

**CB Physique/Chimie – 4H**  
**PSI - Lycée du Parc des Loges *Difficulté supérieure***

Calculatrices autorisées.

**Partie 1 – Télécommunications Mines PSI 2021**

**I. Le fil du télégraphe**

**Q1** Les caractères à coder sont les 32 lettres, les 10 chiffres arabes et 7 symboles de ponctuation (« . », « , », « ; », « : », « ? », « ! » et « espace »), soit 49 caractères différents à coder.

Pour coder  $N$  caractères en binaires, il faut  $n$  bits avec :  $2^{n-1} + 1 \leq N \leq 2^n$ . Or, 49 est compris entre  $2^5 + 1 = 33$  et  $2^6 = 64$ . Par conséquent, il faut coder le texte sur 6 bits.

La saisie d'un caractère sur 6 bits nécessite environ 3 secondes. Dans une page, on peut estimer le nombre de caractère à environ 3000. Il faut donc environ 9000 secondes, soit 2h30.

**I.A. Transmission par une ligne bifilaire**

**Q2** L'examen des deux équations proposées montre que :

$$\begin{cases} \frac{[R_0]}{[\ell_0]} = V \cdot A^{-1} \cdot m^{-1} = \Omega \cdot m^{-1} \\ \frac{[R_0]}{[\chi_0]} = V \cdot A^{-1} \cdot m^{-1} \cdot s = \Omega \cdot m^{-1} \cdot s \\ [R_0][\chi_0] = V \cdot A^{-1} \cdot m \cdot s^{-1} = \Omega \cdot m \cdot s^{-1} \end{cases}$$

On en déduit :  $\begin{cases} [R_0] = \Omega \\ [\ell_0] = m \\ [\chi_0] = m \cdot s^{-1} \end{cases}$

**Q3** La Terre joue le rôle du second conducteur, le courant revenant par le sol. Le modèle de la ligne bifilaire reste donc applicable.

**Q4** On dérive la première équation par rapport à  $z$  et on y injecte la seconde, ce qui donne :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{R_0}{\chi_0} \left( -\frac{1}{R_0 \chi_0} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{R_0}{\ell_0} \left( \frac{1}{R_0 \chi_0} \right) \frac{\partial u}{\partial t}$$

soit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\chi_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\ell_0 \chi_0} \frac{\partial u}{\partial t}$$

Cette équation étant linéaire, on peut en chercher des solutions en OPPH\* de la forme :  $\bar{u}(z, t) = U_0 \exp i(\omega t - kz)$ . On en déduit :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{\chi_0^2} - i \frac{\omega}{\ell_0 \chi_0} = \frac{\omega^2}{\chi_0^2} \left( 1 - i \frac{\chi_0}{\ell_0 \omega} \right)$$

**Q5** On suppose, d'après l'énoncé, que  $\frac{\chi_0}{\ell_0 \omega} \ll 1$ . Par conséquent :

$$k \approx \frac{\omega}{\chi_0} \left( 1 - i \frac{\chi_0}{2 \ell_0 \omega} \right)$$

La vitesse de phase vaut, par définition :  $v_\phi = \frac{\omega}{\text{Re}(k)}$ . Par conséquent :

$$v_\phi = \chi_0$$

Il n'y a donc pas dispersion à cet ordre du développement, puisque  $\chi_0$  est une constante.

**Q6** La deuxième équation couplant le courant et la tension fournit, la ligne étant supposée infinie (on n'a qu'une onde progressive) :

$$\bar{i}(z, t) = \frac{U_0 \omega}{R_0 \chi_0 k} \exp i(\omega t - kz) \approx \frac{U_0}{R_0} \frac{1}{1 - i \frac{\chi_0}{2 \ell_0 \omega}} \exp i(\omega t - kz) \approx \frac{U_0}{R_0} \left( 1 + i \frac{\chi_0}{2 \ell_0 \omega} \right) \exp i(\omega t - kz)$$

