

CB Physique/Chimie – 4H
PSI - Lycée du Parc des Loges *Difficulté supérieure*

Calculatrices autorisées.

Partie 1 - Télécommunications

Données numériques et constantes physiques

- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- Masse d'un électron : $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
- Constante d'AVOGADRO : $\mathcal{N}_A = 6,0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- Perméabilité du vide : $\mu_0 = 1,3 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
- Constante de BOLTZMANN : $k_B = 1,4 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8,8 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- Charge élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
- Rayon de la Terre : $R_T = 6\,400 \text{ km}$

I Le fil du télégraphe

- Sire, une nouvelle dépêche.
- D'où vient-elle ?
- De Tomsk.
- Le fil est coupé au-delà de cette ville ?
- Il est coupé depuis hier.
- D'heure en heure, général, fais passer un télégramme à Tomsk, et que l'on me tienne au courant.

Dans le roman de JULES VERNE, *Michel Strogoff*, publié en 1876, l'année même de la fondation à Paris de l'École Supérieure de Télégraphie (actuellement Télécom Paris), les télécommunications électriques (le télégramme) jouent, dès la première page, un rôle essentiel.

- – 1. L'alphabet cyrillique utilisé par Michel Strogoff comporte 32 lettres, plus les chiffres et quelques symboles de ponctuation. Combien de symboles binaires (les bits ou les points et traits du code MORSE) faut-il prévoir pour coder chaque caractère d'un document écrit en cyrillique contenant du texte, des chiffres et de la ponctuation ?
- A.N. : sachant qu'un opérateur compose 3 symboles binaires par seconde, combien de temps faut-il pour transmettre une page complète de texte comme celle-ci par exemple ? On détaillera l'évaluation proposée.

Le premier télégraphe électrique terrestre a été mis en service en 1838 par WHEATSTONE en Angleterre et le premier câble sous-marin posé en 1851 entre la France et l'Angleterre. La suite de ce sujet explore quelques propriétés de la transmission d'informations le long d'un tel fil électrique.

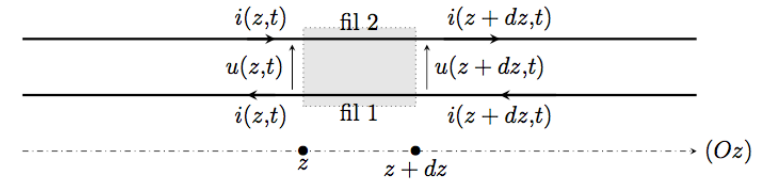


FIGURE 1 – Modèle de ligne bifilaire

I.A Transmission par une ligne bifilaire

Le modèle électrique d'une ligne télégraphique est représenté figure 1 : la transmission a lieu dans le sens de l'axe (Oz) et un élément de ligne de longueur dz transmet la tension aux bornes de la ligne $u(z,t)$ et le courant de ligne $i(z,t)$ selon les *équations des télégraphistes*, R_0 , ℓ_0 et χ_0 étant des constantes positives :

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{R_0}{\chi_0} \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{R_0}{\ell_0} i(z,t) \quad -\frac{\partial i}{\partial z} = \frac{1}{R_0 \chi_0} \frac{\partial u}{\partial t}$$

- – 2. Déterminer les unités usuelles des grandeurs R_0 , χ_0 et ℓ_0 .
- – 3. Dans le cas du télégraphe terrestre du XIX^e siècle, l'installation comportait en général un seul fil tendu sur des poteaux. Le modèle de transmission par ligne bifilaire reste-il applicable ? Expliquer.
- – 4. Déterminer l'équation aux dérivées partielles (équation de propagation) vérifiée par la seule fonction $u(z,t)$, puis l'équation de dispersion associée reliant la pulsation ω au vecteur d'onde $\vec{k}$.

Ici et dans toute la suite, on étudie une ligne bifilaire permettant le transport du signal sur une assez grande distance ; les phénomènes limitant la propagation seront donc traités comme une perturbation et leur étude limitée au premier ordre du développement.

- – 5. En déduire la vitesse de phase des ondes de courant et de tension. Y a-t-il dispersion à cet ordre du développement ?
- – 6. On considère une onde de tension progressant le long de l'axe (Oz) caractérisée par $u(z=0,t) = U_0 \cos(\omega t)$, montrer que la puissance électrique moyenne $\mathcal{P}_m(z)$ transportée par la ligne décroît lors de la propagation et déterminer la distance caractéristique de cette atténuation.

