Pour aller plus loin...

### Questions du type résolution de problème

#### Quelle est la différence entre aérostat et un sous-marin ?

Utiliser la poussée d'Archimède pour expliquer pourquoi un ballon à gaz montera à une altitude bien déterminée, alors qu'un sous-marin qui commence à s'enfoncer dans l'eau descendra jusqu'au fond.

#### Masse de l'atmosphère ?

Données  $M(\text{air}) = 29 \text{ g.mol}^{-1}$

Pression atmosphérique à basse altitude  $P_0 = 1 \text{ atm}$

Rayon terrestre  $R_T = 6400 \text{ km}$

Déterminer la masse de l'atmosphère terrestre.

Vous aborderez deux approches qui conduisent au même résultat :

- modèle d'une atmosphère comme une couche plane d'épaisseur  $e$  soumise aux forces de pression
- modèle d'une atmosphère comme une couche plane d'épaisseur  $e$  et exploiter le facteur de Boltzmann

## Prise en compte de la viscosité d'un fluide

### Écoulement de Couette plan « parallèle »

#### 4. Modélisation d'une lubrification et mesure de la viscosité

Un fluide newtonien est réparti sur une hauteur  $e$  entre deux plaques horizontales très longues. La plaque du dessous est immobile et celle du dessus possède la vitesse constante  $v_0$  (Fig. 38).

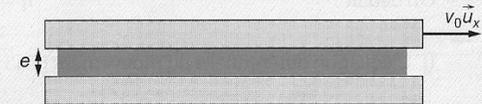


Figure 38

a) Quelles sont les conditions aux limites vérifiées par l'écoulement ?

b) Proposer la forme la plus simple possible de champ des vitesses vérifiant ces conditions.

c) Quelle est la composante horizontale de la force exercée par le fluide, par unité de surface, sur la plaque supérieure ?

Un bloc métallique parallélépipédique, de surface carrée de côté  $a = 10 \text{ cm}$  et de masse  $m = 1 \text{ kg}$ , est posé sur un plan incliné d'un angle  $\alpha = 45^\circ$  par rapport à l'horizontale. Le plan incliné est lubrifié, c'est-à-dire enduit d'une huile de viscosité (dynamique)  $\eta$ . La plaque se met alors en mouvement. On suppose que l'écoulement de l'huile peut être modélisé de la même manière qu'au début de cet exercice, avec une épaisseur  $e = 1 \text{ mm}$  d'huile. Le champ de pesanteur est noté  $g \simeq 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ .

d) En déduire l'équation du mouvement du bloc.

e) Après un certain temps, la vitesse du bloc se stabilise à la valeur  $v_f = 0,5 \text{ m.s}^{-1}$ . En déduire la viscosité  $\eta$  de l'huile.

f) Quelle est la durée du régime transitoire ?

## Pour aller plus loin...

### 5. Amortisseur hydraulique (oral Centrale)

Un amortisseur hydraulique se modélise par un cylindre de rayon  $R$  à l'intérieur duquel un piston de rayon légèrement inférieur  $R' = R - e$  ( $e \ll R$ ) et de longueur  $\ell$  peut se déplacer en translation (Fig. 52). On note  $\vec{V} = V\vec{u}_x$  sa vitesse (on suppose  $V > 0$  pour les raisonnements). Le cylindre est rempli d'une huile incompressible de masse volumique  $\mu$  et de viscosité dynamique  $\eta$ . Cette huile peut s'écouler sur le bord entre le piston et le cylindre.

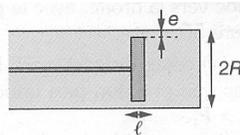


Figure 52

a) Expliquer pourquoi le mouvement du piston engendre un écoulement périphérique de l'huile. Dans quel sens est cet écoulement ?

b) Exprimer le débit volumique, ainsi que la vitesse moyenne  $\bar{v}$ .

c) La vitesse du fluide entre le piston et le cylindre est choisie de la forme  $\vec{v} = v_x(r)\vec{u}_x$ . Donner la forme du graphe  $v_x(r)$  en précisant les points d'intérêt.

d) Expliquer pourquoi l'existence d'un gradient de pression est indispensable. Quels sont ses sens et direction ?

e) Sans expliciter les calculs, dire quel est l'intérêt de ce dispositif.

f) Toujours avec le minimum de calculs, donner le plus précisément possible la force exercée sur le piston et liée à l'écoulement.