On en déduit :  $\begin{cases} \bar{u}(z, t) = U_0 \exp i \left( \omega t - \frac{\omega}{\chi_0} z \right) \exp \left( -\frac{z}{2 \ell_0} \right) \\ \bar{i}(z, t) = \frac{U_0}{R_0} \left( 1 + i \frac{\chi_0}{2 \ell_0 \omega} \right) \exp i \left( \omega t - \frac{\omega}{\chi_0} z \right) \exp \left( -\frac{z}{2 \ell_0} \right) \end{cases}$

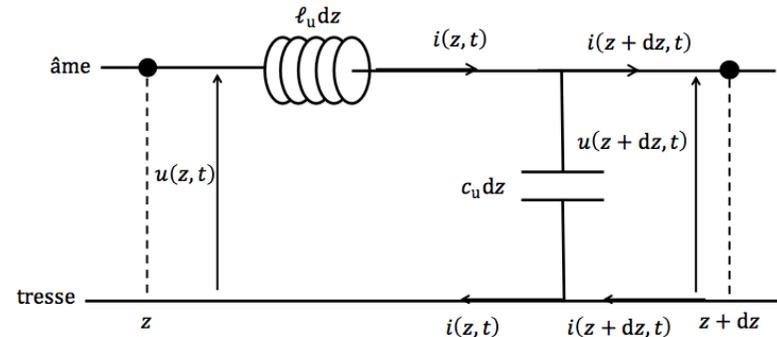
La puissance moyenne transportée par la ligne est donnée par :

$$\mathcal{P}_m(z) = \frac{1}{2} \text{Re} \left( \bar{u} \bar{i}^* \right) = \frac{U_0^2}{2 R_0} \exp \left( -\frac{z}{\ell_0} \right)$$

La puissance moyenne transportée par la ligne décroît donc exponentiellement sur la distance caractéristique  $\ell_0$ .

**I.B. Câble coaxial**

**Q7** Le schéma équivalent à la tranche  $[z, z + dz]$  est le suivant :



La loi des mailles et la loi des nœuds donnent (question de cours) :  $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} = -\ell_u \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial z} = -c_u \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$ . On en

déduit (nouvelle question de cours) :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \ell_u c_u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = \ell_u c_u \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \end{cases}$$

**Q8** Les ondes de tension et de courant vérifient l'équation de d'Alembert à une dimension :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

La constante  $c$ , homogène à une vitesse est la célérité des ondes électriques le long du câble. Elle s'écrit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\ell_u c_u}}$$

Numériquement, on obtient :

$$c = \frac{1}{\sqrt{32 \cdot 10^{-8} \times 53 \cdot 10^{-12}}} \approx \frac{10^{10}}{\sqrt{36 \times 49}} = \frac{10^{10}}{42} \approx \frac{10^{10}}{40} = 2,5 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Cette valeur est un peu inférieure à la célérité de la lumière dans le vide : le champ électromagnétique se propage ici dans l'isolant.

Le « délai »  $\Delta t_u$  ou retard linéique est l'inverse d'une vitesse donc on s'attend à ce que

$$c = \frac{1}{\Delta t_u} = \frac{10^9}{4} = 2,5 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

C'est parfaitement cohérent.

**Q9** Pour une onde progressive harmonique de tension  $\bar{u}(z, t) \propto \exp i(\omega t - kz)$  et de courant  $\bar{i}(z, t) \propto \exp i(\omega t - kz)$  se propageant le long du câble, la loi des mailles donne :

$$-ik\bar{u}(z, t) = -i\omega\ell_u\bar{i}(z, t)$$

Par conséquent :

$$\frac{\bar{u}(z, t)}{\bar{i}(z, t)} \underset{\text{définition}}{=} Z_0 = \frac{\omega\ell_u}{k} = c\ell_u \underset{\text{expression}}{=} \sqrt{\frac{\ell_u}{c_u}}$$

Numériquement, on trouve  $Z_0 = \sqrt{\frac{32 \cdot 10^{-8}}{53 \cdot 10^{-12}}} \approx \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \times 100 \approx \frac{17}{22} \times 100 \approx 77 \Omega$

La fiche technique donne  $Z_0 = 75 \Omega$ . C'est cohérent.

