

Partie 1 – Ondes acoustiques E3A PSI 2021

Q22. Dans le cadre de l'approximation acoustique, on limite les calculs au 1^{er} ordre sachant que $\frac{P_1}{P_0}$, $\frac{\mu_1}{\mu_0}$ et $\frac{v_1}{c}$ ainsi que leurs dérivées temporelles et spatiales sont des infiniment petits du 1^{er} ordre. On a également $|\xi_m| \ll \lambda$.

Q23. Système : {une particule de fluide de volume $d\tau$ }

Référentiel : Terrestre supposé galiléen

Bilan des forces :

- on néglige le poids et l'écoulement est supposé parfait donc pas de force de viscosité.

- Force pressante : $\vec{F}_p = -\text{grad}(P)d\tau = -\frac{\partial P}{\partial x}d\tau\vec{e}_x = -\frac{\partial P_1}{\partial x}d\tau\vec{e}_x$ car $P(x, t) = P_0 + P_1(x, t)$

Dans le cadre de l'approximation acoustique, l'accélération de la particule de fluide s'écrit : $\vec{a} = \frac{\partial v_1}{\partial t}\vec{e}_x$

D'où le principe fondamental de la dynamique conduit à : $(\mu_0 + \mu_1)d\tau \frac{\partial v_1}{\partial t}\vec{e}_x = -\frac{\partial P_1}{\partial x}d\tau\vec{e}_x$

En projetant sur \vec{e}_x et en linéarisant l'équation (c'est-à-dire que l'on ne garde que les termes d'ordre 1), on obtient :

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x} \quad (1)$$

En effet, $\mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial t}$ est un terme d'ordre 2, donc il est négligé dans le cadre de l'approximation acoustique.

Q24. L'équation de conservation de la masse s'écrit dans le cas d'une configuration unidimensionnelle :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(P\vec{v}_1) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\mu v_1) = 0$$

$$\text{Or : } \frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\partial(\mu_0 + \mu_1)}{\partial t} = \frac{\partial \mu_1}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu v_1) = \frac{\partial}{\partial x}((\mu_0 + \mu_1)v_1) = \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} \quad \text{en linéarisant dans le cadre de l'approximation acoustique.}$$

$$\text{D'où l'équation de conservation de la masse donne : } \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} \quad (2)$$

Q25. La transformation subie par la particule de fluide étant isentropique, on peut écrire le coefficient de compressibilité isentropique ainsi : $\chi_s = \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dP}$

Et au passage de l'onde sonore, la masse volumique varie de : $d\mu = (\mu_0 + \mu_1) - \mu_0 = \mu_1$ et la pression varie de : $dP = (P_0 + P_1) - P_0 = P_1$

D'où : $\chi_s = \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dP} \Leftrightarrow \chi_s(\mu_0 + \mu_1)P_1 = \mu_1$ et en linéarisant dans le cadre de l'approximation acoustique, cela donne :

$$\mu_1 = \chi_s \mu_0 P_1 \quad (3) \quad \text{ou} \quad \chi_s = \frac{\mu_1}{\mu_0 P_1}$$

Q26. (3) dans (2) : $\chi_s \mu_0 \frac{\partial P_1}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x}$ puis on dérive par rapport au temps : $\chi_s \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)$

$$\text{On dérive (1) par rapport à } x : \mu_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} \right) = -\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}$$

$$\text{Or d'après le théorème de Schwarz : } \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} \right)$$

$$\text{Donc } \chi_s \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - \mu_0 \chi_s \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = 0$$

Conclusion : La surpression $P_1(x, t)$ vérifie l'équation de d'Alembert, $\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = 0$

avec $c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \chi_s}}$ la célérité des ondes sonores.