### 6. Sujet de concours – Centrale PSI 2013 – Les frottements de glissement - lubrification

## II Un système auto-lubrifié

Les forces de frottement associées au glissement d'un solide sur la glace ou la neige sont fréquemment étudiées en raison de leur importance pour diverses pratiques récréatives ou pour les moyens de transport dans les régions froides. À des températures de l'ordre de  $-40^\circ\text{C}$ , ce glissement s'effectue avec une résistance énorme, comparable à celle que l'on observe sur du sable. Pour des températures de l'ordre de  $-10^\circ\text{C}$ , les forces de frottement chutent d'un ordre de grandeur et le glissement devient aisé. Ce comportement s'explique par la fusion superficielle de la glace sous l'objet glissant, la fine couche d'eau liquide apparue jouant le rôle de lubrifiant. L'écoulement de cette eau est supposé incompressible dans tout le problème. Nous appellerons « patin » le solide  $\Sigma_1$  glissant sur la glace, désignée par  $\Sigma_2$ .

Dans les parties II et III, il est question des forces s'exerçant sur  $\Sigma_1$  dans les jonctions. On note  $A_1$  l'aire d'une jonction et  $\vec{R}_1$  la résultante des forces que  $\Sigma_1$  y subit. On la décompose sous la forme  $\vec{R}_1 = R_{1x}\vec{e}_x + R_{1z}\vec{e}_z$ . Le vecteur unitaire  $\vec{e}_z$  est perpendiculaire à l'interface apparente des deux solides ;  $\vec{e}_x$  lui est parallèle dans la direction du glissement. La réunion de toutes les jonctions donne l'aire réelle de contact  $A$  sur laquelle  $\Sigma_1$  est soumis à des efforts de résultante  $\vec{R} = R_x\vec{e}_x + R_z\vec{e}_z$ .

### II.A – Mécanisme de fusion

Deux hypothèses ont été émises pour expliquer la fusion superficielle de la glace :

- selon Reynolds, la fusion s'explique par la surpression exercée par le patin sur la glace ;
- selon Bowden, la fusion s'explique par l'élévation de température provoquée par les frottements.

Les questions ci-dessous apportent des éléments pour trancher parmi ces deux propositions.

II.A.1) Considérons une paire de skis d'aire apparente  $S = 0,3 \text{ m}^2$  supportant un skieur de  $75 \text{ kg}$  (skis compris) glissant sur un plan horizontal. On suppose que l'aire réelle de contact  $A$  représente un millième de l'aire apparente. Calculer la surpression s'exerçant sur la neige.

II.A.2) Rappeler l'allure du diagramme d'état de l'eau dans le plan  $(P, T)$ . On assimile la courbe relative à l'équilibre liquide-solide à une droite. Déterminer sa pente puis l'abaissement de la température de fusion provoqué par la surpression de la question précédente.

II.A.3) Considérons maintenant l'échauffement associé aux frottements pour un patin glissant à la vitesse  $v = 1 \text{ m.s}^{-1}$  sur une glace sèche, la force surfacique de frottement valant  $\tau_c = 1 \times 10^7 \text{ Pa}$ . Calculer numériquement la puissance surfacique  $p_s = -v\tau_c$  correspondante.

II.A.4) Pour un patin isolant, toute la chaleur produite par les frottements diffuse vers la glace. En utilisant le résultat de la question I.A.3.b, exprimer l'échauffement de la surface de la glace pendant la durée  $\tau$  d'un contact.

II.A.5) Calculer numériquement le temps nécessaire à un échauffement de  $10^\circ\text{C}$ .

II.A.6) L'expérience montre que les forces de frottement augmentent énormément si  $v$  tend vers 0 et que des patins en cuivre glissent beaucoup moins bien que des patins en bois de chêne. Parmi les hypothèses de Bowden et Reynolds, laquelle est correcte ? Vous expliquerez comment chacun des points précédents concourt à la conclusion ou au contraire s'y oppose.

