Conducteur réel

➔ **Un zoom sur les courants surfaciques**

Conseils méthodologiques. 1.a) Il suffit ici d'analyser la forme du champ proposé, en recourant à une équation de Maxwell. **b)** On peut en régime sinusoïdal exprimer l'amplitude de $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ en fonction de celle de $\vec{E}$. **c)** Pour obtenir une équation découplée en champ électrique, il faut éliminer $\vec{B}$ entre les équations de Maxwell : on procède ici comme dans le cas d'une onde dans le vide. **d)** Pour atteindre la densité de courant, il faut d'abord déterminer l'expression du champ électrique solution. **2.a)** Les deux distributions de courant sont équivalentes si les intensités qu'elles véhiculent s'identifient. **b)** La puissance dissipée par effet Joule est celle qui est transférée par le champ aux porteurs de charge, c'est-à-dire celle qui correspond à la densité volumique $\vec{j} \cdot \vec{E}$. **c)** On doit intégrer ici sur tout le domaine. **d)** Le même calcul conduit avec la distribution équivalente proposée doit aboutir au même résultat.

1.a) D'après l'équation de Maxwell-Gauss, la densité volumique de charge s'écrit $\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}$. Or, le champ électrique n'a de composante que selon $\vec{e}_x$ et il ne dépend pas de la variable x, on en déduit :

$$\boxed{\rho = \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0}.$$

Le milieu conducteur est neutre.

b) L'amplitude de la variation temporelle de $\vec{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est $\varepsilon_0 \omega E$, que l'on doit comparer à γE. On en déduit que la densité de courant de conduction est d'amplitude très supérieure à la densité de courant de conduction, tant que $\omega \ll \frac{\gamma}{\varepsilon_0}$.

Remarque

On peut montrer plus généralement qu'un milieu conducteur perd sa charge avec une constante de temps $\frac{\varepsilon_0}{\gamma}$, c'est-à-dire quasi instantanément.

Numériquement, avec la conductivité et la fréquence données :

$$\boxed{\frac{j_v}{j_d} \approx \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \omega} = 4.10^8}.$$

On peut donc négliger le terme $\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ au second membre de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{B} \approx \mu_0 \vec{j}_v = \mu_0 \gamma \vec{E}.$$

Il est naturel, pour un métal qui est un bon conducteur, de trouver que la densité de courant dominante est celle qui correspond au phénomène de conduction.

On obtient ici l'équation de Maxwell-Ampère correspondant au régime quasi stationnaire.

Remarque

On a dû comparer les amplitudes, car les densités de courant $\vec{j}_v$ et $\vec{j}_d$ ne sont pas en phase, mais en quadrature. La comparaison n'est pas valable à chaque instant.

c) L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit par ailleurs :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Grâce à l'identité :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{E}\right)\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\operatorname{div} \vec{E} - \vec{\Delta}\left(\vec{E}\right)\right)$$

on aboutit à :

$$\boxed{\vec{\Delta}\left(\vec{E}\right) = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}.$$

Cette équation n'est pas à proprement parler une équation de propagation, car la dérivation temporelle est seulement d'ordre 1.

Une des conséquences est la sensibilité à un renversement formel du temps, c'est le signe de la présence d'une dissipation.

Remarque

L'effet Joule est dissipatif.

Le calcul du laplacien vectoriel en cartésiennes nécessite d'examiner successivement le laplacien scalaire de chaque composante.

Puisqu'ici le champ est polarisé selon $\vec{e}_x$, on écrit :

$$\vec{\Delta}\left(\vec{E}\right) = \left(\frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2}\right)\vec{e}_x.$$

Avec l'expression proposée initialement, on obtient :

$$\vec{\Delta}\left(\vec{E}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}^2 \underline{E}(y)}{\mathrm{d}y^2} - k^2 \underline{E}(y)\right)\exp\left[i(\omega t - kz)\right]\vec{e}_x.$$

L'équation différentielle en $\underline{E}(y)$ déduite de l'équation de propagation précédente est ainsi :

$$\frac{\mathrm{d}^2 \underline{E}(y)}{\mathrm{d}y^2} - k^2 \underline{E}(y) = i\mu_0 \gamma \omega \underline{E}(y)$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 \underline{E}(y)}{\mathrm{d}y^2} = \left(k^2 + \frac{2i}{\delta^2}\right)\underline{E}(y)}$$

avec l'indication de l'énoncé, qui fait intervenir une distance caractéristique δ dont la valeur numérique est de l'ordre du micromètre.

Puisque $k \sim \frac{\omega}{c}$, on obtient l'inégalité : $\boxed{k \ll \frac{1}{\delta}}$.

d) La solution générale de l'équation différentielle précédente fait apparaître une combinaison linéaire de fonctions exponentielles $\exp(ry)$, où r est une racine carrée de $k^2 + \frac{2i}{\delta^2}$, donc de $\frac{2i}{\delta^2}$.