Application numérique : $c = 343 \text{ m.s}^{-1}$ (ou $3,4 \cdot 10^2 \text{ m.s}^{-1}$)

E – Effet de l'onde sonore sur le haut-parleur

Q27. Il s'agit d'une onde plane progressive harmonique (OPPH) de propageant selon les x croissants, d'où :

$$\xi(x, t) = \xi_m \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c} \quad (\text{relation de dispersion qui découle de l'équation de d'Alembert montrée en Q26}).$$

Q28. On exploite la relation de la question 23 en travaillant en complexe (puisqu'il s'agit d'une OPPH). Cela donne :

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x} \Leftrightarrow \mu_0 j \omega v_1 = -(-jk)P_1 \Leftrightarrow Z = \frac{P_1}{v_1} = \mu_0 \frac{\omega}{k} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_s}}$$

$$\text{Application numérique : } Z = 4,1 \cdot 10^2 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$$

Q29. La puissance de la force de surpression s'exerçant sur la membrane s'écrit :

$$\mathcal{P} = \vec{F}_{surp} \cdot \vec{v}_1 = -P_1 S \vec{e}_x \cdot v_1 \vec{e}_x = -P_1 S v_1 \Leftrightarrow \mathcal{P} = -\mu_0 c S v_1^2$$

Et on peut aussi écrire l'expression de la force (je ne vois pas à quoi cela servirait de calculer la puissance...) :

$$\vec{F}_{surp} = -\mu_0 c S v_1 \vec{e}_x \Leftrightarrow \vec{F}_{surp} = -\mu_0 c S \vec{v}$$

Par identification avec l'expression de la force exercée par le fluide sur la membrane ($\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}$), on obtient : $\alpha = \mu_0 c S$

F – Intensité acoustique et densité volumique d'énergie sonore

Q30. L'intensité sonore est définie par la relation : $I = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle$

Q31. Utiliser une échelle logarithmique permet de tenir compte du fait que l'oreille est un détecteur logarithmique (on n'a pas la sensation que le son est deux fois plus fort lorsque l'intensité sonore est multipliée par deux). De plus les sons audibles couvrent une grande gamme de valeurs d'intensité sonore donc l'emploi de l'intensité sonore en décibels est plus commode.

Q32. On a : $I_{dB} = 10 \log \left(\frac{I}{I_{ref}} \right) \Leftrightarrow I = I_{ref} 10^{\frac{I_{dB}}{10}} = 1,0 \text{ W.m}^{-2}$

On se place dans le cadre d'une OPPH donc les expressions de la vitesse et de la surpression sont :

$$v_1(x, t) = v_m \cos(\omega t - kx) \quad \text{et} \quad P_1(x, t) = P_m \cos(\omega t - kx)$$

Par ailleurs, d'après Q28 : $P_1(x, t) = Z v_1(x, t)$

$$\text{Alors : } I = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \langle P_1 v_1 \rangle = Z \langle v_1^2 \rangle = Z v_m^2 \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{1}{2} Z v_m^2 \Leftrightarrow v_m = \sqrt{\frac{2I}{Z}} = 7,0 \cdot 10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$$

$$\text{Puis : } P_m = Z v_m = \sqrt{2ZI} = 29 \text{ Pa}$$

Remarque : $v_m \ll c = 343 \text{ m.s}^{-1}$ et $P_m \ll P_0 = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ donc approximation acoustique vérifiée.

$$\text{On a : } \underline{v} = \frac{\partial \xi}{\partial t} = j \omega \underline{\xi} \Leftrightarrow \underline{\xi} = \frac{\underline{v}}{j \omega} \quad \text{d'où : } \xi_m = \frac{v_m}{\omega} = \frac{v_m}{2\pi f_0} = 11 \mu\text{m}$$

$$\text{On a bien : } \xi_m \ll \lambda = \frac{c}{f_0} = 34 \text{ cm} \quad \text{donc l'approximation acoustique est vérifiée.}$$

Q33. En se plaçant à une dimension spatiale comme le suggère l'énoncé, on a :

$$\text{div}(\vec{\Pi}_1) = \text{div}(P_1 \vec{v}_1) = \frac{\partial}{\partial x}(P_1 v_1) = P_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial P_1}{\partial x}$$

Or d'après les questions 23, 24 et 25, on peut écrire :

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\chi_s \frac{\partial P_1}{\partial t} \\ \frac{\partial P_1}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \text{div}(\vec{\Pi}_1) = -\chi_s P_1 \frac{\partial P_1}{\partial t} - \mu_0 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \chi_s P_1^2 + \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2 \right)$$

Q34. On peut interpréter les deux termes comme étant les **énergies cinétique volumique** ($e_c = \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2$) et **potentielle volumique** ($e_p = \frac{1}{2} \chi_s P_1^2$) associées à l'onde sonore.