### II.B – Frottements visqueux et dissipation dans la couche lubrifiante

Au niveau d'une jonction entre la glace immobile et le patin de vitesse  $v\vec{e}_x$  existe un film d'eau liquide d'épaisseur  $h$  et d'aire  $A_1$ . Soit  $\eta$  la viscosité dynamique de l'eau. On modélise la situation par un écoulement laminaire permanent dans lequel on recherche un champ de vitesse du type  $\vec{u} = u(x, z)\vec{e}_x$  (figure 4). L'interface entre la glace et l'eau liquide a pour cote  $z = 0$ ,  $\vec{e}_z$  désignant la verticale ascendante.

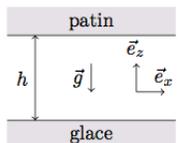


Figure 4

II.B.1) Justifier que  $u(x, z)$  ne dépend en réalité que de  $z$ .

II.B.2) Dans la situation étudiée ici, la force surfacique s'exerçant vers les  $z$  croissants au travers d'une surface de cote  $z$  du fluide s'exprime par  $\vec{\tau}_v = -\eta \frac{du}{dz} \vec{e}_x$ . En déduire l'expression de la force volumique de viscosité  $\vec{f}$ .

II.B.3) On rappelle l'équation de Navier-Stokes régissant la dynamique des fluides visqueux newtoniens :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla p + \rho \vec{g} + \vec{f}$$

Aucun gradient de pression n'est appliqué selon  $\vec{e}_x$ . Déterminer le champ de vitesse  $u(z)$ .

II.B.4) Exprimer la composante tangentielle  $R_{x1}$  de la force exercée sur le patin dans cette jonction.

II.B.5) Exprimer la puissance  $P_1$  de la force exercée par le patin sur l'eau d'une jonction.

II.B.6) Pour une épaisseur de film  $h = 0,1 \mu\text{m}$  et une vitesse  $v = 1 \text{ m.s}^{-1}$ , calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement. Quelle hypothèse de l'énoncé cette valeur permet-elle de confirmer ?

**II.B.7)** On considère le système fermé constitué par l'eau contenue à l'instant  $t$  dans une jonction d'aire  $A_1$ . L'écoulement est toujours supposé permanent et on néglige les effets de bord.

a) Justifier que le travail des forces de pression sur ce système est nul.

b) Montrer que la puissance thermique sortant du système vaut  $P_{th} = \eta \frac{v^2 A_1}{h}$ .

### III Détermination de l'épaisseur de la couche lubrifiante

La détermination de l'épaisseur  $h$  de la couche lubrifiante, conjointement à la force de frottement s'exerçant sur l'ensemble du patin, constitue un défi théorique qui n'a été que très partiellement relevé à ce jour. De nombreuses questions restent ouvertes concernant l'aire réelle de contact, le caractère intermittent des jonctions, l'état de surface de la glace et du patin, etc. Cette partie du problème explore quelques aspects de ces questions dans le cadre de modèles simples. Bien que l'épaisseur  $h$  dépende du temps, on admet que les résultats établis dans **II.B** s'appliquent à chaque instant.

#### III.A – Croissance du film d'eau contrôlée par les frottements seuls

Toute l'énergie thermique produite par la dissipation visqueuse avec la puissance calculée en **II.B.7.b** est supposée disponible pour la fusion de la glace. L'eau liquide formée, de masse volumique  $\rho$ , s'accumule dans la jonction. On note  $L_f$  l'enthalpie massique de fusion de la glace.

Soit  $dh$  l'augmentation d'épaisseur du film d'eau dans une jonction d'aire  $A_1$ , consécutive de la fusion de la glace pendant  $dt$ . Exprimer  $\frac{dh}{dt}$  en fonction de  $\eta$ ,  $v$ ,  $\rho$ ,  $L_f$  et  $h(t)$ .

#### III.B – Expulsion du film d'eau

En réalité, l'eau liquide présente dans les jonctions en est expulsée sous l'effet des forces verticales, ce qui limite la croissance du film lubrifiant. Dans toute la **partie III.B**, on se concentre sur ce phénomène d'expulsion pour évaluer la décroissance de  $h$  qu'il provoquerait s'il intervenait seul. On omet donc momentanément la translation du patin et la fusion de la glace.

On adopte un modèle à symétrie cylindrique (**figure 5**), le patin et la glace étant assimilés près d'une jonction à des disques de diamètre  $D = 0,1$  mm séparés par le film d'eau d'épaisseur  $h(t)$  de l'ordre de  $0,1 \mu\text{m}$ . On utilise des coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  centrées sur l'axe de révolution de la jonction. La base locale associée est  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ . On recherche le champ de vitesse de la forme  $\vec{u}(M) = u_r(r, z)\vec{e}_r + u_z(r, z)\vec{e}_z$ . En  $r = D/2$  l'eau liquide quitte la jonction et retrouve la pression atmosphérique  $P_0$ .