I.B Câble coaxial

Depuis l'installation de lignes télégraphiques sous-marines, l'obligation d'isoler la ligne conduit à utiliser une forme géométrique particulière : le câble est coaxial, formé d'une armature centrale métallique formant un cylindre de rayon a , entouré d'une gaine isolante et d'un second câble métallique de rayon $b > a$. Les photographies de la figure 2 représentent les extrémités dénudées de deux câbles de ce type qui relient la télévision à l'antenne ; quelques éléments de la fiche technique du plus performant des deux sont repris dans la table 1.

Un tel câble est d'abord modélisé comme un milieu continu sans pertes caractérisé par une inductance linéique l_u et une capacité linéique c_u .

- – 7. Représenter le schéma équivalent à une longueur infinitésimale dz du câble. Établir les équations de propagation des ondes de courant et de tension.

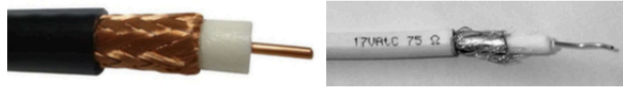


FIGURE 2 – Câble coaxial professionnel (à gauche) et bas de gamme (à droite)

Conducteur interne :	cuivre, $\varnothing 1,6$ mm	Impédance :	75 Ω
Isolant :	Polyéthylène, $\varnothing 7,2$ mm	Capacité nominale :	53 pF/m
Tresse externe :	cuivre, couverture > 95%	Inductance nominale :	0,32 μ H/m
Gaine :	Polyéthylène	Résistance nominale câble :	8,5 Ω /km
Délai :	4,0 ns/m	Résistance nominale tresse :	3,6 Ω /km

TABLE 1 – Extraits de la fiche technique du câble Belden 8213

- ❑ – 8. Définir, exprimer, calculer et commenter la célérité de propagation des ondes électriques dans le câble Belden 8213. Comparer au « délai » de la fiche technique.
- ❑ – 9. Définir et exprimer l'impédance caractéristique Z_0 du câble. Les données de la fiche technique ci-dessus sont-elles compatibles avec ce modèle ?

Lorsqu'un tel câble relie un générateur (par exemple l'antenne de réception du signal TV) à un récepteur (ici, l'étage d'entrée de l'amplificateur TV) modélisé par une impédance complexe $\bar{Z}_e$ en $z = 0$ sur la figure 3, on observe en général la superposition d'ondes de tension et de courant incidente et réfléchie, donc la superposition d'une onde strictement progressive, d'amplitude $u_p = U_p \cos(\omega t - kz + \varphi_p)$ et d'une onde stationnaire, d'amplitude $u_s = U_s \cos(\omega t - \varphi_s) \sin(kz - \psi_s)$. L'importance de cette dernière est caractérisée par le rapport $\rho = U_s/U_p$, qui peut être mesuré pour indiquer le degré de désaccord entre le câble et sa charge.

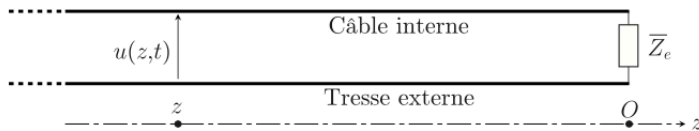


FIGURE 3 – Câble TV alimentant un étage électronique

- ❑ – 10. On impose d'abord dans la partie $z < 0$ du câble une onde de tension incidente $\bar{u}_+(z,t)$ d'amplitude complexe $\bar{U}_+$, de pulsation ω et de vecteur d'onde k .
Exprimer l'onde de courant $\bar{i}_+(z,t)$ associée en fonction de Z_0 , $\bar{U}_+$, k et ω .
Exprimer les ondes de tension $\bar{u}_-(z,t)$ et de courant $\bar{i}_-(z,t)$ réfléchies par le câble en fonction de $\bar{Z}_e$, Z_0 , $\bar{U}_+$, k et ω .
- ❑ – 11. Exprimer ρ en fonction de Z_0 et $\bar{Z}_e$. À quelle condition aura-t-on $\rho = 0$? On parle dans ce cas d'adaptation (ou accord) entre le câble et sa charge.
Dans tout ce qui suit, on choisit une valeur de $\bar{Z}_e$ qui assure cet accord. On souhaite évaluer l'importance des pertes en ligne dues aux résistances électriques par unité de longueur r_u et r'_u du câble et de la tresse.
- ❑ – 12. Proposer un schéma modifié de l'élément de longueur dz de câble. Établir la nouvelle équation de propagation de l'onde de tension ; définir et exprimer la longueur caractéristique d'atténuation de l'amplitude des ondes en fonction de Z_0 , r_u et r'_u avec développement au premier ordre de $k(\omega)$ analogue à Q4.
- ❑ – 13. A.N. : calculer et commenter la valeur de la distance caractéristique.
En pratique, on évite d'utiliser de tels câbles à très haute fréquence (1 GHz et plus). Pourquoi ?