Remarque

On utilise l'approximation $k \ll \frac{1}{\delta}$.

Deux solutions sont envisageables :

$$r = \pm\frac{1}{\delta} \pm i\frac{1}{\delta}.$$

Le milieu $y \geqslant 0$ est illimité, on doit par conséquent conserver le terme qui ne diverge pas : seule la solution $r = -\frac{1}{\delta} - i\frac{1}{\delta}$ est retenue.

Remarque

La partie réelle de r doit être négative.

Finalement, la solution construite ici prend la forme :

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = \underline{E}_0 \exp\left(-\frac{y}{\delta}\right)\exp\left[i\left(\omega t - kz - \frac{y}{\delta}\right)\right]\vec{e}_x}.$$

La densité volumique de courant, proportionnelle au champ électrique, s'écrit ainsi :

$$\underline{\vec{j}}_v = \underline{j}_0 \exp\left(-\frac{y}{\delta}\right)\exp\left[i\left(\omega t - kz - \frac{y}{\delta}\right)\right]\vec{e}_x$$

Remarque

La densité de courant s'atténue au fur et à mesure que l'on pénètre dans le métal.

on posera : $\underline{\vec{j}}_0 = \underline{j}_0\vec{e}_x$.

2.a) Une même intensité doit circuler à travers une surface s'étendant sur une profondeur infinie, que l'on prenne en compte une modélisation volumique ou surfacique.

On obtient le respect de cette propriété en identifiant $j_s \mathrm{d}z$ à $\left(\int_0^\infty j_v \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$, soit :

$$\boxed{\vec{j}_s = \int_0^\infty \vec{j}_v \mathrm{d}y}.$$

Remarque

Une densité surfacique de courant a pour dimension $\frac{I}{L}$ où I est une intensité et L une longueur.

b) La densité volumique de puissance dissipée par effet Joule s'écrit :

$$\vec{j}_v \cdot \vec{E} = \frac{j_v^2}{\gamma}.$$

Erreur à éviter

Il s'agit d'une grandeur quadratique : utiliser l'expression réelle.

La puissance moyenne dissipée dans le volume infini est donc :

$$\boxed{\left\langle \frac{\mathrm{d}P_J}{\mathrm{d}S}\right\rangle = \left\langle \int_0^\infty \frac{j_v^2}{\gamma}\mathrm{d}y\right\rangle}.$$

c) On exploite l'expression de la densité volumique de courant :

$$\underline{\vec{j}}_v = j_0 \exp\left(-\frac{y}{\delta}\right)\exp\left[i\left(\omega t - kz - \frac{y}{\delta}\right)\right]\vec{e}_x.$$

Remarque

Un choix correct d'origine pour t permet d'adopter $\underline{j}_0$ réel.

La relation entre les densités surfacique et volumique conduit à :

$$\underline{\vec{j}}_s = \int_0^\infty j_0 \exp\left(-\frac{y}{\delta}\right)\exp\left[i\left(\omega t - kz - \frac{y}{\delta}\right)\right]\mathrm{d}y\,\vec{e}_x$$

avec : $\int_0^\infty \exp\left(-\frac{y}{\delta}(1+i)\right)\mathrm{d}y = \frac{\delta}{1+i}$.

Technique de calcul

L'intégrale converge car : $\left|\exp\left(-\frac{y}{\delta}(1+i)\right)\right| = \exp\left(-\frac{y}{\delta}\right)$ intégrable sur $[0, \infty]$.

Finalement, l'amplitude complexe de la densité surfacique de courant est :

$$\underline{\vec{j}}_s = \frac{\delta}{1+i} j_0 \exp[i(\omega t - kz)]\vec{e}_x.$$

En notation réelle, on obtient ainsi :

$$\vec{j}_s(x, y, z, t) = \frac{j_0\delta}{\sqrt{2}}\cos\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{4}\right)\vec{e}_x.$$

Technique de calcul

L'argument de $\frac{1}{1+i}$ vaut $-\frac{\pi}{4}$, le module $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

La valeur moyenne de $\vec{j}_s^{\,2}$ est calculée à partir de l'expression réelle et on aboutit à :

$$\boxed{\langle \vec{j}_s^{\,2}\rangle = \frac{j_0^2\delta^2}{4}}.$$

On peut écrire de même la densité volumique de courant, à partir de la partie réelle de l'expression obtenue en **1.d)**. En valeur moyenne quadratique dans le temps :

$$\langle \vec{j}_v^{\,2}\rangle = j_0^2 \exp\left(-\frac{2y}{\delta}\right)\left\langle \cos^2\left(\omega t - kz - \frac{y}{\delta}\right)\right\rangle = \frac{j_0^2}{2}\exp\left(-\frac{2y}{\delta}\right).$$

Remarque

$\vec{j}_s$ ne dépend plus de y bien entendu.