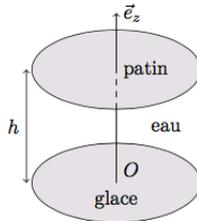


Figure 5

**III.B.1)** On procède à une analyse d'ordres de grandeurs pour résoudre l'équation de Navier-Stokes dont la projection sur  $\vec{e}_r$  s'écrit :

$$\rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right) \quad (\text{III.1})$$

On note  $U$  un ordre de grandeur de  $u_r$  et  $W = h/\tau$  un ordre de grandeur de  $u_z$  avec  $\tau = 10^{-4}$  s.

a) En exploitant l'incompressibilité de l'écoulement, relier  $U$  à  $W$ .

b) Analyser l'ordre de grandeur des quatre termes diffusifs. Montrer numériquement que l'un est dominant. On néglige dans la suite les trois autres.

c) Montrer de la même manière qu'on peut négliger les termes convectifs devant celui associé aux forces visqueuses.

d) Faire de même pour le terme instationnaire proportionnel à  $\frac{\partial u_r}{\partial t}$ .

e) En déduire l'écriture simplifiée de l'équation **III.1**.

Des analyses similaires, non demandées, permettent de montrer que les gradients axiaux de pression sont négligeables ce qui revient à considérer que  $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$ .

**III.B.2)** Exprimer le champ de vitesse  $u_r$  en fonction de  $z$ ,  $h$ ,  $\eta$  et  $\frac{dp}{dr}$ .

**III.B.3)** Exprimer le débit volumique  $D_v$  sortant d'un cylindre de rayon  $r \leq D/2$  et de hauteur  $h$ .

**III.B.4)** Relier d'autre part ce débit à  $\frac{dh}{dt}$ .

**III.B.5)** En déduire l'expression suivante du champ de pression :

$$p = P_0 + \frac{3\eta}{h^3} \left( r^2 - \frac{D^2}{4} \right) \frac{dh}{dt}$$

**III.B.6)** Calculer la résultante des forces de pression  $R_p$  exercée sur le disque de rayon  $D/2$  par lequel le patin prend appui sur le fluide.

**III.B.7)** Les termes indépendants de  $P_0$  de  $R_p$  s'identifient à  $R_{z1}$ , force normale s'exerçant sur la jonction. En supposant  $R_{z1}$  constante, trouver la loi horaire de diminution de  $h(t)$ . On notera  $h_0$  la valeur de  $h$  à  $t = 0$  et  $\tau_1 = \frac{3\eta\pi D^4}{64h_0^2 R_{z1}}$ .

**III.B.8)** Calculer numériquement  $h(\tau)$  et  $\tau_1$  pour  $h_0 = 100$  nm et  $R_{z1} = 2 \times 10^{-2}$  N.

#### III.C – Croissance isotherme du film d'eau limitée par expulsion

En poursuivant les calculs de **III.B**, on obtient une expression du débit expulsé de la jonction :  $D_v = \frac{8R_{z1}h^3}{3\eta D^2}$ .

On reprend ici l'analyse des variations de  $h(t)$  en supposant que cet effet d'expulsion et celui de fusion de la glace considéré dans **III.A** s'additionnent. Pour les jonctions cylindriques envisagées ici,  $A_1 = \pi D^2/4$ .

**III.C.1)** Montrer que dans ce modèle,  $h(t)$  obéit à une équation différentielle du type

$$\frac{dh}{dt} = \frac{C_1}{h} - C_2 h^3 \quad (\text{III.2})$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes à exprimer en fonction de  $\eta$ ,  $v$ ,  $\rho$ ,  $L_f$ ,  $R_{z1}$  et  $D$ .

**III.C.2)** Exprimer la hauteur limite  $h_{lim}$  qu'atteindra le film.

**III.C.3)** Des résultats expérimentaux suggèrent qu'à des températures pas trop basses, la résultante des forces de frottement tangentielles exercées sur le patin est proportionnelle à  $\sqrt{v}$ . Montrer que le modèle permet d'interpréter ce comportement.