**Q10** D'après la question Q9,  $\bar{u}_+(z, t) = Z_0 \bar{i}_+(z, t) = \bar{U}_+ \exp i(\omega t - kz)$ . Par conséquent :

$$\bar{i}_+(z, t) = \frac{\bar{U}_+}{Z_0} \exp i(\omega t - kz)$$

L'onde réfléchie de tension est de la forme  $\bar{u}_-(z, t) = \bar{U}_- \exp i(\omega t + kz)$ . La loi des mailles donne pour l'onde réfléchie :  $\bar{u}_-(z, t) = -Z_0 \bar{i}_-(z, t)$ . Par conséquent :

$$\bar{i}_-(z, t) = -\frac{\bar{U}_-}{Z_0} \exp i(\omega t + kz)$$

Ecrivons la condition aux limites en  $z = 0$  :  $\bar{u}_+(0, t) + \bar{u}_-(0, t) = \bar{Z}_e (\bar{i}_+(0, t) + \bar{i}_-(0, t))$ .

On en déduit :  $\bar{U}_- = \left(\frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0}\right) \bar{U}_+$ . On en déduit :

$$\begin{cases} \bar{u}_-(z, t) = \left(\frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0}\right) \bar{U}_+ \exp i(\omega t + kz) \\ \bar{i}_-(z, t) = -\left(\frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0}\right) \frac{\bar{U}_+}{Z_0} \exp i(\omega t + kz) \end{cases}$$

**Q11** L'onde de tension résultant de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie s'écrit :

$$\bar{u}(z, t) = \bar{u}_+(z, t) + \bar{u}_-(z, t) = \bar{U}_+ \exp i(\omega t) \left[ \exp(-ikz) + \left(\frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0}\right) \exp(ikz) \right]$$

On peut reformuler ce résultat sous la forme :

$$\bar{u}(z, t) = \bar{U}_+ \exp i(\omega t) \left[ \exp(-ikz) \left( 1 + \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0} \right) + \left(\frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0}\right) \frac{(\exp(ikz) - \exp(-ikz))}{2i \sin(kz)} \right]$$

soit :

$$\bar{u}(z, t) = \bar{U}_+ \left( \frac{2\bar{Z}_e}{\bar{Z}_e + Z_0} \exp i(\omega t - kz) + 2i \left(\frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0}\right) \sin(kz) \exp i(\omega t) \right)$$

Posons  $\alpha = \arg\left(\frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0}\right)$  et  $\beta = \arg\left(\frac{\bar{Z}_e}{\bar{Z}_e + Z_0}\right)$ . On peut donc reformuler  $\bar{u}(z, t)$  ainsi :

$$\bar{u}(z, t) = 2\bar{U}_+ \left| \frac{\bar{Z}_e}{\bar{Z}_e + Z_0} \right| \exp i(\omega t - kz + \beta) + 2\bar{U}_+ \left| \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0} \right| \sin(kz) \exp i\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

Supposons pour simplifier (mais cela ne change absolument rien) que  $\bar{U}_+ = U_0$  est réel positif. Alors, l'onde de tension réelle s'écrit :

$$u(z, t) = 2U_0 \left| \frac{\bar{Z}_e}{\bar{Z}_e + Z_0} \right| \cos(\omega t - kz + \beta) - 2U_0 \left| \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0} \right| \sin(kz) \sin(\omega t + \alpha)$$

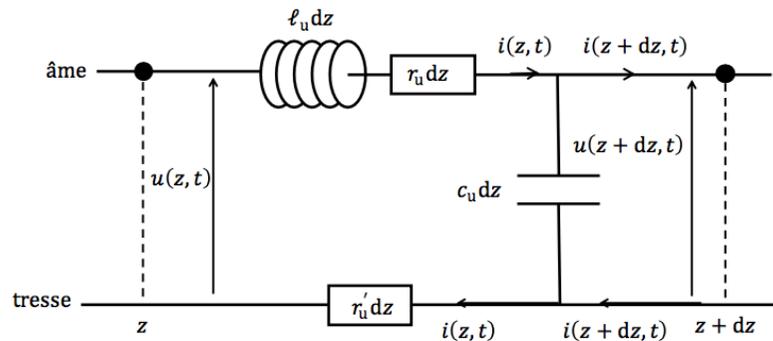
C'est bien la superposition d'une onde progressive et d'une onde stationnaire.

