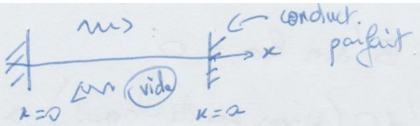
1 - Cavité résonante



a) Équation de d'Alembert :

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

b) Avec $\vec{E}(x,t) = f(x)\,g(t)\,\vec{e_z}$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}\vec{e_z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\vec{e_z} = \vec{0} \rightarrow g\frac{d^2f}{dx^2} - \frac{f}{c^2}\frac{d^2g}{dt^2} = 0$$

$$\frac{1}{g}\frac{d^2g}{dt^2} = \frac{c^2}{f}\frac{d^2f}{dx^2}$$ → pour satisfaire cette solut $(\forall x)(\forall t)$ une seule solut $\boxed{\frac{1}{g}\frac{d^2g}{dt^2} = \text{cste} = K}$

Expression de $g(t)$:

$$\frac{d^2g}{dt^2} + Kg = 0$$ → 2 types de solut selon le signe de K avec K homogène à s^{-2} posons $K = \pm\omega^2$

- $K = +\omega^2 \rightarrow \frac{d^2g}{dt^2} - \omega^2 g = 0 \rightarrow g(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$
  ↳ solut divergente en $t \to +\infty$ à exclure !

- $K = -\omega^2 \rightarrow \boxed{\frac{d^2g}{dt^2} + \omega^2 g = 0} \rightarrow g(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$
  ↳ bonne solut ! oscillante à la pulsat ω de l'excitat (émetteur)
  ou $g(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

Expression de $f(x)$:

$$K = -\omega^2 = \frac{c^2}{f}\frac{d^2f}{dx^2} \rightarrow \frac{d^2f}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 f = \boxed{\frac{d^2f}{dx^2} + k^2 f = 0}$$

En posant $\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$

solut → $f(x) = A'\cos kx + B'\sin kx$

Exploitons les condit aux limites

continuité de la comp. tangentielle de $\vec{E}$

- en $x = 0$ → continuité de $\vec{E}(x=0^-)\cdot\vec{e_z} = \vec{E}(x=0^+)\cdot\vec{e_z}$
  cond. parfait $0 = f(x=0^+)\,g(t)$ $(\forall t)$ → $f(x=0^+) = 0$
  donc $f(x=0^+) = A' = 0$

- en $x = a$ → continuité comp. tangentielle → $\vec{E}(x=a^-)\cdot\vec{e_z} = \vec{E}(x=a^+)\cdot\vec{e_z}$
  $f(x=a^-)\,g(t) = 0$ $(\forall t)$
  ↳ $f(x=a^-) = 0$

$f(x=a^-) = B'\sin ka = 0$

→ pour $B' \neq 0$ (sinon pas de champ !) → $\boxed{\sin ka = 0}$

↳ $ka = n\pi$ → $\boxed{k_n = n\frac{\pi}{a}}$ → le vecteur d'onde est quantifié

→ $\boxed{\omega_n = k_n c = \frac{n\pi c}{a}}$ → les fréq. sont donc aussi quantifiées
apparit des n modes (ω_n, k_n)

Finalement :

$$\vec{E} = \sum_{n\ \text{modes}} \underbrace{AB'}_{\text{cste} = E_{0,n}} \times \sin\Big(\overbrace{\frac{n\pi}{a}}^{k_n}x\Big)\cos\Big(\overbrace{\frac{n\pi c}{a}}^{\omega_n}t + \varphi_n\Big)\vec{e_z}$$

$$\vec{E}(x,t) = \sum_{n\ \text{modes}} E_{0,n}\sin(k_n x)\cos(\omega_n t + \varphi_n)\,\vec{e_z} = \sum_{n\ \text{modes}} E_{0,n}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi c}{a}t + \varphi_n\right)\vec{e_z}$$

ici les phases φ_n des modes n seront déterminées par la condit d'émission.

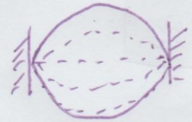
c) Relat de dispersion : $\boxed{\omega_n = k_n c = \frac{n\pi c}{a}} \leftrightarrow \boxed{f_n} = \frac{\omega_n}{2\pi} = \boxed{\frac{nc}{2a}}$

$$\boxed{\lambda_n} = \frac{2\pi}{k_n} = \boxed{\frac{2a}{n}} \leftrightarrow \boxed{a = n\frac{\lambda_n}{2}}$$

↳ nbre entier de ½ long. d'onde dans l'épaisseur de la cavité !