Matériau	$\rho$ (kg · m <sup>-3</sup> )	$c$ (J · K <sup>-1</sup> · kg <sup>-1</sup> )	$\lambda$ (W · K <sup>-1</sup> · m <sup>-1</sup> )	$\tau_c$ (Pa)
acier	$7,9 \times 10^3$	$4,5 \times 10^2$	75	$2 \times 10^8$
granit	$2,7 \times 10^3$	$8,0 \times 10^2$	2,2	$2 \times 10^8$
Téflon	$2,2 \times 10^3$	$1,1 \times 10^3$	2,3	$2 \times 10^6$
cuire	$9,0 \times 10^3$	$3,9 \times 10^2$	$3,9 \times 10^2$	
chêne	$8 \times 10^2$	$2 \times 10^3$	0,2	
glace	$9,2 \times 10^2$	$2,1 \times 10^3$	2,3	

Échelles de température :  $0^\circ\text{C} = 273,15$  K

Pression atmosphérique :  $P = 101,3$  kPa

Coordonnées du point triple de l'eau :  $T_t = 273,16$  K,  $P_t = 0,611$  kPa

Viscosité dynamique de l'eau à  $0^\circ\text{C}$  :  $\eta = 1,8 \times 10^{-3}$  Pa · s

Masse volumique de l'eau liquide :  $\rho = 1,0 \times 10^3$  kg · m<sup>-3</sup>

Enthalpie massique de fusion de la glace  $0^\circ\text{C}$  :  $L_f = 3,3 \times 10^5$  J · kg<sup>-1</sup>

Dureté de l'acier :  $\sigma_c = 1 \times 10^9$  Pa

Accélération de la pesanteur  $g = 9,8$  m · s<sup>-2</sup>.

#### Formulaire

$$\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad \int_0^\infty u e^{-\alpha u} du = \frac{1}{\alpha^2} \quad \int_0^\infty u^{3/2} e^{-\alpha u} du = \frac{3\sqrt{\pi}}{4\alpha^{5/2}}$$

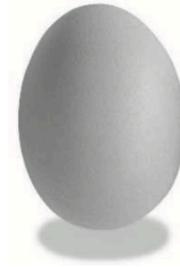
$$\text{div } \alpha \vec{A} = \alpha \text{ div } \vec{A} + \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \alpha$$

En coordonnées cylindriques,

$$\text{div } \vec{A}(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

## Physique de l'œuf

L'expression latine *ab ovo* est tirée de l'art poétique du poète latin Horace et signifie « à partir de l'œuf », donc à partir du commencement. C'est une allusion à l'œuf pondu par Lédèa suite à son union avec Zeus métamorphosé en cygne, œuf dont serait sortie Hèlène ; Hèlène qui, mariée au roi de Sparte, fut enlevée par le prince troyen Pàris, ce qui déclencha la guerre de Troie, racontée par Homère dans *l'Iliade*. Comme le remarqua Horace, Homère, poète habile, ne débuta pas son récit *ab ovo*, mais *in medias res*, en pleine action. Dans ce problème, nous allons désobéir au conseil d'Horace et « partir de l'œuf » pour proposer quelques réflexions sur la physique de l'œuf...



### Partie I - Œuf cru ou œuf dur ?

Une façon de distinguer un œuf dur d'un œuf cru sans les casser consiste à les mettre en rotation. Nous mettons en œuvre une telle expérience dans le **document 3**.

#### Document 3 - Rotation d'un œuf cru et d'un œuf dur

Lorsque l'on met simultanément deux œufs, l'un cru (à gauche) et l'autre dur (à droite), en rotation sur une surface plane, on fait les constatations suivantes :

- l'œuf dur, dont l'intérieur est solide et figé, tournoie longtemps ; en revanche, l'œuf cru s'arrête au bout de quelques tours, à cause du frottement visqueux de la matière qu'il contient sur la coquille qui dissipe l'énergie de rotation.
- en stoppant la rotation pendant une fraction de seconde puis en libérant de nouveau les œufs, l'œuf cru se remet à tourner spontanément (entraîné par les fluides à l'intérieur dont la rotation n'a pas cessé) alors que l'œuf dur reste arrêté.