Partie 2 – Transmission à travers un plasma - E3A PC 2018

G / Mise en équation pour des ondes harmoniques

G1a.

La charge volumique au sein du plasma est donnée par :

$$\rho = \rho_{\text{ions}} + \rho_{\text{électrons}} = n \times (+e) + n \times (-e) = 0$$

G1b.

Le champ magnétique agit sur les charges selon la force $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, soit $F_m \approx qvB$. Le champ électrique impose la force $\vec{F}_e = q\vec{E}$, soit $F_e = qE$. Or pour une onde plane progressive dans le vide on a $\frac{E}{B} = c$. L'effet du champ magnétique est négligeable devant celui du champ électrique si $F_m \ll F_e$, soit encore si $vb \ll E$ et donc finalement si $v \ll c$. Il faut donc que les particules chargées soient non relativistes.

La loi de la quantité de mouvement s'écrit $\vec{F} = m\vec{a}$: l'amplitude du mouvement d'une particule soumise à une force donnée est donc inversement proportionnelle à sa masse. Dans le cas où $m_e \ll m_i$ le mouvement des ions est négligeable devant celui des électrons.

G1c.

Évaluons le rapport poids/force électrique pour un électron plongé dans un champ électrique très faible : on prend par exemple $E = 1 \times 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

Dans ce cas le rapport est $\frac{mg}{F_e} = 6 \times 10^{-8}$ ce qui est totalement négligeable devant 1.

On peut donc totalement négliger les effets de la pesanteur.

G1d.

La loi de la quantité de mouvement appliquée à un électron soumis uniquement à la force électrique $\vec{F}_e = -e\vec{E}$ s'écrit $m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E}$, ce qui en notation complexe donne, avec $\vec{v}_e = \vec{V}_0 e^{j\omega t}$,

$m_e j\omega \vec{v}_e = -e\vec{E}$ et donc $\vec{v}_e = \frac{-e\vec{E}}{m_e j\omega}$. Par ailleurs on peut écrire $\vec{j}_e = \rho_e \vec{v}_e = -ne\vec{v}_e$, soit

$$\vec{j}_e = \frac{ne^2}{m_e j\omega} \vec{E}. \text{ Par identification : } \gamma = \frac{ne^2}{m_e j\omega}. \text{ Il s'agit de la conductivité (complexe) du plasma.}$$

G2.

Les équations de Maxwell adaptées au plasma sont :

$$\text{div} \vec{E} = 0 \quad (1), \quad \text{div} \vec{B} = 0 \quad (2), \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3),$$

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j}_e + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left(\gamma \vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (4).$$

G3.

Grâce à l'équation (1) et la formule du double rotationnel, $\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = -\Delta \vec{E}$, qui se transforme à l'aide de (3) en $\Delta \vec{E} = \frac{\partial \text{rot} \vec{B}}{\partial t}$, et finalement avec l'équation (4) : on obtient $\Delta \vec{E} = \mu_0 \left(\gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right)$,

soit encore en régime sinusoïdal : $\Delta \vec{E} = \mu_0 \left(\gamma j\omega \vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right)$. En explicitant l'expression de γ et avec

$\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$ on obtient finalement : $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{ne^2}{m_e \varepsilon_0} \vec{E} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right)$ qui est l'expression demandée si

l'on pose $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m_e}}$ (pulsation plasma).

Cette expression reste vraie pour une onde non sinusoïdale car les termes en ω ont disparu.

H / Propagation d'une OPPH

H1.

En injectant l'expression du champ électrique dans l'équation d'onde établie précédemment, on en déduit

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}. \text{ On peut distinguer deux cas :}$$

- $\omega > \omega_p$: k est alors réel ; il s'agit du domaine de transparence du plasma (propagation sans absorption) ;
- $\omega < \omega_p$: k est imaginaire pur ; il s'agit du domaine réactif : l'onde est alors évanescence.

H2.

Dans le domaine réactif, $k = \pm j \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} = \pm j k'$. Dans ce cas le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{\pm k' x} e^{j\omega t}.$$

Une OPPH dans le domaine réactif qui arrive sur le plasma est réfléchi entièrement. Un tel phénomène peut être utilisé pour les communications radio longue distance (réflexion sur l'ionosphère, cf texte d'introduction de la partie H).

H3.

Dans le domaine de transparence, $k = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$.