Dans une installation de captage de télévision, un câble coaxial (C) relie l'antenne P au décodeur D . Un voisin indélicat, souhaitant bénéficier du signal sans payer, réalise le branchement en dérivation de la figure 4 en dénudant partiellement le câble (C) pour y souder son propre câble (C') relié à son détecteur D' . Les soudures relient entre elles les câbles centraux d'une part et les tresses externes d'autre part. Les décodeurs D et D' sont tous deux adaptés aux câbles. Tous les câbles sont assez courts pour négliger l'atténuation du signal.

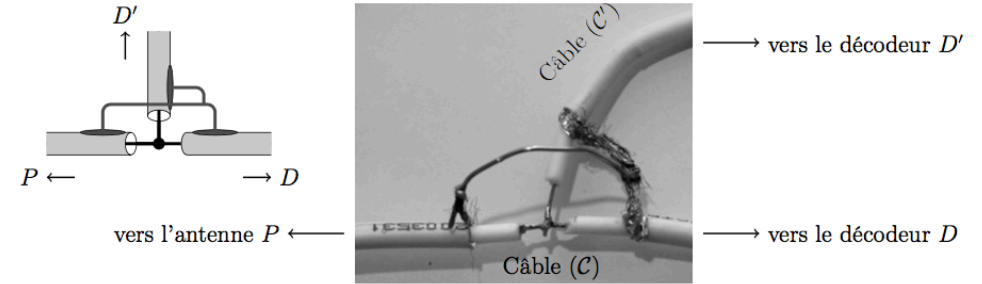
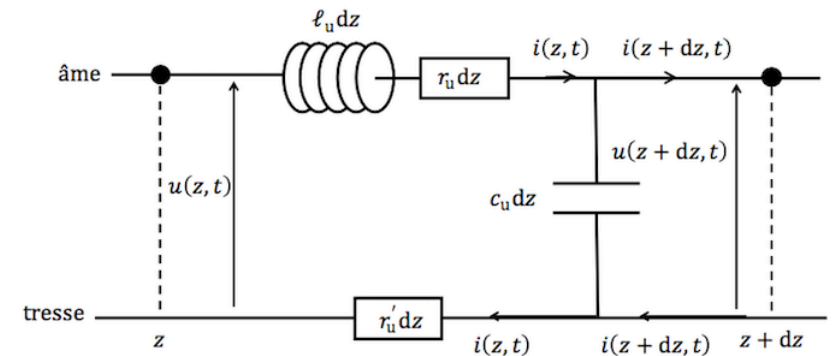


FIGURE 4 – Branchement illégal d'un câble coaxial (C') sur une installation préexistante (C)

Un onde de tension $u_i = U_0 \cos(\omega t - kz)$ provient de l'antenne P dans la partie $z < 0$ du câble ; elle atteint en $z = 0$ la soudure ainsi réalisée. Dans les deux câbles situés en parallèle dans le domaine $z > 0$ apparaît la même onde de tension $u_t = U'_0 \cos(\omega t - kz)$, avec $|U'_0| < |U_0|$.

- ❑ – 14. Pourquoi n'y a-t-il pas d'onde réfléchie dans les câbles situés en $z > 0$? Montrer qu'il en existe une dans le câble situé en $z < 0$ et déterminer son amplitude.
- ❑ – 15. L'introduction de cette dérivation « pirate » est-elle détectable par une mesure de ρ ou bien par celle de l'atténuation du signal incident au niveau du détecteur D ?

Aide 12. Modèle de câble à utiliser



Partie 2 – Physique des vagues

II.A Les équations de la vague linéaire.