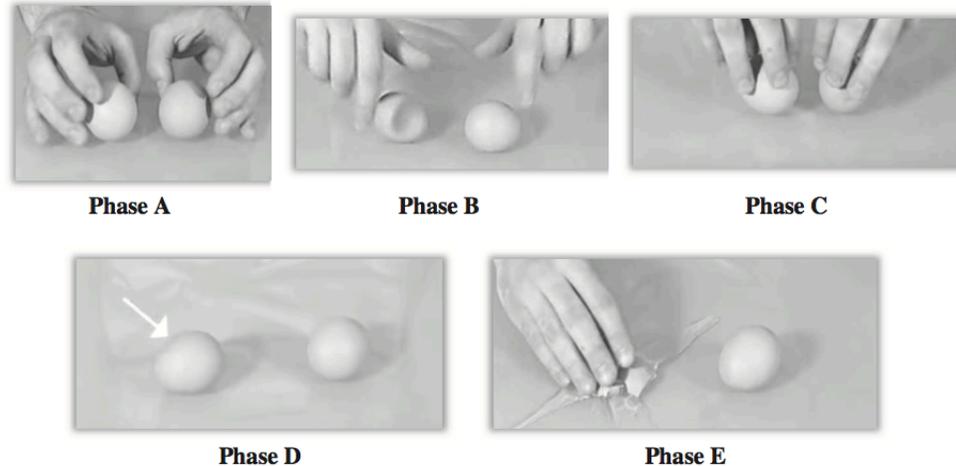


Figure 6 – Évolution des deux œufs en rotation dans l'ordre chronologique des phases A, B, C, D, E

On supposera dans tout le problème que l'œuf étudié est un œuf de poule de taille moyenne.

### I.1 - Phase d'immobilisation de la coquille et redémarrage

On analyse l'œuf cru et notamment l'écoulement de son contenu. Cette analyse permettra d'interpréter l'expérience citée dans le **document 3**.

On suppose que le fluide constitué de blanc et de jaune d'œuf forme un fluide newtonien et incompressible de viscosité dynamique  $\eta$  et de masse volumique  $\rho$ .

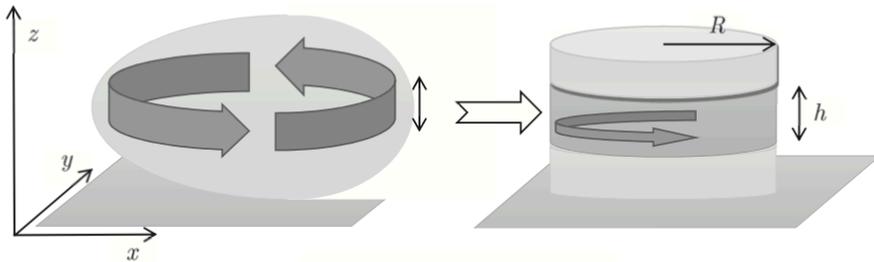
Dans toute la suite, on prendra  $\rho = 1,1 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et  $\eta = 1,0 \text{ Pl}$ .

**Q26.** Quel est le fluide le plus proche de celui contenu dans un œuf cru, l'eau ou l'huile ? On expliquera clairement sa démarche.

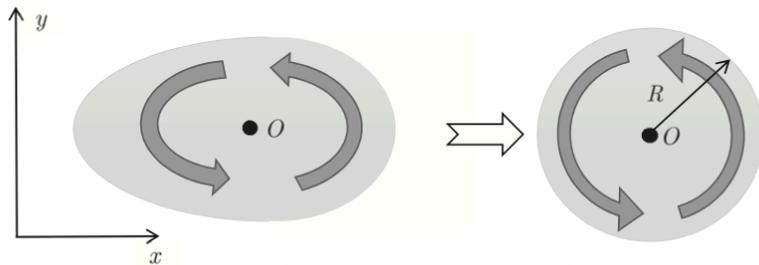
On s'intéresse à la **phase C** d'arrêt du **document 3**, qui ne dure qu'une fraction de seconde. Pendant cette phase, la coquille de l'œuf est à l'arrêt alors que le fluide intérieur est encore en mouvement.

Afin de modéliser au mieux cette phase, on fait l'hypothèse que le fluide occupe seulement une hauteur  $h$  dans la coquille, si bien que nous pouvons assimiler l'écoulement à celui autour d'un cylindre de hauteur  $h$  et de rayon  $R$ .