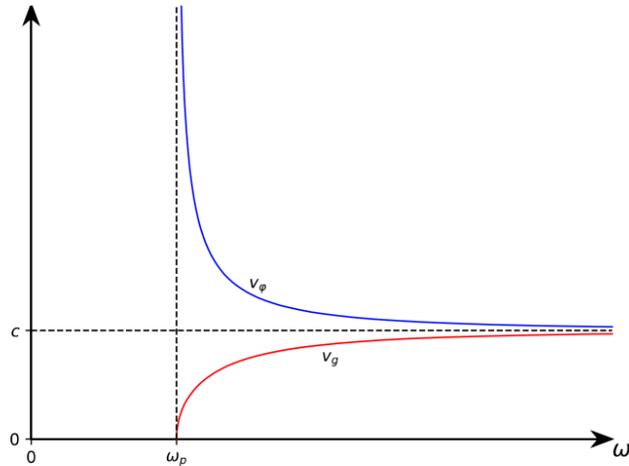
Calculons la vitesse de phase : $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$, soit après calculs, $v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$.

Calculons la vitesse de groupe : $v_g = \frac{d\omega}{dk}$, en différenciant la relation de dispersion donnant k^2 on peut écrire : $2k dk = \frac{2\omega d\omega}{c^2}$, soit $\frac{\omega}{k} \times \frac{d\omega}{dk} = c^2$ qui s'écrit aussi $v_\varphi \times v_g = c^2$ soit finalement :

$v_g = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$. Une OPPH dans le domaine de transparence qui arrive sur le plasma voit sa vitesse

de propagation modifiée, est partiellement réfléchi mais une portion de l'énergie est transmise et il y a existence d'une OPPH dans le plasma. Cela permet la communication avec les satellites, situés au-delà de l'ionosphère par rapport à la surface de la Terre.

H4.



Lorsque $\omega \rightarrow \infty$, $v_\varphi \rightarrow c$ et $v_g \rightarrow c$: le milieu n'est plus dispersif et se comporte comme le vide.

Application : communication entre un vaisseau et la Terre CCINP 2022 MP

Éléments de correction

AN : le jour $\frac{\omega_{c,\text{jour}}}{2\pi} = 9,0 \text{ MHz}$ et la nuit $\frac{\omega_{c,\text{nuit}}}{2\pi} = 1,3 \text{ MHz}$

On constate que ces fréquences de coupure sont bien inférieures à la fréquence utilisée ($f = 19,996 \text{ MHz}$), la propagation est donc possible.

Les longueurs d'ondes qui vont se réfléchir (c'est-à-dire celles qui ne vont pas pouvoir se propager dans le plasma) vérifie $\lambda > \lambda_c$.

AN : le jour $\lambda_{c,\text{jour}} = 33 \text{ m}$ et la nuit $\lambda_{c,\text{nuit}} = 230 \text{ m}$

Cette fréquence semble être un bon choix pour permettra à l'onde de traverser le plasma afin de permettre la communication.

Partie III – Autour d'une boisson énergisante E3A 2018 PSI

H1. Configuration électronique Al : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1$.

Règles utilisées : règle de Pauli, règle de Klechkowski, règle de Hund (non utilisée ici).

H2. Les entités aluminium sont situées aux sommets et au centre de face.

- population p : les atomes aux sommets comptent pour $1/8$, ceux aux centres de faces pour $1/2$, et $p = 8 \times 1/8 + 6 \times 1/2$ $p = 4$;
- coordinence : la structure CFC est une structure compacte, chaque entité a **12 plus proches voisins**

H3. La tangence a lieu selon la diagonale de face : $a\sqrt{2} = 4r$.

H4. La masse volumique est égale à celle d'une maille qui contient 4 entités Al en propre dans un volume a^3 :

$$\rho_{\text{Al}} = \frac{4 \times m_{\text{une entité Al}}}{a^3} \Rightarrow \rho_{\text{Al}} = \frac{4M_{\text{Al}}}{N_A a^3}$$

Application numérique :

$$\rho_{\text{Al}} = \frac{4 \times 27 \times 10^{-3}}{6,02 \times 10^{23} \times (4 \times 143 \times 10^{-12} / \sqrt{2})^3} \Rightarrow \rho_{\text{Al}} = 2,7 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

H5. Un acier a une masse volumique de l'ordre de $\rho_{\text{acier}} \approx 8 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. **La canette en aluminium est plus légère.**

J1. Nombres d'oxydation de l'iode dans les entités suivantes :

entités	I ⁻	I ₂	IO ₃ ⁻
nb. oxydation iode	-I	0	+V
domaines	3	2	1

Les domaines correspondant aux potentiels les plus élevés sont associés au nombre d'oxydation le plus élevé de l'iode.