- 1er mode $n = 1 \leftrightarrow a = \frac{\lambda}{2}$

pour $\neq t$



- 2ème mode $n = 2 \leftrightarrow a = 2\times\frac{\lambda}{2}$

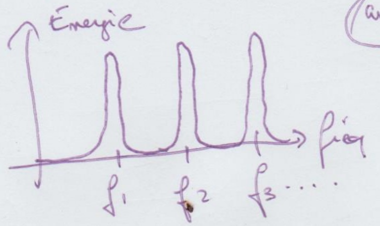
- 3ème mode $n = 3$ $a = 3\times\frac{\lambda}{2}$

d) Entre 2 nœuds → $\frac{\lambda}{2}$!

e) Après 1 aller/retour dans la cavité pour l'onde émise, celle-ci se superpose à elle-même, en phase, uniquement lorsque la condit $f_n = \frac{nc}{2a}$ est respectée.
Sinon superposit avec déphasage, au bout de nombreux aller/retour superposit d'ondes déphasées = interf. destructives → destruct de l'onde

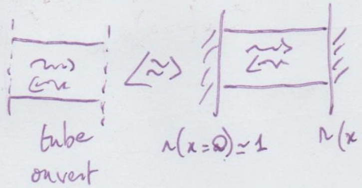
Ainsi l'onde existe dans la cavité uniquement pour cet accord de phase, l'énergie prendra des valeurs non-nulles uniquement pour $f_n = \frac{nc}{2a}$, il y aura résonance !

Pour conducteur parfait, on devrait obtenir une énergie nulle en-dehors des résonances et ∞ à la résonance des modes propres de la cavité.
Pour un conducteur réel, ces résonances sont finies → énergie de valeur max. finie et possède une certaine largeur → dûes aux dissipat° !



analogie avec un circuit RLC
l'énergie est max à la résonance

f)



$f_1 = \frac{c}{2a}$ → f élevé → son aigu
a petit → tube court

→ f basse → son grave
→ tube long

g) Cavité avec 2 plans // → $\underline{\lambda_n = \frac{2a}{n} \le 2a}$

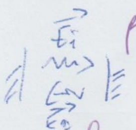
Pour 1 géométrie quelconque, l'inégalité reste ≃ valable de taille d

$\boxed{\lambda \le d} \Leftrightarrow \frac{c}{f} \le d$

$\boxed{f \ge \frac{c}{d}}$

relat° entre la fréq. et la taille

Rqe) On aurait pu traiter ce problème en supposant la superposit° de 2 ondes $\vec{E_i}$ et $\vec{E_2}$ de propagat° opposées qui forment une onde stationnaire !



$\vec{E_i} = \underline{A}\, e^{j(\omega t - kx)} \vec{e_y}$

$\vec{E_2} = \underline{B}\, e^{j(\omega t + kx)} \vec{e_y}$

Calcul

Avec relat° de continuité en $x = 0, a$ → $\vec{E} = E_0 \sin(k_n x) \sin(\omega_n t)$

Pour aller plus loin

5. Réflexion-transmission à l'interface entre deux milieux transparents

2. a) $\boxed{k = \dfrac{n\omega}{c}}$ (on remplace c par $\dfrac{c}{n}$).

b) Déjà, $\vec{\underline{E}}_i = E_0 \exp i(n_1 k_0 z - \omega t)\,\vec{u}_x$

et $\vec{\underline{B}}_i = \dfrac{\vec{u}_z \wedge \vec{\underline{E}}_i}{c/n_1} = \dfrac{n_1 E_0}{c} \exp i(n_1 k_0 z - \omega t)\,\vec{u}_x$

(on a utilisé la relation entre les champs électrique et magnétique pour une onde plane progressive monochromatique), où $k_0 = \dfrac{\omega}{c}$.