- – 15. En faisant un bilan de matière dans un petit volume $d\tau = dx dy dz$ pendant un temps élémentaire dt , établir la loi de conservation de la matière reliant $\rho(x, z, t)$, $u_x(x, z, t)$ et $u_z(x, z, t)$, où $u_x = \vec{u} \cdot \hat{e}_x$ et $u_z = \vec{u} \cdot \hat{e}_z$.
- – 16. Dans le cas où le fluide est incompressible, démontrer que cette relation devient simplement

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

On suppose dorénavant que l'écoulement est irrotationnel, c'est-à-dire que $\vec{\text{rot}}(\vec{u}) = \vec{0}$. Cette hypothèse permet de définir un potentiel des vitesses $\phi(x, z, t)$ associé au champ de vitesse et qui vérifie $\vec{u} = \vec{\text{grad}}(\phi)$

- – 17. Montrer que le potentiel des vitesses vérifie l'équation de Laplace

$$\Delta \phi = 0.$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule de fluide de volume infinitésimal $d\tau$ permet d'établir une équation décrivant la dynamique du fluide.

Dans le cadre de cette description, la dérivée totale d'un champ scalaire quelconque $A(x, z, t)$ par rapport au temps s'écrit :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\text{grad}} A.$$

Par conséquent, en négligeant les effets de viscosité dans le fluide et en supposant que le mouvement du fluide est irrotationnel, le principe fondamental de la dynamique dans un champ de pesanteur $\vec{g} = g\hat{e}_z$ s'écrit :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\text{grad}}(\vec{u} \cdot \vec{u}) \right] = -\rho g \hat{e}_z - \vec{\text{grad}}(p). \quad (6)$$

Cette relation est appelée relation d'Euler en mécanique des fluides. Le terme de gauche désigne l'accélération de la particule de fluide, prenant en compte en particulier la dérivée particulaire, le premier terme de droite désigne la force de pesanteur, et le dernier terme désigne la contribution des forces de pression.

- – 18. Montrer que la relation d'Euler permet d'écrire l'équation suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} + gz + \frac{p}{\rho} = f(t)$$

où $f(t)$ est une fonction que l'on ne cherchera pas à déterminer mais qui ne dépend que du temps.

Quel résultat classique retrouve-t-on dans le cas d'un écoulement stationnaire ?

Nous admettons par la suite qu'il est possible de choisir une fonction $f(t) = f_0$ qui est indépendante du temps sans perte de généralité. On choisit $f_0 = p_0/\rho$, où p_0 est la pression atmosphérique immédiatement au-dessus de la surface du fluide. Nous supposons que la pression atmosphérique est constante dans l'espace et dans le temps.

À ce stade, il est possible de spécifier quelques conditions aux limites du problème.

Le fluide est contenu dans un réservoir. La surface libre du fluide est caractérisée par un profil de hauteur $z = \eta(x, t)$. Le fond du réservoir est situé à une altitude $z = -H$, de telle sorte que le plan $z = 0$ correspond à la surface du fluide au repos, sans la présence de vague. La vitesse du fluide dans la direction verticale est nulle sur le fond du réservoir :

$$u_z(x, z = -H, t) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=-H} = 0. \quad (7)$$

On considère un fluide étudié dans un référentiel galiléen $\{O, \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$.

Un point de ce fluide, repéré par le vecteur $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$, est caractérisé par une masse volumique $\rho(\vec{r}, t)$ et un champ de vitesse $\vec{u}(\vec{r}, t)$. La pression au sein du fluide est notée $p(\vec{r}, t)$. Pour simplifier l'étude, nous supposons que le système est invariant par translation dans la direction $(O, \hat{e}_y)$, de telle sorte que la densité, la pression et la vitesse ne dépendent, en plus du temps t , que des deux coordonnées spatiales x et z . En particulier, la vitesse du fluide dans la direction y est nulle.

Pour établir les équations qui permettront de décrire les vagues de surface, nous procéderons par étapes. Dans un premier temps, nous établirons les équations générales décrivant le champ de vitesse du fluide accompagnées des conditions aux limites particulières du problème. Nous chercherons, dans un second temps, la solution qui décrit les vagues en nous limitant aux régimes des faibles vitesses et des faibles amplitudes.

□ – 19. Montrer que, sur la surface libre $z = \eta(x, t)$, on a la relation

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (8)$$

□ – 20. Déterminer l'expression de la pression $p(x, z = \eta, t)$ à la surface du fluide.