Une vue dans l'espace et une vue de dessus sont représentées respectivement sur les **figures 7a** et **7b**.

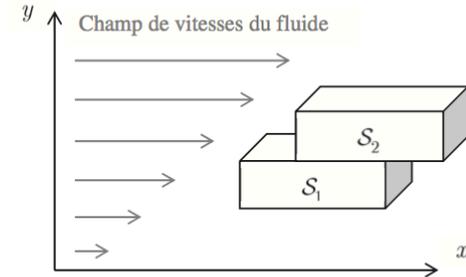


**Figure 7a** – Vue dans l'espace



**Figure 7b** – Vue de dessus

Un tel écoulement est qualifié d'écoulement de Couette cylindrique. Son étude étant relativement complexe, on procèdera par analogie avec un écoulement de type Couette plan, dans lequel le fluide est décrit par un écoulement unidirectionnel :



**Figure 8** – Deux veines  $S_1$  et  $S_2$  dans un fluide à profil de vitesse dépendant de  $y$

Les veines  $S_1$  et  $S_2$  représentées sont des portions de fluide newtonien de viscosité  $\eta$  en contact par la surface  $S$ ,  $S_2$  allant plus vite que  $S_1$ . La force exercée par la veine  $S_1$  sur la veine  $S_2$  s'écrit

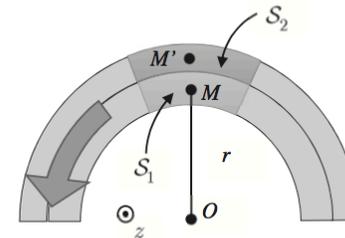
$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} S \vec{u} \text{ avec } \vec{u} \text{ un vecteur unitaire.}$$

**Q27.** À l'aide de la **figure 8**, interpréter l'expression de cette force. Identifier le vecteur  $\vec{u}$ . Donner la dimension de  $\eta$ .

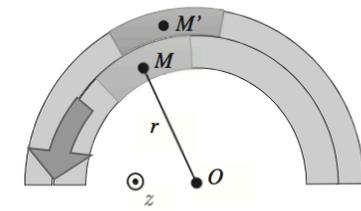
Dans la coquille d'œuf, le fluide a un mouvement circulaire.

On adoptera dans toute la suite un système de coordonnées cylindriques et on se placera dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Soient  $M$  et  $M'$  deux points du fluide appartenant respectivement à la veine  $S_1$  et à la veine  $S_2$ , placés à une distance  $r = OM$  et  $r + dr = OM'$  (**figure 9a**). Le cas d'un écoulement à vitesse angulaire non uniforme est représenté sur la **figure 9b**.



**Figure 9a** – Deux veines  $S_1$  et  $S_2$  dans un fluide en écoulement circulaire à l'instant initial



**Figure 9b** – Cas d'un écoulement à vitesse angulaire non uniforme  $\omega(r, t)$

**Q28.** Donner l'expression de la vitesse du point  $M$  lié à  $S_1$  en coordonnées cylindriques en fonction de  $r$ , de  $\omega$  et d'un vecteur unitaire. Comment évolue  $\omega(r,t)$  avec la coordonnée  $r$  dans la **figure 9b** ?

Afin de prendre en compte le mouvement relatif des deux veines, une expression plus adaptée de la force de viscosité de la veine  $S_1$  sur la veine  $S_2$ , séparées par une interface de surface  $dS$ , s'écrit :

$$d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\eta r \frac{\partial(v/r)}{\partial r} dS \vec{e}_\theta.$$

**Q29.** À quelle condition sur les valeurs de  $r$  retrouve-t-on une expression de la force de viscosité similaire à celle d'un écoulement unidirectionnel ? Interpréter.

**Q30.** Exprimer le moment élémentaire  $dM_{Oz}(r)$  en projection sur l'axe  $Oz$  de la force  $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  exercée par la veine  $S_1$  sur la veine  $S_2$ .

**Q31.** En déduire que le moment résultant le long de l'axe  $Oz$  exercé par le fluide sur la coquille de l'œuf s'écrit :

$$\Gamma = -2\pi h \eta R^3 \left( \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)_{r=R}.$$

On s'intéresse alors à l'instant suivant correspondant au lâcher de l'œuf, celui pour lequel on assiste au redémarrage de la rotation de l'œuf cru (**Phase D** du **document 3**).