Les champs réfléchis et transmis ont même pulsation et même polarisation. Connaissant leur direction de propagation et le milieu dans lequel ils se propagent, on en déduit $\vec{\underline{E}}_r = \underline{r} E_0 \exp i(-n_1 k_0 z - \omega t)\,\vec{u}_x$ et $\vec{\underline{E}}_t = \underline{t} E_0 \exp i(n_2 k_0 z - \omega t)\,\vec{u}_x$. Les champs magnétiques s'obtiennent comme précédemment, d'où $\vec{\underline{B}}_r = -\dfrac{n_1 \underline{r} E_0}{c} \exp i(-n_1 k_0 z - \omega t)\,\vec{u}_x$ (attention, $\vec{k}_r = -n_1 k_0 \vec{u}_z$) et $\vec{\underline{B}}_t = \dfrac{n_2 \underline{t} E_0}{c} \exp i(n_2 k_0 z - \omega t)\,\vec{u}_x$.

c) On utilise les relations de passage : E_T est continu, ainsi que B_T (les milieux transparents ne sont pas conducteurs). La première donne $1 + \underline{r} = \underline{t}$ et la seconde $n_1(1 - \underline{r}) = n_2 \underline{t}$.

Il en découle $\boxed{\underline{r} = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}}$ et $\boxed{\underline{t} = \dfrac{2n_1}{n_1 + n_2}}$.

La transmission se fait toujours en phase, alors que la réflexion a lieu en phase ou opposition de phase. On notera que si $n_1 = n_2$, $\underline{r} = 0$ et $\underline{t} = 1$: l'onde ne voit pas de discontinuité et continue de se propager comme dans un milieu infini.

d) Il faut calculer les vecteurs de Poynting moyens. Clairement, $\langle \vec{R}_i \rangle = \dfrac{n_1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 \vec{u}_z$.

Pour les vecteurs réfléchis et transmis, on utilise par exemple $\langle \vec{R}_r \rangle = \dfrac{\vec{\underline{E}}_r \wedge \vec{\underline{B}}_r^*}{2\mu_0} = -\dfrac{n_1}{2} |\underline{r}|^2 \varepsilon_0 c E_0^2 \vec{u}_z$.

De même, $\langle \vec{R}_t \rangle = \dfrac{n_2}{2} |\underline{t}|^2 \varepsilon_0 c E_0^2 \vec{u}_z$. On en déduit $\boxed{R = |\underline{r}|^2}$ et $\boxed{T = \dfrac{n_2}{n_1} |\underline{t}|^2}$. On vérifie, vu les expressions de $\underline{r}$ et $\underline{t}$, que $\boxed{R + T = 1}$. Cela signifie que l'énergie incidente est soit réfléchie, soit transmise. Il n'y a aucune dissipation d'énergie à l'interface.

6. Equations de Maxwell et lois de Descartes : réflexion oblique d'une onde électromagnétique

7. a) $\vec{\underline{E}}_i = \vec{\underline{E}}_i^0 \exp j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})$,

$\vec{\underline{E}}_r = \vec{\underline{E}}_r^0 \exp j(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})$,

et $\vec{\underline{E}}_t = \vec{\underline{E}}_t^0 \exp j(\omega_t t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})$.

b) Le champ électrique tangentiel $\vec{E}_T$ est continu, donc en $z = 0$, $\forall t$, $\underline{\vec{E}}_{iT} + \underline{\vec{E}}_{rT} = \underline{\vec{E}}_{tT}$. D'après l'expression précédente des champs et la liberté de la famille $(\exp j\omega t)$, on montre $\omega = \omega_r = \omega_t$. C'est aussi une conséquence de la linéarité (régime sinusoïdal forcé). En conséquence,

$$\boxed{\|\vec{k}_i\| = \|\vec{k}_r\| = \frac{n_1 \omega}{c}} \text{ et } \boxed{\|\vec{k}_t\| = \frac{n_2 \omega}{c}}.$$

c) Cette même relation de passage est valable pour tout point $(x, y, z = 0)$ de la surface d'interface. En conséquence, $\forall x, y$,

$$\underline{\vec{E}}^0_{iT} \exp(-jk_i^x x) + \underline{\vec{E}}^0_{rT} \exp(-j(k_r^x x + k_r^y y))$$
$$= \underline{\vec{E}}^0_{tT} \exp(-j(k_t^x x + k_t^y y))$$

car $k_i^y = 0$. Par liberté des exponentielles, on en déduit $\boxed{k_i^x = k_r^x = k_t^x}$ et $\boxed{0 = k_r^y = k_t^y}$. Les trois vecteurs sont contenus dans le plan d'incidence $y = 0$.

$k_i^x = k_i \sin\theta_1 = k_r^x = -k_r \theta_1'$, d'où $\boxed{\theta_1' = -\theta_1}$.

De même, $k_i^x = k_i \sin\theta_1 = k_t^x = k_r \theta_2$, d'où $\boxed{n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2}$ vu la norme respective des vecteurs d'onde.