En déduire une seconde condition de surface libre :

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=\eta} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2g} \Big|_{z=\eta} \quad (9)$$

Il n'est généralement pas possible de résoudre de façon générale les équations de la dynamique des fluides (ici conservation de la matière et Euler) avec les conditions aux limites discutées dans les questions précédentes.

Il est cependant possible de linéariser ces équations et ces conditions aux limites. On se place pour cela dans une limite de faible vitesse et de faible amplitude pour une vague de surface. Les premiers travaux en ce sens ont été menés par Joseph-Louis Lagrange dès le XIII^e siècle. Sous ces hypothèses, on peut linéariser les conditions de surface libre (8) et (9) qui deviennent

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad \text{et} \quad \eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=0}$$

et qui sont écrites sur la position de la surface libre au repos.

Pour trouver une solution décrivant la dynamique du fluide sous l'hypothèse de faible vitesse et faible amplitude, il ne reste plus qu'à trouver un potentiel de vitesse solution de l'équation de Laplace et satisfaisant ces conditions aux limites du problème. Pour ce faire, on utilise la méthode de séparation des variables en cherchant cette solution sous la forme $\phi(x, z, t) = X(x, t)Z(z)$.

□ – 21. Montrer que les fonctions $X(x, t)$ et $Z(z)$ sont solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\mu X \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} = \mu Z \end{cases}$$

où μ est une constante qui ne dépend ni des coordonnées spatiales ni du temps.

On peut montrer par des arguments de symétrie que $\mu > 0$.

La solution $X(x, t)$ est alors de forme sinusoïdale comme il est possible de s'y attendre dans le cadre d'un modèle de vague se propageant le long de la direction x .

Pour la fonction définissant la surface libre du fluide, nous choisirons une forme d'onde plane progressive $\eta(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$ de nombre d'onde k , de pulsation ω et d'amplitude A , constante.

□ – 22. En utilisant l'une des conditions de surface au repos montrer que les expressions

$$X(x, t) = \sin(kx - \omega t) \quad \text{et} \quad \frac{dZ}{dz} \Big|_{z=0} = \gamma = \text{cste}$$

résolvent le problème. On exprimera la constante γ en fonction de A et ω .

□ – 23. En utilisant les résultats précédents complétés par la condition (7) au fond du réservoir, montrer qu'alors

$$Z(z) = \zeta \frac{\cosh[k(z + H)]}{\sinh(kH)}$$

où l'on exprimera la constante ζ en fonction de A , ω et k . La solution totale correspondante $\phi(x, z, t) = X(x, t)Z(z)$ sera appelée par la suite « la vague linéaire ».

□ – 24. En utilisant la condition de surface au repos non encore utilisée, établir la relation de dispersion de l'onde entre ω , g , k et la tangente hyperbolique de kH .

□ – 25. Calculer la vitesse de phase v_ϕ de la vague linéaire.

Déterminer les deux expressions limites de v_ϕ lorsque la profondeur du réservoir H est petite ou grande devant la longueur d'onde de la vague linéaire. On commentera les expressions obtenues.

□ – 26. Déterminer l'expression de la vitesse de groupe v_g de la vague linéaire en profondeur arbitraire.

Montrer la relation $v_g = \frac{v_\phi}{n} [1 + nkH / \sinh(2kH)]$ où n est un entier que l'on déterminera.

En déduire les valeurs extrêmes du rapport v_g/v_ϕ .

Au sein du fluide on considère deux vagues linéaires de même amplitude, mais de nombre d'onde et de pulsation distinctes : $\eta_1(x, t) = A \cos(k_1 x - \omega_1 t)$ et $\eta_2(x, t) = A \cos(k_2 x - \omega_2 t)$.

□ – 27. Montrer que la vague résultante (surface du fluide) peut se mettre sous la forme $\eta(x, t) = 2A \cos(kx - \omega t) \cos(k'x - \omega't)$. On donnera l'expression des 4 paramètres $k < k'$ et $\omega < \omega'$ en fonction de k_1 , k_2 , ω_1 et ω_2 .

Tracer le profil cette vague résultante à un instant fixé t en représentant les longueurs d'ondes $\lambda = 2\pi/k$ et $\lambda' = 2\pi/k'$ sur le même schéma.