Le taux d'onde stationnaire (TOS)  $\rho$  vaut donc :

$$\rho = \left| \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e} \right|$$

On n'a pas d'onde stationnaire, c'est-à-dire uniquement une onde progressive (autrement dit, aucune réflexion sur l'impédance terminale  $\bar{Z}_e$  si  $\rho = 0$ , c'est-à-dire si  $\bar{Z}_e = Z_0$ ).

**Q12** Le modèle incluant les pertes résistives dans l'âme et la tresse est le suivant :



La loi de nœuds est inchangée :  $\frac{\partial i}{\partial z} = -c_u \frac{\partial u}{\partial t}$ . En revanche la loi des mailles s'écrit maintenant :

$$u(z, t) = \ell_u dz \frac{\partial i}{\partial t} + r_u dz i(z, t) + u(z + dz, t) + r'_u dz i(z, t)$$

soit :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\ell_u \frac{\partial i}{\partial t} - (r_u + r'_u) i(z, t)$$

En procédant comme à la question Q7, on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \ell_u c_u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (r_u + r'_u) c_u \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (r_u + r'_u) c_u \frac{\partial u}{\partial t}$$

Puisque par hypothèse il y a accord avec l'impédance terminale, nous sommes en présence d'une unique onde progressive que l'on peut chercher sous la forme  $\bar{u}(z, t) = U_0 \exp i(\omega t - kz)$ , l'équation étant linéaire. On en déduit (comme en Q4) la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i(r_u + r'_u) c_u \omega = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - i \left( \frac{r_u + r'_u}{\ell_u \omega} \right) \right)$$

On suppose que les pertes sont suffisamment faibles pour que  $\frac{r_u + r'_u}{\ell_u \omega} \ll 1$ . Le vecteur d'onde s'écrit alors :

$$k \approx \frac{\omega}{c} \left( 1 - i \left( \frac{r_u + r'_u}{2 \ell_u \omega} \right) \right)$$

L'onde de tension complexe est donc de la forme :

$$\bar{u}(z, t) = U_0 \exp i \left( \omega t - \frac{\omega}{c} z \right) \exp \left( - \left( \frac{r_u + r'_u}{2 \ell_u c} \right) z \right)$$

Le facteur d'atténuation  $\exp \left( - \left( \frac{r_u + r'_u}{2 \ell_u c} \right) z \right)$  fait donc apparaître une distance  $\delta$  caractéristique d'atténuation de l'onde de tension, donnée par :

$$\delta = \frac{2 \ell_u c}{r_u + r'_u} = 2 \frac{Z_0}{r_u + r'_u}$$

**Q13** Numériquement, on trouve :  $\delta = \frac{2 \times 75}{12,1} \approx \frac{75}{6} = 12,5$  km.

Cette valeur est très élevée devant la longueur des câbles usuels : l'atténuation est donc très faible dans ce câble haut de gamme.

On évite d'utiliser ce type de câble en très haute fréquence pour deux raisons :

- d'une part, les résistances linéiques de l'âme et de la tresse augmentent avec la fréquence en raison de l'effet de peau ;
- d'autre part, au-delà du GHz, apparaissent d'autres modes de propagation du champ électromagnétiques (non TEM), ce qui provoque de la dispersion modale. Par ailleurs, ces modes de propagation ne sont pas modélisables à l'aide du modèle électrocinétique à constantes réparties étudié ici.