On reconnaît là les lois de Snell-Descartes pour la réflexion et la réfraction, qui sont ainsi contenues dans les équations de Maxwell : l'optique géométrique est cachée dans les lois plus générales de l'électromagnétisme.

7. Propagation guidée

6. a) Le terme de phase $\exp(i(\omega t - kz))$ correspond bien à une onde se propageant selon les z croissants. L'amplitude f dépend des coordonnées x et y : l'onde n'est donc pas plane. Elle ne dépend en revanche pas de z, ce qui signifie que l'onde ne s'atténue pas au cours de sa propagation. Cela est cohérent avec l'absence de pertes énergétiques pour un conducteur parfait. Enfin, l'onde est polarisée rectilignement selon $\vec{u}_y$.

b) Dans le vide, $\operatorname{div} \underline{\vec{E}} = 0$, soit ici $\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial y} = 0$, d'où $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = 0}$, f ne dépend que de x.

c) Dans la cavité (vide), le champ vérifie l'équation de d'Alembert $\Delta \underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \vec{0}$. On déduit :

$$\frac{\partial(f(x)\exp(i(\omega t - kz)))}{\partial x^2} + \frac{\partial(f(x)\exp(i(\omega t - kz)))}{\partial z^2}$$
$$- \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(f(x)\exp(i(\omega t - kz)))}{\partial t^2} = 0$$

soit après simplification :

$$\boxed{f''(x) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) f(x) = 0}.$$

d) Le champ tangentiel s'annule au bord du guide (le champ électrique s'annule dans le conducteur parfait). Ainsi, en $x = 0$ et $x = a$, le champ électrique est nul (en $y = 0$ et $y = b$, le champ est normal à la paroi et la nullité du champ tangentiel est automatique), ce qui implique $f(0) = f(a) = 0$.

On pose $A = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$. Si $A = 0$, f est une fonction affine qui ne s'annule deux fois que si elle est nulle. Ce cas n'est donc pas intéressant.

Si $A < 0$,

$$f(x) = \alpha \exp(\sqrt{-A}\, x) + \beta \exp(-\sqrt{-A}\, x).$$

$f(0) = \alpha + \beta = 0$, donc $f(x) = 2\alpha \operatorname{sh}(\sqrt{-A}\, x)$. Ensuite, $f(a) = 0$ donne $\alpha = 0$. Là encore, ce cas ne mène à aucune solution physiquement pertinente.

Forcément, il reste $A > 0$ et :

$$f(x) = \alpha \sin(\sqrt{A}\, x) + \beta \cos(\sqrt{A}\, x).$$

Comme $f(0) = 0$, $\beta = 0$. Puis $f(a) = 0$ implique $\sqrt{A}\, a = n\pi$, où n est un entier.

e) Au final, le champ électrique s'exprime comme :

$$\boxed{\underline{\vec{E}}(x, z, t) = E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \exp(i(\omega t - kz))\, \vec{u}_y}$$

en notant $E_0 = \alpha$ et $k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2}}$.

L'onde a une double structure : progressive en z et stationnaire en x. Cela correspond à une propagation en zigzags (Fig. 35). On remarquera que la relation de dispersion est très différente de celle dans le vide : il y a dispersion des ondes électromagnétiques dans ce guide.

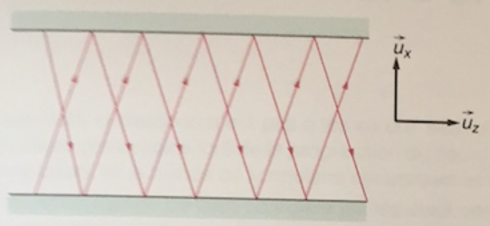


Figure 35

f) Nécessairement, vu la racine utilisée dans l'expression de k, il faut que $\omega \geqslant \frac{\pi c}{a}$ soit une fréquence minimale $\boxed{f_c = \frac{c}{2a}}$. Le guide agit comme un filtre passe-haut.

Numériquement, $f_c = 1{,}5.10^{10}$ Hz, soit une longueur d'onde dans le vide $\lambda_c = \frac{c}{f_c} = 2a = 2$ cm. Cela correspond au domaine des ondes hyperfréquences.

On retrouve **le comportement fréquentiel d'un filtre passe-haut**

Il faut **f > f$_C$** pour qu'une onde puisse y être guidée.