Pour obtenir $\left\langle \frac{\mathrm{d}P_J}{\mathrm{d}S}\right\rangle$, l'intégration selon y fait appel au résultat :

$$\int_0^\infty \exp - 2\frac{y}{\delta}\mathrm{d}y = \frac{\delta}{2}$$

Technique de calcul

La moyenne temporelle : $\langle\cos^2(\omega t + \varphi)\rangle$ est égale à $\frac{1}{2}$.

et on déduit l'expression suivante : $\left\langle \frac{\mathrm{d}P_J}{\mathrm{d}S}\right\rangle = \frac{j_0^2\delta}{4\gamma}$.

Rapproché de l'expression obtenue précédemment pour $\langle \vec{j}_s^{\,2}\rangle$, ce résultat établit l'identité demandée :

$$\boxed{\left\langle \frac{\mathrm{d}P_J}{\mathrm{d}S}\right\rangle = \frac{1}{\gamma\delta}\langle \vec{j}_s^{\,2}\rangle}.$$

d) Considérons une densité de courant uniforme $\vec{j} = j_0\cos(\omega t - kz)\vec{e}_x$, dans une couche d'épaisseur δ_{eff}. La dissipation surfacique de puissance serait alors égale à :

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}P_J}{\mathrm{d}S}\right\rangle = \left\langle \frac{j^2}{\gamma}\right\rangle\delta_{\text{eff}} = \frac{j_0^2}{2\gamma}\delta_{\text{eff}}.$$

Remarque

On choisit une amplitude égale à celle de la densité volumique en $y = 0$.

Ainsi, en adoptant $\boxed{\delta_{\text{eff}} = \frac{\delta}{2}}$, on obtient une dissipation identique par les deux modèles.

REMARQUE – Cette résolution a nécessité d'exploiter tous les éléments de théorie présentés dans le cours : des équations de propagation aux interprétations énergétiques, en passant par l'équation de dispersion et les conditions aux limites. Il montre que ces outils et méthodes sont communs à de nombreuses situations.

➔ Coefficients de réflexion transmission

Conseils méthodologiques. 1. On raisonne à l'aide des équations de Maxwell, que l'on découple. La discussion passe alors par l'examen du vecteur d'onde. **2.** L'absorption dans le métal fait apparaître une profondeur caractéristique. **3.** La réflexion et la transmission sont étudiées comme usuellement, à l'aide des relations de passage.

1.a) L'amplitude de la variation temporelle de $\vec{j}_d = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est $\varepsilon_0 \omega E$, que l'on doit comparer à γE. On en déduit que la densité de courant de conduction est d'amplitude très supérieure à la densité de courant de déplacement, tant que $\omega \ll \dfrac{\gamma}{\varepsilon_0}$.

Numériquement, avec la conductivité donnée, $\dfrac{j_v}{j_d} > 100$ pour $\omega < 1{,}1.10^{16}$ rad.s^{-1}, soit $f < 1{,}8.10^{15}$ Hz.

On peut donc négliger le terme $\varepsilon_0 \mu \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ au second membre de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{B} \approx \mu \vec{j}_v = \mu \gamma \vec{E}}.$$

Il est naturel, pour un métal qui est un bon conducteur, de trouver que la densité de courant dominante est celle qui correspond au phénomène de conduction.
On obtient ici l'équation de Maxwell-Ampère correspondant au régime quasi stationnaire.

Remarque

On a dû comparer les amplitudes, car les densités de courant $\vec{j}_v$ et $\vec{j}_d$ ne sont pas en phase, mais en quadrature. La comparaison n'est pas valable à chaque instant.

b) L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit par ailleurs :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Grâce à l'identité :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E}) - \vec{\Delta}(\vec{E})),$$

on aboutit à :

$$\boxed{\vec{\Delta}(\vec{E}) = \mu\gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}.$$

Cette équation n'est pas à proprement parler une équation de propagation car la dérivation temporelle est seulement d'ordre 1 : c'est une équation de diffusion. Une des conséquences est la sensibilité à un renversement formel du temps qui est le signe de la présence d'une dissipation.

Remarque

$\mu = \mu_0 \mu_r$.

c) Le calcul du laplacien vectoriel en coordonnées cartésiennes nécessite d'examiner successivement le laplacien scalaire de chaque composante. Puisqu'ici le champ est polarisé selon $\vec{e}_z$, on écrit :

$$\vec{\Delta}(\vec{E}) = \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right)\vec{e}_z.$$

Remarque

L'effet Joule est dissipatif.