Soit  $J_{Oz}$  le moment d'inertie de la coquille d'œuf en rotation autour de l'axe fixe  $Oz$  à la vitesse angulaire  $\Omega$ .

On négligera les frottements dus à l'air environnant et au support sur lequel l'œuf est posé.

**Q32.** Exprimer la condition d'adhérence portant sur la vitesse angulaire  $\omega(r,t)$  entre le fluide intérieur et la coquille d'œuf.

**Q33.** En déduire le moment cinétique  $L_{Oz}$  de la coquille par rapport à l'axe  $Oz$  en fonction de  $J_{Oz}$  et de  $\omega(R,t)$ .

**Q34.** Par application du théorème du moment cinétique, proposer une équation aux dérivées partielles reliant  $\omega(r,t)$  et  $\omega(R,t)$ .

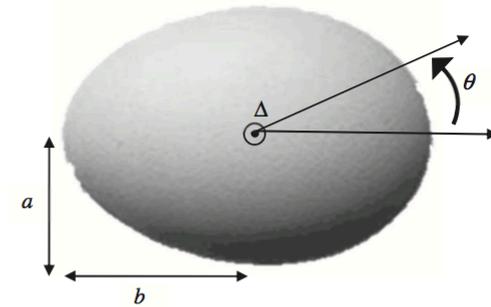
**Q35.** Expliquer à l'aide de cette équation pourquoi, contrairement à l'œuf dur, l'œuf cru redémarre sa rotation dans le même sens que celui qu'il avait dans la phase B.

### I.2 - Œuf dur ou œuf cru ?

On s'intéresse à la phase de rotation des deux œufs cru et dur. D'après le **document 3**, l'œuf dur aura tendance à tourner plus longtemps que l'œuf cru, ce qui permet de distinguer un œuf dur d'un œuf cru.

**Q36.** En s'appuyant sur le résultat de la **question Q31**, évaluer le nombre de tours qu'effectuera l'œuf cru lors d'une mise en rotation par un opérateur. Cette question s'inscrit dans une démarche de résolution de problème. On fera apparaître clairement sa démarche de résolution, les hypothèses effectuées, l'évaluation des grandeurs d'intérêt, la validation du résultat...

Des informations utiles sont données sur la **figure 10**.



**Figure 10** – Paramétrage de l'œuf cru (vue du dessus)

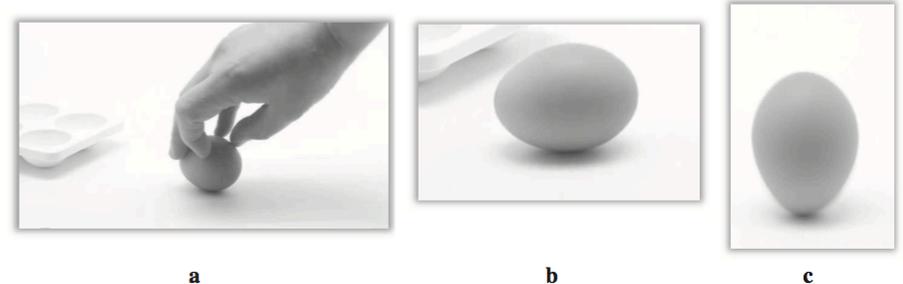
Le moment d'inertie de la coquille d'un œuf par rapport à l'axe  $\Delta$  vertical de rotation est  $J_\Delta = 2ma^2 + \frac{1}{6}mb^2$  avec  $m$  la masse de la coquille de l'œuf,  $a$  et  $b$  les dimensions de l'œuf.

## Partie II - Œuf dur mis en rotation

Une autre constatation encore plus étonnante est décrite dans le **document 4**.

### Document 4 - L'œuf qui se dresse

Lorsqu'on impulse un mouvement rotatif très rapide (plus d'une dizaine de tours par seconde) à un œuf dur posé sur une surface bien plane et pas trop lisse, il se produit un étrange phénomène. Au bout de quelques tours, l'œuf se dresse et se met à tourner sur sa pointe ou sur sa base ! Lorsqu'il perd peu à peu de la vitesse par frottements, il finit par se remettre en position couchée, position où son centre de gravité est le plus bas.



**Figure 11** – Evolution d'un œuf dur en rotation dans l'ordre chronologique a, b et c