**Q14** Il n'y a pas d'onde réfléchie en aval de la dérivation car les deux décodeurs sont adaptés aux câbles utilisés (cf Q11).

Supposons tout d'abord qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie dans le domaine  $z < 0$  (soit en amont de la dérivation). La tension doit être continue en  $z = 0$ . Comme les deux câbles sont branchés en parallèle sur le câble source, cela impose  $U'_0 = U_0$ . D'autre part, la loi des nœuds au niveau de la dérivation impose, les trois ondes étant progressives :  $\frac{U_0}{Z_0} = \frac{U'_0}{Z_0} + \frac{U'_0}{Z_0}$  soit :  $U_0 = 2U'_0$ . Ces deux conditions sont incompatibles : il y a donc forcément une onde réfléchie en amont de la dérivation.

Notons  $\bar{u}_r(z \leq 0, t) = \bar{U}_r \exp i(\omega t + kz)$  l'onde réfléchie complexe. Les conditions aux limites en  $z = 0$  (continuité de la tension et loi des nœuds) s'écrivent (cf Q10) :

$$\begin{cases} U_0 + \bar{U}_r = U'_0 \\ \frac{U_0 - \bar{U}_r}{Z_0} = 2 \frac{U'_0}{Z_0} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \bar{U}_r = -\frac{U_0}{3} \\ U'_0 = \frac{2U_0}{3} \end{cases}$$

**Q15** A priori, on peut penser que les deux propositions sont recevables. En effet, la dérivation pirate entraîne une diminution de l'amplitude du signal reçu par le décodeur D ( $U'_0 = \frac{2U_0}{3} < U_0$ ).

D'autre part, la dérivation provoquant une réflexion, on aura une onde partiellement stationnaire en amont de la dérivation. Calculons le taux d'onde stationnaire  $\rho$  comme nous l'avons fait à la question Q11. L'onde de tension totale complexe en amont de la dérivation s'écrit :  $\bar{u}(z, t) = U_0 \exp(i\omega t) \left( \exp(-ikz) - \frac{\exp(ikz)}{3} \right)$ . Après calcul, on obtient :

$$\bar{u}(z, t) = \frac{2U_0}{3} (\exp i(\omega t - kz) - i \sin(kz) \exp(i\omega t))$$

soit :

$$u(z, t) = \frac{2U_0}{3} (\cos(\omega t - kz) + \sin(kz) \sin(\omega t))$$

Le taux d'onde stationnaire vaut donc  $\rho = 1$  : la détection du branchement pirate est donc détectable en mesurant  $\rho$ .

## Partie 2 – Physiques des vagues Mines PSI 2022

### II.A. Les équations de la vague linéaire

15 La masse contenue dans le volume fixe (volume de contrôle)  $d\tau = dx dy dz$  s'écrit :

$$\delta m = \rho(x, z, t) dx dy dz$$

Sa variation pendant le temps  $dt$  s'écrit donc :

$$d(\delta m) = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$$

La masse sortant de ce volume pendant  $dt$  vaut :

$$\delta m_s = j_{m,x}(x + dx, z, t) dy dz - j_{m,x}(x, z, t) dy dz + j_{m,z}(x, z + dz, t) dx dy - j_{m,z}(x, z, t) dx dy = \left( \frac{\partial j_{m,x}}{\partial x} + \frac{\partial j_{m,z}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

Or,  $\vec{j}_m(x, z, t) = \rho(x, z, t) \vec{u}(x, z, t)$ . Par conséquent :

$$\delta m_s = \left( \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} \right) dx dy dz$$

La conservation de la masse s'écrit :

$$d(\delta m) = -\delta m_s$$

On en déduit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0$$

16 On peut récrire cette équation sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0$$

Or, par définition d'un écoulement incompressible,

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho = 0$$

On en déduit :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

c'est-à-dire  $\text{div} \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$

17 Le champ des vitesses s'écrit :

$$\vec{u} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{e}_z = \vec{\nabla} \phi$$

La condition d'incompressibilité s'écrit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \Delta \phi = 0$$