Avec l'expression du champ proposée, on obtient simplement :

$$\vec{\Delta}(\underline{\vec{E}}_T) = -k_T^2 \underline{\vec{E}}_T.$$

La relation de dispersion qui découle de l'équation de diffusion est :

$$\boxed{k_T^2 = -j\omega\mu\gamma}.$$

L'onde transmise se propage selon les x croissants en s'atténuant. La partie imaginaire de k_T doit donc être négative, car si $k_T = k' + jk''$,

$$\exp j(\omega t - k_T x) = \exp(k'' x) \exp j(\omega t - k' x).$$

Le module est bien une fonction décroissante de x.
L'inverse de la partie imaginaire de k_T apparaît comme une distance caractéristique de pénétration de l'onde dans le milieu.
La solution retenue est donc :

$$\boxed{k_T = \sqrt{\mu\gamma\omega}\exp(-j\pi/4)}.$$

Remarque

Le choix inverse aurait conduit a une solution de puissance tendant vers l'infini, au fur et à mesure de la pénétration dans le métal.

d) Le terme de propagation est contenu dans $\exp j(\omega t - k'x)$ où k' est la partie réelle de k_T, soit $\sqrt{\dfrac{\mu\gamma\omega}{2}}$.

– La vitesse de phase est donc : $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k'} = \sqrt{\dfrac{2\omega}{\mu\gamma}}$.

– La vitesse de groupe est : $\boxed{v_g = \dfrac{d\omega}{dk'} = 2\sqrt{\dfrac{2\omega}{\mu\gamma}} = 2v_\varphi}$.

La vitesse de phase dépend de la pulsation : le milieu est dispersif. Mais, en réalité, il est surtout absorbant, l'onde y pénètre très peu.

2.a) On peut écrire : $k_T = \dfrac{1}{\delta} - j\dfrac{1}{\delta}$,
où δ est la profondeur caractéristique de pénétration de l'onde, on parle d'épaisseur de peau. Numériquement :

$$\boxed{\delta = 5.10^{-5}\ \text{m}}.$$

L'onde n'affecte que la surface du matériau.

b) Les ondes incidente, réfléchie et transmise ont même pulsation, ce qui est une conséquence de la linéarité des milieux, on peut donc écrire :

$$k_T = \frac{1}{\delta} - j\frac{1}{\delta} \quad \text{et} \quad k_R = k = \frac{\omega}{c}.$$

3.a) L'équation de structure de l'onde plane progressive monochromatique :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega},$$

écrite dans chaque milieu, conduit à :

$$\boxed{a_i = \frac{1}{c},\ a_R = -\frac{1}{c},\ \underline{a}_T = a_T \exp(j\varphi_T) = \frac{\sqrt{2}}{\delta\omega}\exp(-j\pi/4)}.$$

Le vecteur donnant la polarisation du champ magnétique est naturellement $\vec{u}_y$ compte tenu de la structure des ondes.

Remarque

On prend en compte le changement de sens de la propagation de l'onde réfléchie.

b) La composante tangentielle du champ électrique est toujours continue ; il s'ajoute ici la continuité de la composante normale du champ magnétique, car aucun milieu n'est parfaitement conducteur. On obtient donc, en identifiant les champs de part et d'autre du plan d'abscisse $x = 0$:

$$E_0 + \underline{E}_{0R} = \underline{E}_{0T}, \text{ pour le champ électrique,}$$

et : $$E_0 - \underline{E}_{0R} = \frac{\sqrt{2}\,c}{\delta\omega}\exp(-j\pi/4)\underline{E}_{0T}, \text{ pour le champ magnétique.}$$

L'expression de α proposée conduit à la simplification, compte tenu de la valeur de δ déterminée précédemment.

c) $\alpha = \dfrac{\delta\omega}{c}$, si bien que $\alpha \ll 1$ correspond tout à fait à $\delta\omega \ll c$, puisque numériquement $\delta\omega / c \sim 10^{-7}$.

d) Les relations de passage permettent d'obtenir :

$$2E_0 = \left(1 + \frac{1-j}{\alpha}\right)\underline{E}_{0T} \approx \frac{1-j}{\alpha}\underline{E}_{0T},$$

au premier ordre en α. Ainsi :

$$\underline{E}_{0T} \approx \frac{2\alpha}{1-j}E_0 \quad \text{et} \quad \underline{E}_{0R} \approx \frac{2\alpha + j - 1}{1-j}E_0.$$

La limite $\alpha \to 0$ conduit naturellement à voir disparaître l'onde transmise : $E_{0T} / E_0 \to 0$ et obtenir une onde réfléchie $E_{0R} \approx -E_0$ qui est celle que l'on obtient pour un métal parfaitement conducteur.

⇨ Remarque

$\rho \to -1$.