J2. Partant de la demi-équation : $I_{2(aq)} + 2e^- = 2I_{(aq)}^-$, on en déduit l'équation de la droite frontière avec, d'après la convention $[I_2]_f = [I^-]_f = c_t$:

$$E_{2-3} = E^\circ(I_2/I^-) + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{[I_2]_f}{[I^-]_f^2} \right) = E^\circ(I_2/I^-) - 0,03 \log(c_t)$$

$$E_{2-3} = 0,62 + 0,03 \Rightarrow \boxed{E_{2-3} = 0,65 \text{ V}}$$

J3. Partant de la demi-équation : $2IO_{3(aq)}^- + 12H^+ + 10e^- = I_{2(aq)} + 6H_2O_{(l)}$, on en déduit l'équation de la droite frontière :

$$E_{1-2} = E^\circ(IO_3^-/I_2) + \frac{0,06}{10} \log \left(\frac{[IO_3^-]_f^2 [H^+]^{12}}{[I_2]_f} \right)$$

$$\Leftrightarrow E_{1-2} = E^\circ(IO_3^-/I_2) - \frac{0,06 \times 12}{10} pH + \frac{0,06}{10} \log(c_t)$$

$$E_{1-2} = 1,19 - 0,006 - 0,072 pH \Rightarrow \boxed{E_{1-2} = 1,18 - 0,072 pH}$$

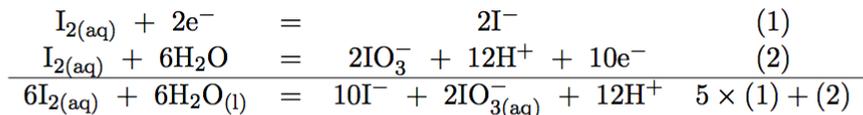
J4. Le système d'équations conduit à :

$$1,18 - 0,072 pH = 0,65 \Leftrightarrow pH = 7,4$$

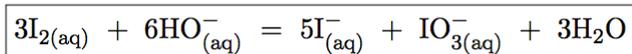
Ce qui donne pour les coordonnées : $\boxed{\{pH = 7,4; E = 0,65 \text{ V}\}}$ en accord avec le diagramme.

K1. La décoloration de la solution indique la **disparition du diiode en milieu basique conformément au diagramme E-pH.**

Partant des demi-équations équilibrées en milieu acide, on en déduit l'équation de la réaction :

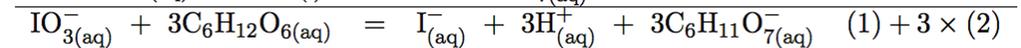
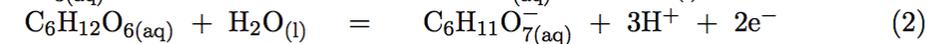


On divise alors par deux et on équilibre finalement avec des ions hydroxyde :

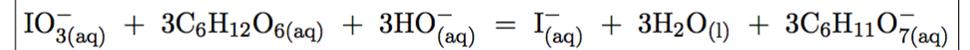


K2. On observe la **dismutation** du diiode. La dismutation est une réaction dans laquelle une espèce chimique joue à la fois le rôle d'oxydant et de réducteur. Lors de la transformation l'espèce dans laquelle l'élément est à un degré d'oxydation donné fournit deux espèces dans lesquelles l'élément est à des degrés d'oxydation plus et moins grands.