18 L'équation d'Euler (6) peut s'écrire, à l'aide du potentiel des vitesses  $\phi$

$$\rho \left( \vec{\nabla} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{u} \cdot \vec{u}) \right) = -\rho \vec{\nabla} (gz) - \vec{\nabla} p$$

L'écoulement étant supposé incompressible (et homogène, même si ce n'est pas dit explicitement), la masse volumique est uniforme. On peut donc écrire :

$$\vec{\nabla} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) = \vec{0}$$

La quantité dont on prend le gradient est donc uniforme et ne dépend éventuellement que du temps. Par conséquent :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = f(t)$$

Pour un écoulement stationnaire, l'équation précédente s'écrit :

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{cste}$$

On reconnaît le théorème de Bernoulli, à ceci près que la constante s'étend à tout l'écoulement et pas seulement à une ligne de courant. Cela est dû à l'hypothèse supplémentaire que nous avons faite : écoulement irrotationnel (ou écoulement potentiel).

19 La composante verticale de la vitesse d'une particule de fluide (en n'importe quel point de l'écoulement) est donnée par :

$$u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Pour une particule de fluide située en un point de la surface libre, cette composante est aussi donnée par la dérivée particulaire de la cote verticale  $\eta(x, t)$  de la particule de fluide (qui ne dépend que de  $x$  et pas de  $z$ ) :

$$u_z(x, z = \eta(x, t), t) = \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + u_x \frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x}$$

Par conséquent :

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=\eta} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{z=\eta} \frac{\partial\eta}{\partial x}$$

**20** En tout point de la surface libre, la pression est imposée par l'atmosphère :

$$p(x, z = \eta(x, t), t) = p_0$$

Or, nous avons montré à la question 18 que :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho}$$

Par conséquent, en un point de la surface libre :

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{z=\eta} + \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2}\right)_{z=\eta} + g\eta(x, t) = 0$$

soit :

$$\eta(x, t) = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{z=\eta} - \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2g}\right)_{z=\eta}$$

**21** On injecte la solution  $\phi(x, z, t) = X(x, t)Z(z)$  dans l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Z(z) + X(x, t) \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

En divisant cette équation par  $\phi(x, z, t) = X(x, t)Z(z)$ , on obtient :

$$\frac{1}{X(x, t)} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2}$$

Les deux membres de cette équation dépendent de variables indépendantes entre elles : ils sont donc constants. On peut donc poser :

$$\frac{1}{X(x, t)} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\mu$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\mu X(x, t) \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} = \mu Z(z) \end{cases}$$

**22** Exploisons la condition aux limites  $\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{\partial\eta}{\partial t}$ . Celle-ci s'écrit :

$$X(x, t) \left(\frac{dZ}{dz}\right)_{z=0} = \frac{\partial\eta}{\partial t} = A\omega \sin(kx - \omega t)$$

On peut donc identifier :

$$\begin{cases} X(x, t) = \sin(kx - \omega t) \\ \left(\frac{dZ}{dz}\right)_{z=0} = A\omega \end{cases}$$

**23** La condition aux limites au fond du réservoir s'écrit :

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=-H} = X(x, t) \left(\frac{dZ}{dz}\right)_{z=-H} = 0$$

Par conséquent :

$$\left(\frac{dZ}{dz}\right)_{z=-H} = 0$$

D'autre part,  $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k^2 \sin(kx - \omega t) = -k^2 X(x, t) = -\mu X(x, t)$ . Par conséquent :

$$\mu = k^2$$

La fonction  $Z(z)$  vérifie donc l'équation :

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z(z) = 0$$

La solution s'écrit (de préférence) sous la forme :

$$Z(z) = \alpha \cosh(kz) + \beta \sinh(kz)$$

Il reste à exprimer les constantes d'intégration en exploitant les conditions aux limites :