II.B De l'influence du fond.

Dans cette partie, nous étudierons de manière simplifiée l'influence du changement de profondeur lorsque les vagues approchent du bord de mer.

Dans le cadre de la théorie linéaire précédente, une vague est caractérisée par un profil de hauteur dépendant du temps t , de sa position latérale $\vec{R} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y$, de son vecteur d'onde $\vec{k}$ et de sa pulsation ω .

Le profil est de la forme $\eta(\vec{R}, t) = A \cos(\vec{R} \cdot \vec{k} - \omega t)$. Nous supposons que le nombre d'onde et la pulsation sont reliés par la relation de dispersion établie dans la partie précédente.

La zone étudiée présente une variation brutale de profondeur en passant de la profondeur H_1 à la profondeur H_2 lorsque l'abscisse $x = 0$ est franchie. Cette région de transition ainsi que les vecteurs d'ondes respectifs dans les zones 1 et 2, notés $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$, sont représentés sur la figure 4 ci-dessous. Dans ce modèle très simplifié on suppose qu'il n'y a pas d'onde réfléchie.

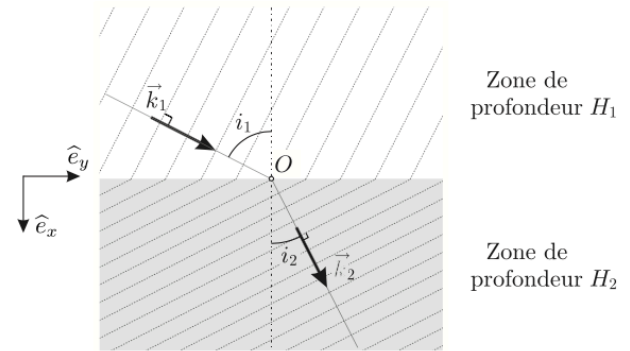


FIGURE 4 – Zone de changement de profondeur.

Nous supposons que les pulsations des vagues sont identiques dans les deux milieux de profondeur différente. En notant $k_{1,2} = \|\vec{k}_{1,2}\|$, on se place dans le régime pour lequel $k_1 H_1 \ll 1$ et

$k_2 H_2 \ll 1$. On note i_1 et i_2 les angles entre les vecteurs d'onde respectifs dans les zones 1 et 2 et la direction x , voir figure 4.

- – 28. Que représentent les lignes pointillées orthogonales aux vecteurs d'ondes sur la figure 4 ? Montrer que la condition de continuité des profils de vague à l'interface impose d'une part des amplitudes identiques dans les deux zones et, d'autre part, une relation entre les angles i_1 et i_2 de la forme $\sin i_1 / \sin i_2 = f(H_1/H_2)$ où l'on précisera la fonction f .
- – 29. En déduire la façon dont varie la direction de propagation des vagues lorsqu'elles approchent du bord de mer, en supposant une variation continue de la profondeur.

Lorsque les vagues approchent du bord de mer, on cherche à déterminer également s'il y a un changement de l'amplitude de la vague, même dans le cadre de la théorie linéaire. Pour cela, on suppose l'absence de toute forme de dissipation dans le système. L'énergie mécanique moyenne du fluide par unité de surface horizontale s'écrit

$$E_m = \frac{1}{2} \rho g A^2 .$$

Cette énergie est associée aux mouvements dans le fluide en présence d'une vague de surface. Il est possible de montrer que l'énergie moyenne correspondante est transportée par la vitesse de groupe de la vague dont l'intensité est notée v_g .

On considère une vague qui se propage dans la direction $(O, \hat{e}_x)$. On indique que le flux d'énergie moyen pour une unité de longueur de vague dy , qui se propage dans cette direction est donnée par $dP = E_m v_g dy$. On considère toujours un changement de profondeur en $x = 0$.

- – 30. Déterminer l'expression du rapport des amplitudes de vagues dans les deux zones en fonction du rapport des vitesses de groupe.
Comment varie l'amplitude de la vague à l'approche du rivage ?
Commenter ce résultat en considérant ceux de la question 28.

Formulaire

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)}$$

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$\frac{d(\cosh(x))}{dx} = \sinh(x)$$

$$\frac{d(\sinh(x))}{dx} = \cosh(x)$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\cosh(x+y) = \sinh(x) \sinh(y) + \cosh(x) \cosh(y)$$

$$\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x)$$