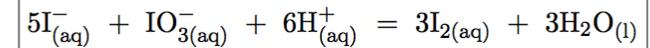
K3. On procède comme précédemment en équilibrant les demi-équations en milieu acide avant de passer en milieu basique :



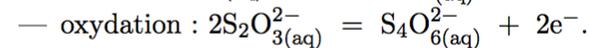
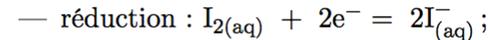
Et finalement :



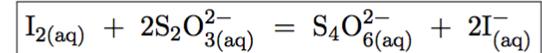
K4. La réaction de l'étape 4 est la réaction inverse de l'étape 2. Il s'agit de la **médiamutation** de I⁻ et IO₃⁻ en diiode par passage en milieu acide :



K5. À partir des demi-équations :



On en déduit la réaction de dosage :



K6. On exprime les potentiels d'électrode à l'aide de la formule de Nernst :

$$- I_2/I^- : E_1 = E^\circ(I_2/I^-) + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{[I_2]}{[I^-]^2} \right);$$

$$- S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-} : E_2 = E^\circ(S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-}) + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{[S_4O_6^{2-}]}{[S_2O_3^{2-}]^2} \right);$$

L'équilibre impose l'égalité des potentiels d'électrode, on en déduit :

$$E^\circ(I_2/I^-) + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{[I_2]_{eq}}{[I^-]_{eq}^2} \right) = E^\circ(S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-}) + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{[S_4O_6^{2-}]_{eq}}{[S_2O_3^{2-}]_{eq}^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow E^\circ(I_2/I^-) - E^\circ(S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-}) = \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{[S_4O_6^{2-}]_{eq} [I^-]_{eq}^2}{[S_2O_3^{2-}]_{eq}^2 [I_2]_{eq}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{K^\circ = 10^{\frac{2[E^\circ(\text{I}_2/\text{I}^-) - E^\circ(\text{S}_4\text{O}_6^{2-}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-})]}{0,06}}}$$

Application numérique :

$$K^\circ = 10^{2 \times (0,62 - 0,09) / 0,06} \Rightarrow \boxed{K^\circ = 4,6 \times 10^{17}}$$

$K^\circ \gg 1$, la réaction peut être considérée totale ce qui est une condition nécessaire pour une réaction de titrage.

L1. $\boxed{n_1 = c_1 V_1}$.

L2. Lors du titrage, une entité I_2 réagit avec deux entités $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$; la quantité de diiode présente avant le titrage est donc égale à la moitié du nombre de moles de thiosulfate versé à l'équivalence :

$$\boxed{n_2 = \frac{c_2 V_2}{2}}$$

L3. D'après l'équation de la réaction (K1), le nombre de moles d'ions iodate formé à l'étape 2 est égal au tiers du nombre de moles de diiode initialement introduit : $n_{\text{IO}_3^-}^f = n_1/3$.

Le nombre de moles d'ions iodate encore présent après l'étape 3 est égal au tiers du nombre de moles de diiode qui sera consommé dans l'étape de titrage (équation de la question K4), donc $n_{\text{IO}_3^-}^r = n_2/3$.

Le nombre de moles d'ions iodate ayant réagi avec le glucose est la différence du nombre de moles formé dans l'étape 2 et du nombre de moles consommé dans l'étape 4, en conséquence :

$$\boxed{n_3 = \frac{n_1 - n_2}{3}}$$

Enfin lors de l'étape 3, (équation de la question K3), trois entités glucose réagissent pour une entité iodate, en conséquence :

$$n_0 = 3n_3 \Rightarrow \boxed{n_0 = n_1 - n_2}$$

L4. En utilisant les relations précédemment obtenues, on en déduit :

$$n_0 = n_1 - n_2 = c_1 V_1 - \frac{c_2 V_2}{2} \Rightarrow \boxed{c_0 = \frac{c_1 V_1 - c_2 V_2 / 2}{V_0}}$$

Application numérique (remarque : contrairement à l'énoncé, on considérera que les données sont fournies avec deux chiffres significatifs pour préserver une certaine

précision, compatible avec la précision d'un dosage)

$$c_0 = \frac{0,05 \times 20 - 0,10 \times 15,4/2}{2,0} \Rightarrow \boxed{c_0 = 0,12 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$$

L5. $\boxed{m = c_0 V \times M_{\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6}}$.

A.N. : $m = 0,115 \times 0,250 \times (6 \times 12 + 12 \times 1,0 + 6 \times 16) \Rightarrow \boxed{m = 5,2 \text{ g}}$

À la précision des données (1 ou 2 chiffres significatifs) et du résultat, cette valeur est en parfait accord avec le document indiquant 5,25 g.