• En  $z = 0$  :

$$\left(\frac{dZ}{dz}\right)_{z=0} = A\omega = k\beta$$

Donc :

$$Z(z) = \alpha \cosh(kz) + \frac{A\omega}{k} \sinh(kz)$$

• En  $z = -H$  :

$$\left(\frac{dZ}{dz}\right)_{z=-H} = 0 = k \left( -\alpha \sinh(kH) + \frac{A\omega}{k} \cosh(kH) \right)$$

Donc :

$$\alpha = \frac{A\omega}{k \tanh(kH)}$$

Conclusion :

$$Z(z) = \frac{A\omega}{k} \left( \sinh(kz) + \frac{\cosh(kz)}{\tanh(kH)} \right)$$

Cette forme suffit à conclure et l'énoncé ne donne aucun formulaire !

On peut réécrire  $Z(z)$  sous la forme :

$$Z(z) = \frac{A\omega}{k} \left( \frac{\sinh(kz) \sinh(kH) + \cosh(kz) \cosh(kH)}{\sinh(kH)} \right) = \frac{A\omega \cosh(k(z+H))}{k \sinh(kH)}$$

24 L'autre condition aux limites en  $z = 0$  donne :

$$\eta(x, t) = A \cos(kz - \omega t) = -\frac{1}{g} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} = -\frac{1}{g} (-\omega \cos(kz - \omega t)) Z(0)$$

soit :

$$A = \frac{\omega}{g} \frac{A\omega}{k \tanh(kH)}$$

On obtient donc :

$$\omega^2 = gk \tanh(kH)$$

25 Par définition, la vitesse de phase est donnée par  $v_\varphi = \omega/k$ . Par conséquent :

$$v_\varphi = \frac{g \tanh(kH)}{\omega} = \sqrt{\frac{g \tanh(kH)}{k}}$$

Examinons les deux limites :

- $kH \ll 1$  i.e.  $H \ll \lambda$  :  $\tanh(kH) \sim kH$  donc

$$v_\varphi \approx \sqrt{gH}$$

En eau peu profonde,  $v_\varphi$  est une constante, indépendante  $\omega$  et/ou  $k$  : il n'y a pas dispersion.

- $kH \gg 1$  i.e.  $H \gg \lambda$  :  $\tanh(kH) \approx 1$  donc

$$v_\varphi \approx \sqrt{\frac{g}{k}} \approx \frac{g}{\omega}$$

En eau profonde,  $v_\varphi$  dépend très fortement de  $\omega$  et/ou  $k$  : la propagation des vagues est au contraire très dispersive.

26 Différentions la relation de dispersion quadratique :

$$2\omega d\omega = g(\tanh(kH) + kH(1 - \tanh^2(kH))) dk$$

On en déduit, à l'aide de la relation de dispersion :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{g}{2\omega} \left( \frac{\omega^2}{gk} + kH \left( 1 - \frac{\omega^4}{g^2 k^2} \right) \right) = \frac{\omega}{2k} \left( 1 + kH \left( \frac{1}{\tanh(kH)} - \tanh(kH) \right) \right)$$

Or,

$$\frac{1}{\tanh(kH)} - \tanh(kH) = \frac{\cosh^2(kH) - \sinh^2(kH)}{\cosh(kH) \sinh(kH)} = \frac{2}{\sinh(2kH)}$$

Par conséquent :

$$v_g = \frac{\omega}{2k} \left( 1 + \frac{2kH}{\sinh(2kH)} \right) = \frac{v_\varphi}{2} \left( 1 + \frac{2kH}{\sinh(2kH)} \right)$$

Examinons les deux limites :

- $kH \ll 1$  i.e.  $H \ll \lambda$  :  $\sinh(2kH) \sim 2kH$  donc

$$v_g \approx v_\varphi \approx \sqrt{gH}$$

C'est cohérent avec l'absence de dispersion.

- $kH \gg 1$  i.e.  $H \gg \lambda$  :  $\sinh(2kH) \sim \exp(2kH)/2$  donc

$$v_g \approx \frac{v_\varphi}{2} \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} \approx \frac{g}{2\omega}$$

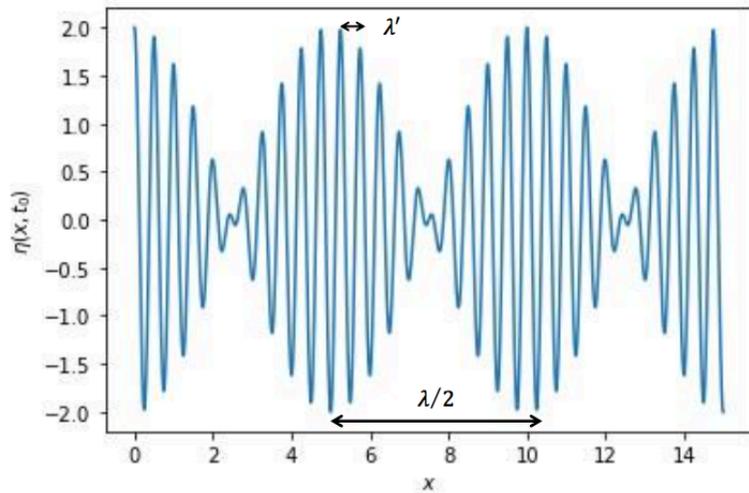
On retrouve la forte dispersion.

27 La vague résultante s'écrit, de manière évidente :

$$\eta(x, t) = 2A \cos \left( \left( \frac{k_1 - k_2}{2} \right) x - \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) t \right) \cos \left( \left( \frac{k_1 + k_2}{2} \right) x - \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) t \right)$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} k = \left| \frac{k_1 - k_2}{2} \right| \\ \omega = \left| \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right| \\ k' = \frac{k_1 + k_2}{2} \\ \omega' = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \end{cases}$$



## II.B. De l'influence du fond

**28** Les lignes pointillées représentent les plans d'onde de l'onde incidente et de l'onde transmise.

En l'absence de réflexion (!!!), la continuité des profils de vague en tout point de l'interface (où  $x = 0$ ) impose :

$$A_1 \cos(k_{1,y}y - \omega t) = A_2 \cos(k_{2,y}y - \omega t)$$

On en déduit :

$$\begin{cases} A_1 = A_2 \\ k_{1,y} = k_{2,y} \end{cases}$$

Or,  $k_{1,y} = k_1 \sin i_1$  et  $k_{2,y} = k_2 \sin i_2$ . D'autre part, comme  $k_1 H_1 \ll 1$  et  $k_2 H_2 \ll 1$ ,  $v_{\phi 1} = \omega/k_1 = \sqrt{gH_1}$  et  $v_{\phi 2} = \omega/k_2 = \sqrt{gH_2}$ . On en déduit :

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \sqrt{\frac{H_1}{H_2}}$$

**29** On tire du résultat précédent que le quotient  $\sin i/\sqrt{H}$  est une constante. Comme la profondeur  $H$  diminue en approchant du bord, il en est de même de l'angle  $i$  : la direction de propagation des vagues tend à s'aligner avec le vecteur  $\hat{e}_x$  et les crêtes tendent à devenir parallèle au bord de mer.

**30** En l'absence de dissipation et de réflexion, la conservation de l'énergie impose :

$$E_{m1} v_{g1} = E_{m2} v_{g2}$$

Comme  $v_{g1} = v_{\phi 1} = \sqrt{gH_1}$  et  $v_{g2} = v_{\phi 2} = \sqrt{gH_2}$ , on en déduit :

$$\frac{A_2^2}{A_1^2} = \sqrt{\frac{H_1}{H_2}} > 1$$

L'amplitude des vagues augmente donc à l'approche du rivage, ce qui est conforme à l'expérience. Cependant, ce résultat est en contradiction avec le résultat obtenu à la question 28. Cette incohérence est due à deux causes :

- d'une part, toute réflexion a été ignorée ;
- d'autre part, la théorie abordée ici est purement linéaire, ce qui n'est plus du tout correct si l'amplitude des vagues devient élevée.